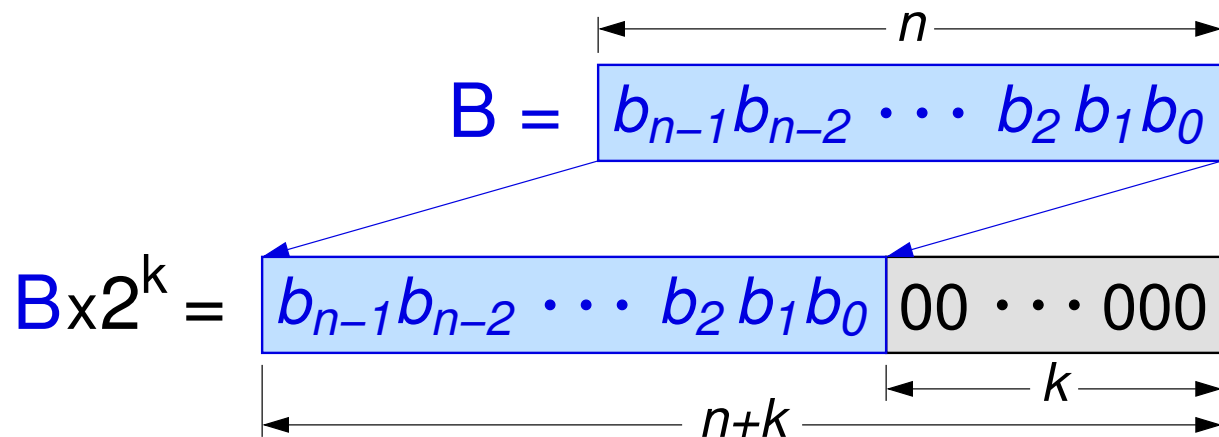


Πολλαπλασιασμός, Διαίρεση-Πηλίκο-Υπόλοιπο
επί/διά δύναμη του 2,
Συστροφή και η αναπαράσταση Αρνητικών

06α (§ 6.1 - 6.2) – 22-27 Οκτ. 2025 – Μανόλης Κατεβαίνης

Πολλαπλασιασμός x δύναμη του 2: Αριστερή Ολίσθηση

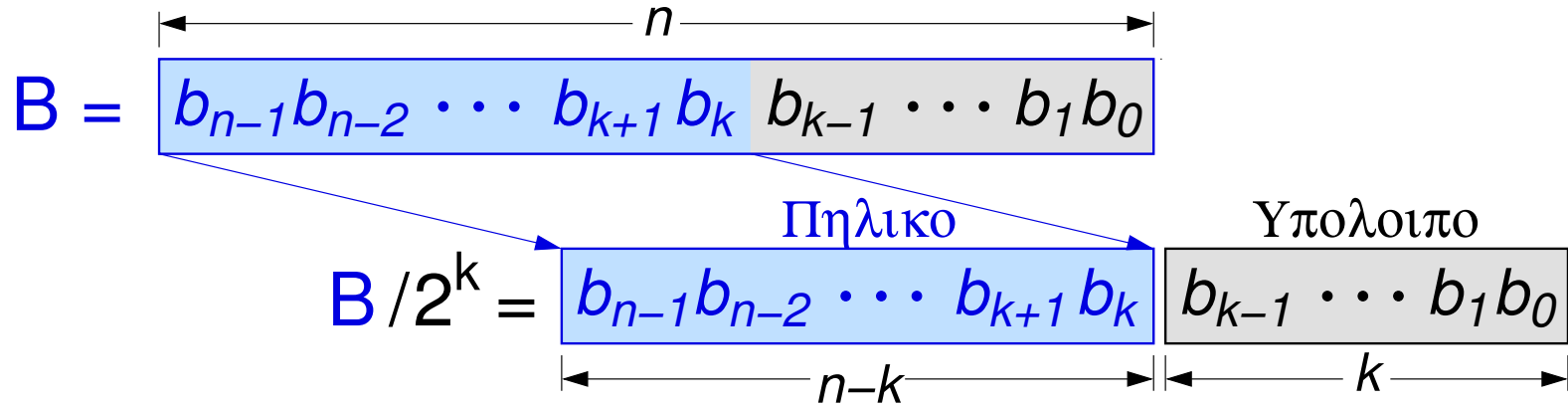


- $B = b_{n-1} \times 2^{n-1} + b_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots + b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$

$$\Rightarrow B \times 2^k = b_{n-1} \times 2^{n+k-1} + b_{n-2} \times 2^{n+k-2} + \dots + b_2 \times 2^{k+2} + b_1 \times 2^{k+1} + b_0 \times 2^k + 0 \times 2^{k-1} + 0 \times 2^{k-2} + \dots + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

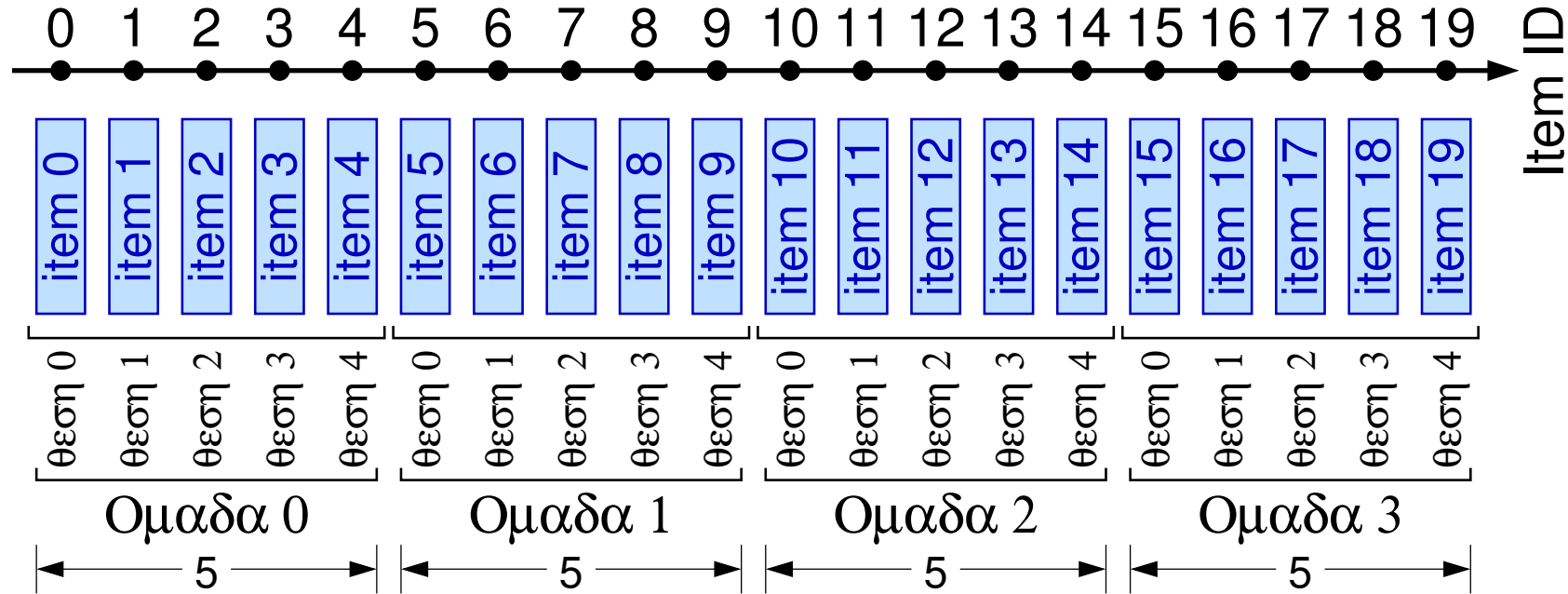
- «Αριστερή Ολίσθηση» (“Left Shift”) κατά k bits

Διαίρεση διά δύναμη του 2: Δεξιά Ολίσθηση



- $$B = b_{n-1} \times 2^{n-1} + b_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots + b_{k+1} \times 2^{k+1} + b_k \times 2^k + b_{k-1} \times 2^{k-1} + \dots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$$
- $$\Rightarrow B/2^k = b_{n-1} \times 2^{n-k-1} + b_{n-2} \times 2^{n-k-2} + \dots + b_{k+1} \times 2^1 + b_k \times 2^0 + (b_{k-1} \times 2^{k-1} + \dots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0) / 2^k$$
- «Δεξιά Ολίσθηση» (“Right Shift”) κατά k bits

Πηλίκο-Υπόλοιπο: μοίρασμα στοιχείων σε Ομάδες



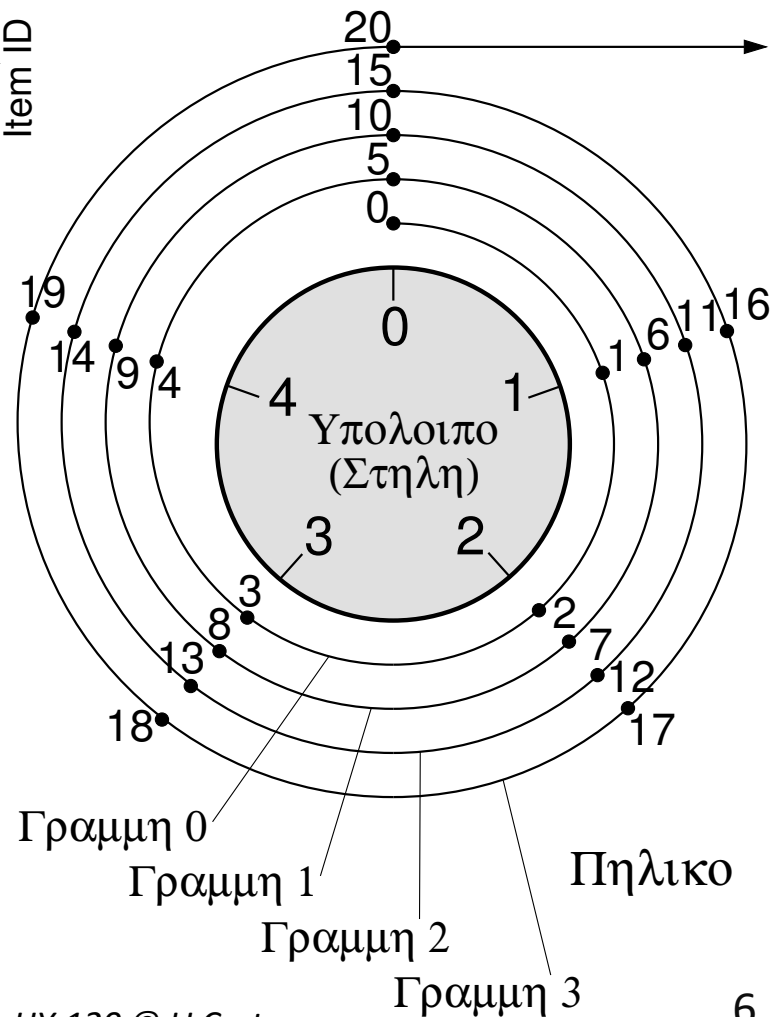
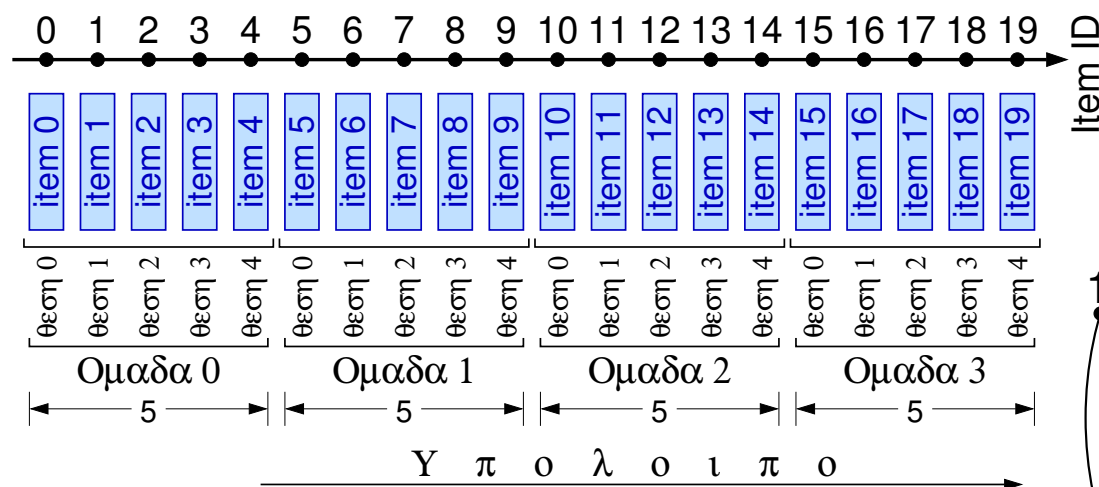
- Στοιχείο N : σε ποιάν Ομάδα και σε ποιά θέση μέσα της;
- Ομάδες μεγέθους $\Delta \Rightarrow \Delta$ είναι ο διαιρέτης, εδώ $\Delta=5$
- Ομάδα = Πηλίκο $(N/\Delta) =$ $= \lfloor N/\Delta \rfloor$
- Θέση εντός ομάδας = Υπόλοιπο $(N/\Delta) = "N \bmod \Delta"$

Πηλίκo-Υπόλοιπο: μοίρασμα σε Γραμμές-Στήλες

		Υ π ο λ ο ι π ο				
		Στήλη 0	Στήλη 1	Στήλη 2	Στήλη 3	Στήλη 4
Π η λ ί κ ο ↓	Γραμμή 0	item 0	item 1	item 2	item 3	item 4
	Γραμμή 1	item 5	item 6	item 7	item 8	item 9
	Γραμμή 2	item 10	item 11	item 12	item 13	item 14
	Γραμμή 3	item 15	item 16	item 17	item 18	item 19

- Γραμμές μεγέθους $\Delta \Rightarrow \Delta$ είναι ο διαιρέτης, εδώ $\Delta=5$
- Το στοιχείο N είναι στην Ομάδα = Γραμμή = Πηλίκo (N/Δ),
- στη θέση = Στήλη = Υπόλοιπο (N/Δ) = $N \bmod \Delta$

Πηλικο-Υπόλοιπο: Συστροφή του Άξονα των Αριθμών



- Σαν να τυλίγουμε τον άξονα των αριθμών σε ένα καρούλι με περίμετρο = Δ , όσο το μέγεθος της ομάδας (Διαιρέτης)

Εφαρμογές ($\Delta=2^k$): Μνήμες-υποδιαιρέσεις, αρν. αριθ.

- Όταν ο διαιρέτης $\Delta =$ δύναμη του 2, η διαίρεση είναι τετριμμένη:
→ bit selection

		Υ π ο λ ο ι π ο				
		Στήλη 0	Στήλη 1	Στήλη 2	Στήλη 3	Στήλη 4
Π η λ ι κ ο ↓	Γραμμή 0	item 0	item 1	item 2	item 3	item 4
	Γραμμή 1	item 5	item 6	item 7	item 8	item 9
	Γραμμή 2	item 10	item 11	item 12	item 13	item 14
	Γραμμή 3	item 15	item 16	item 17	item 18	item 19

- Εφαρμογές:
- Bytes μέσα στις Λέξεις της μνήμης
- Λέξεις μέσα σε Γραμμές (Blocks) Κρυφής μνήμης (Cache)
- Λέξεις μέσα σε Σελίδες (Pages) Εικονικής Μν. (Virtual M.)
- Λέξεις μέσα στα Chips που απαρτίζουν Μεγάλη Μνήμη
- Συστροφή (modulo arithmetic): ιδέα για αναπαρ. αρνητικών

Γιατί μετράμε τα N στοιχεία από το 0 έως το $N-1$

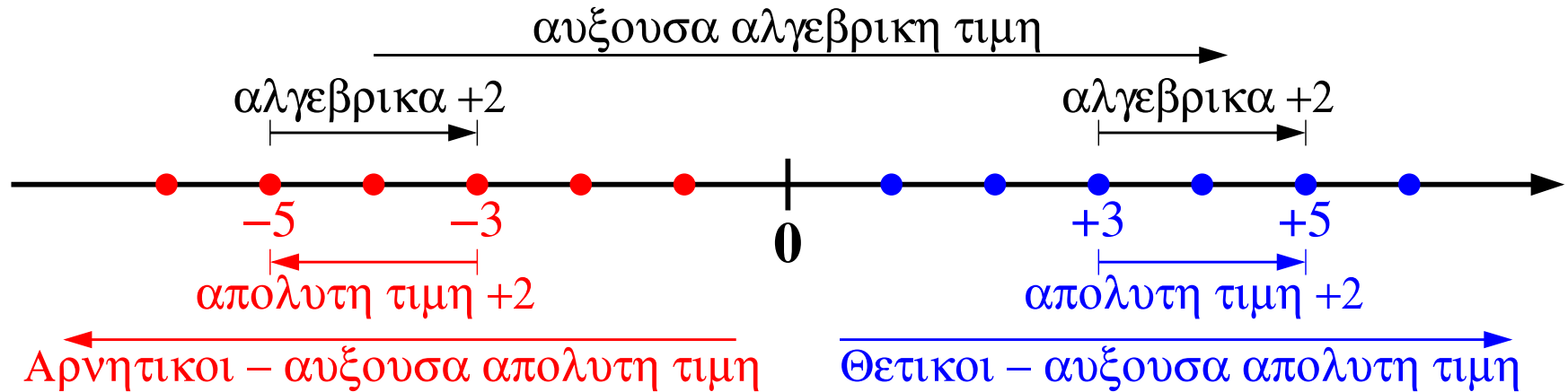
- Για να ισχύει η προηγούμενη ιδιότητα πηλίκου-υπολοίπου πρέπει τα N στοιχεία να τα μετράμε από το 0 έως το $N-1$
- Παράδειγμα «σωστής» μέτρησης:
 - Ξενοδοχείο με 500 δωμάτια σε 5 επίπεδα:
 - Όροφος 0 : Δωμάτια 000 έως 099 (Ισόγειο)
 - Όροφος 1 : Δωμάτια 100 έως 199
 - Όροφος 2 : Δωμάτια 200 έως 299
 - Όροφος 3 : Δωμάτια 300 έως 399
 - Όροφος 4 : Δωμάτια 400 έως 499

Παράδειγμα «λάθος» μέτρησης, από το 1 έως το N

- 2100 χρόνια σε 21 αιώνες από 100 χρόνια ανά αιώνα:
 - 1^{ος} αιώνας: έτη 1 έως και 100
 - ...
 - 19^{ος} αιώνας: έτη 1801 έως και 1900
 - 20^{ος} αιώνας: έτη 1901 έως και 2000
 - 21^{ος} αιώνας: έτη 2001 έως και 2100
- Ο αιώνας “A” περιέχει 99 χρόνια που η αρίθμησή τους ξεκινά με “A-1”, και ένα έτος με αριθμό “A00” (!)

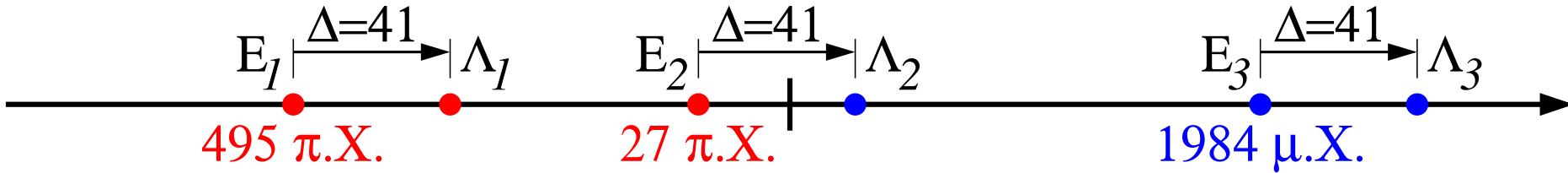
Η Αναπαράσταση Αρνητικών, και τα προβλήματά της

- Οι άνθρωποι: Πρόσημο & Απόλυτη Τιμή (sign-magnitude)
- Η απόλυτη τιμή όμως αυξάνει πότε δεξιά, πότε αριστερά...



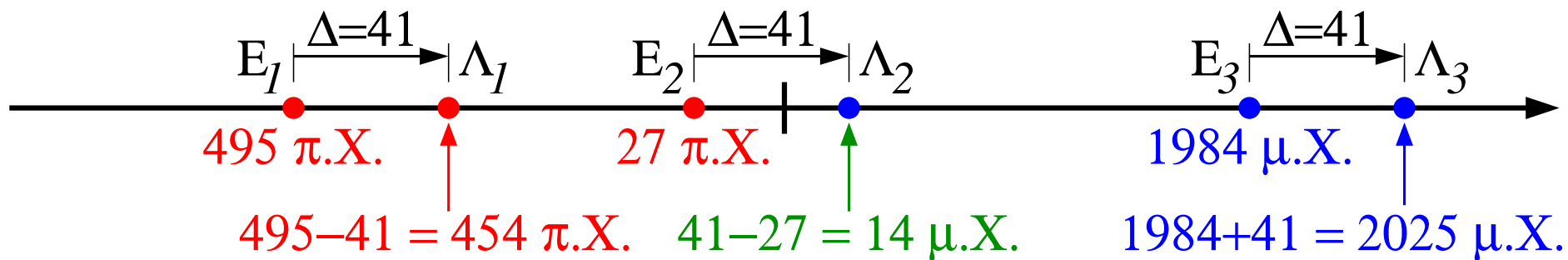
- Έτσι, η αλγεβρική πρόσθεση $A+B$ καταλήγει να απαιτεί μια σύγκριση $|A| > |B|$ και τρεις περιπτώσεις πράξεων: $|A|+|B|$, $|A|-|B|$, $|B|-|A|$

Παράδειγμα: Χρονολογίες π.Χ. – μ.Χ.



- Χρονικές Περίοδοι: E = έναρξη, Δ = διάρκεια, Λ = λήξη = $E + \Delta$
 1. Ο Περικλής γεννήθηκε το 495 π.Χ., και όταν ήταν 41 ετών μετέφερε το Συμμαχικό Ταμείο από την Δήλο στην Αθήνα
 2. Ο Αύγουστος ήταν Αυτοκράτορας της Ρώμης από το 27 π.Χ. και για 41 έτη
 3. Το CSD λειτουργεί από το 1984 μ.Χ. και για 41 χρόνια τώρα

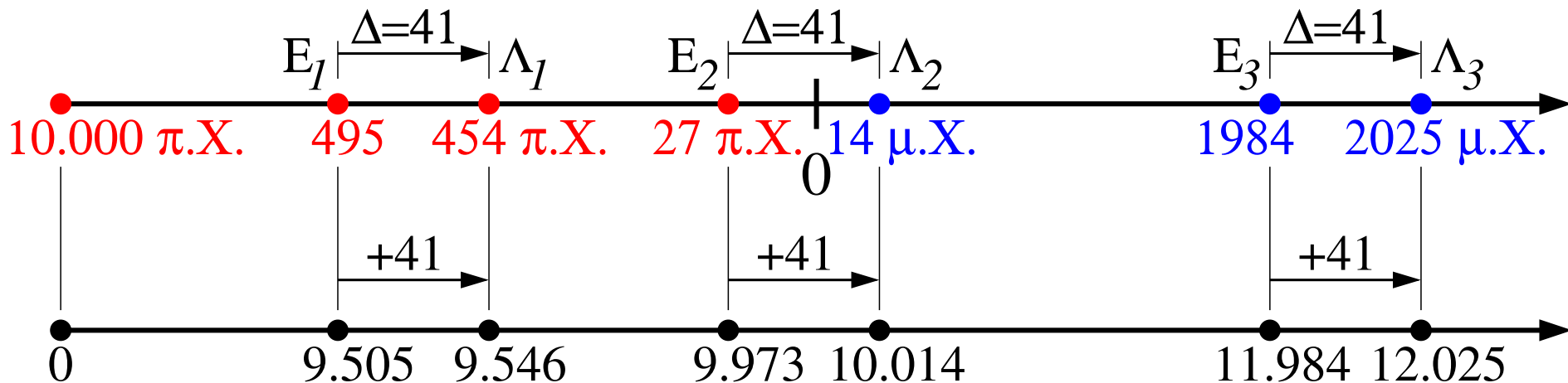
Η Πρόσθεση E+Δ απαιτεί σύγκριση και 3 περιπτώσεις



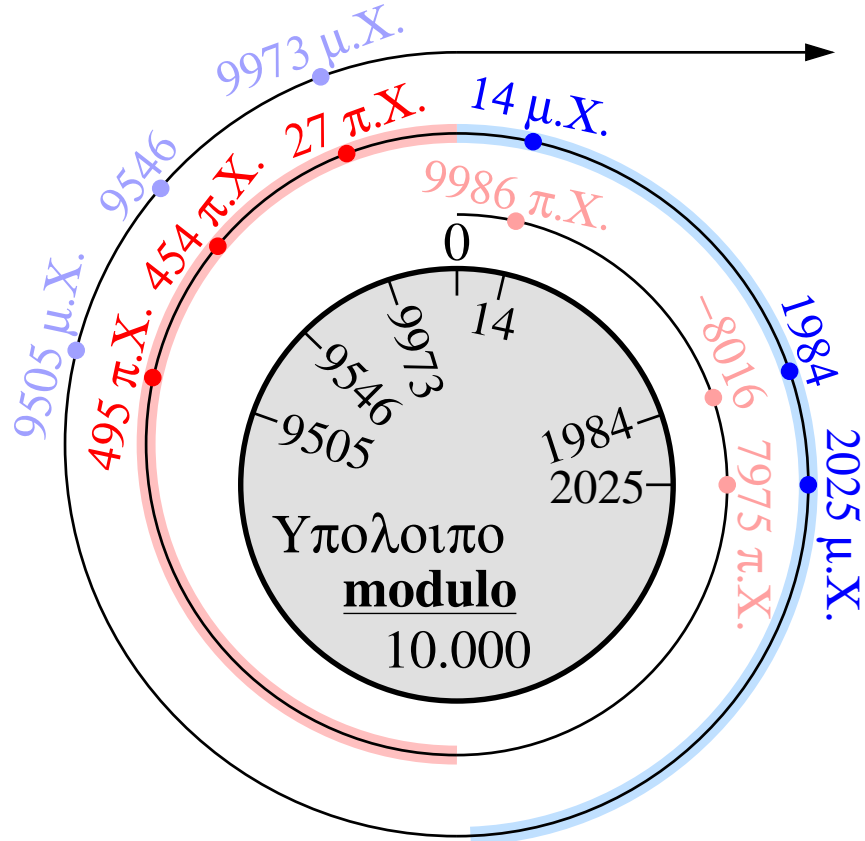
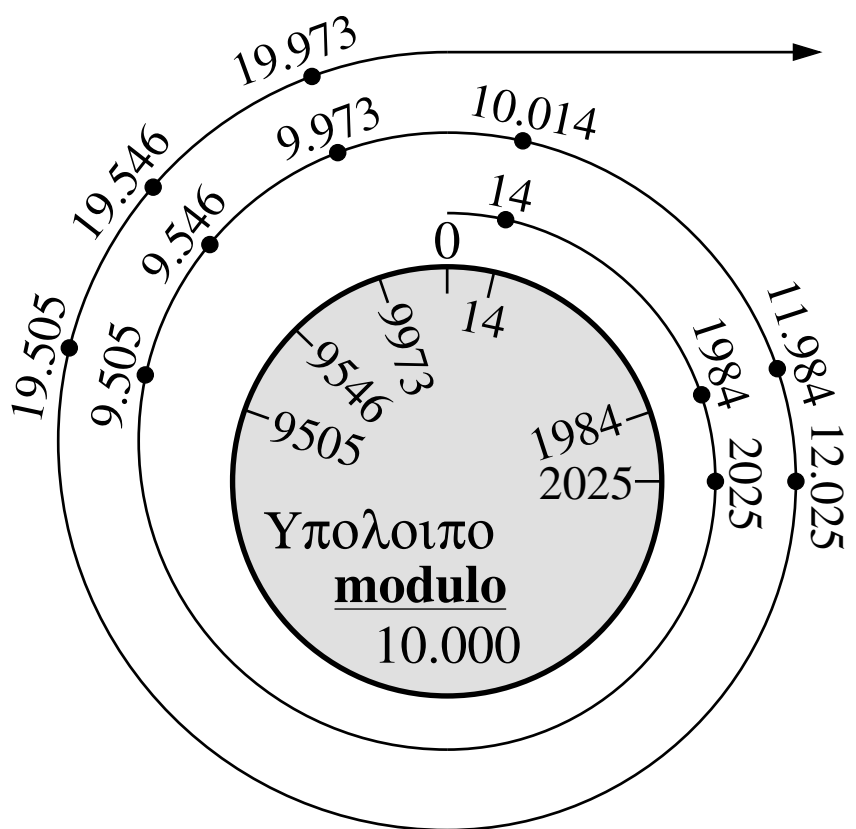
- Λ (λήξη) = E (έναρξη) + Δ (διάρκεια):
- $|\Lambda_1| = |E_1| - |\Delta|$, επειδή E_1, Δ ετερόσημοι, και $|E_1| > |\Delta|$
- $|\Lambda_2| = |\Delta| - |E_2|$, επειδή E_2, Δ ετερόσημοι, και $|E_2| < |\Delta|$
- $|\Lambda_3| = |E_3| + |\Delta|$, επειδή E_3, Δ ομόσημοι

Εάν μετρούσαμε από το 10.000 π.Χ., ώστε όλα θετικά

- Η περιπτωσιολογία προέκυψε επειδή ο αριθμός μέσα στην αναπαράσταση αυξάνει σε διαφορετικές κατευθύνσεις
- Εάν μετρούσαμε από τόσο παλιά ώστε όλα να είναι θετικά:



Εάν κρατήσουμε μόνο τα 4 δεξιά ψηφία: mod 10.000

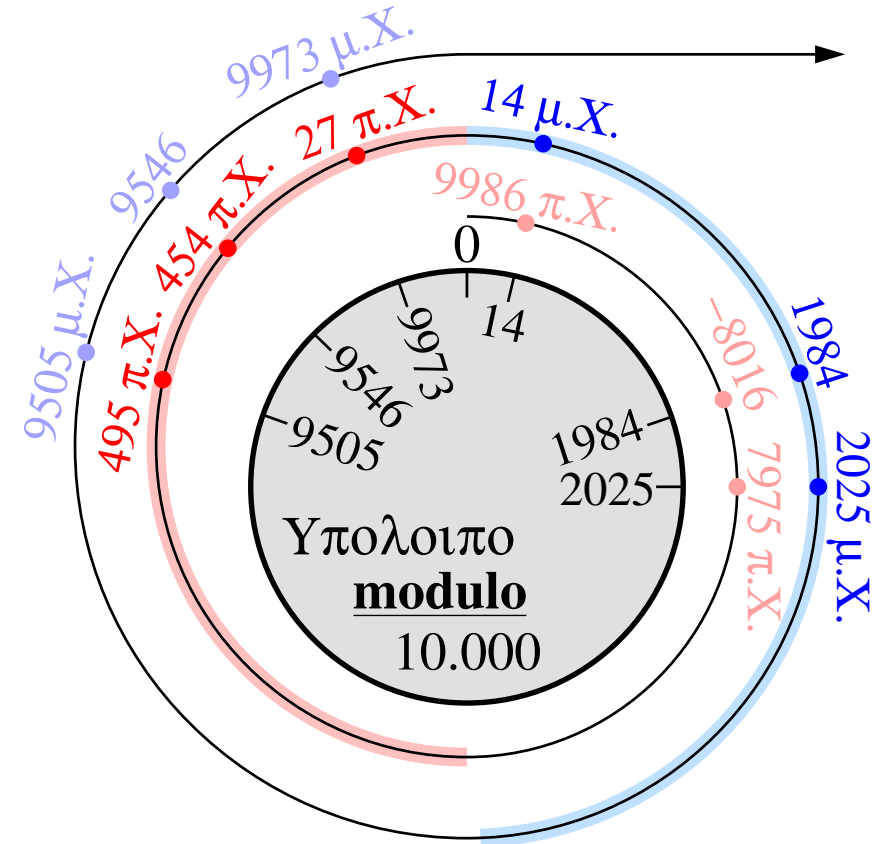


Μετρώντας από το 10.000 π.Χ. Μετρώντας κανονικά

Το Υπόλοιπο **mod 10.000** δεν αλλάζει όταν προσθαφαιρούμε ± 10.000

Επιλογή ερμηνείας & 4-ψήφιες πράξεις: **mod** 10.000

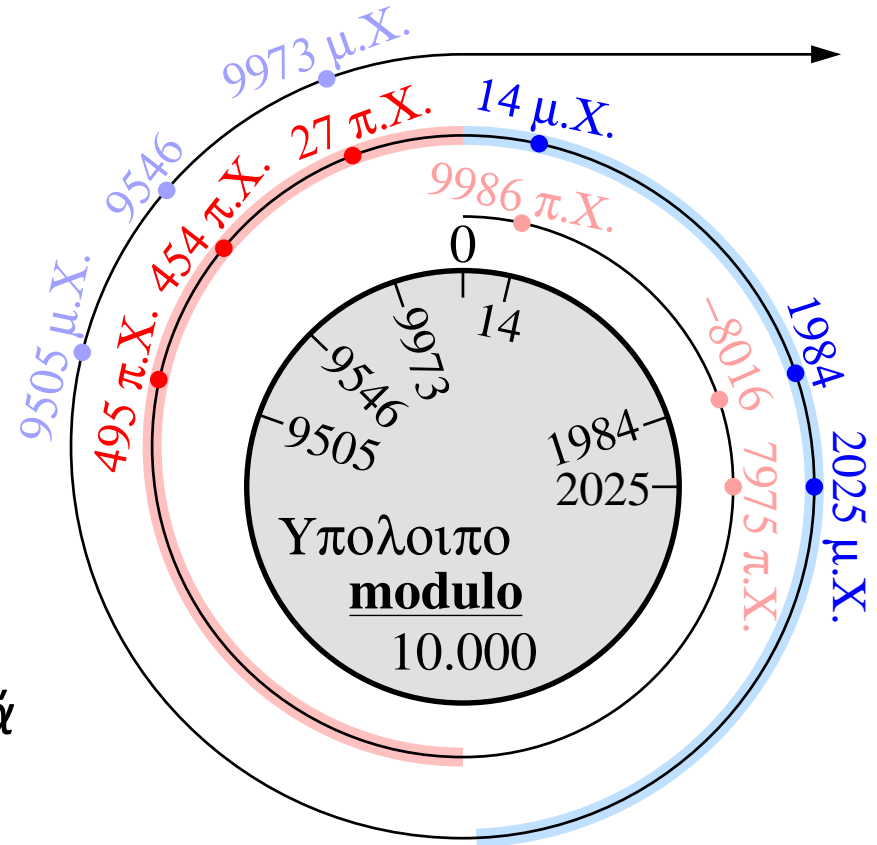
- 4-ψήφιο Υπόλοιπο **mod** 10.000
- 10.000 χρονολογίες: ποιές;
- Π.χ. επιλογή Ιστορικής περιόδου από **5000 π.Χ.** έως **4999 μ.Χ.**
- μικρά (μαύρα) Υπολ.: **μ.Χ.** (θετ.)
- Μεγάλα Υπόλοιπα: **π.Χ.** (αρνητ.)
- Οι πράξεις με τα (μαύρα) «Υπόλοιπα» ισοδύναμες & απλούστερες από πράξεις με (μπλέ / κόκκινες) αναπαραστάσεις πρόσημο & απόλυτη τιμή



- Το ίδιο κάνουμε στο Δυαδικό!

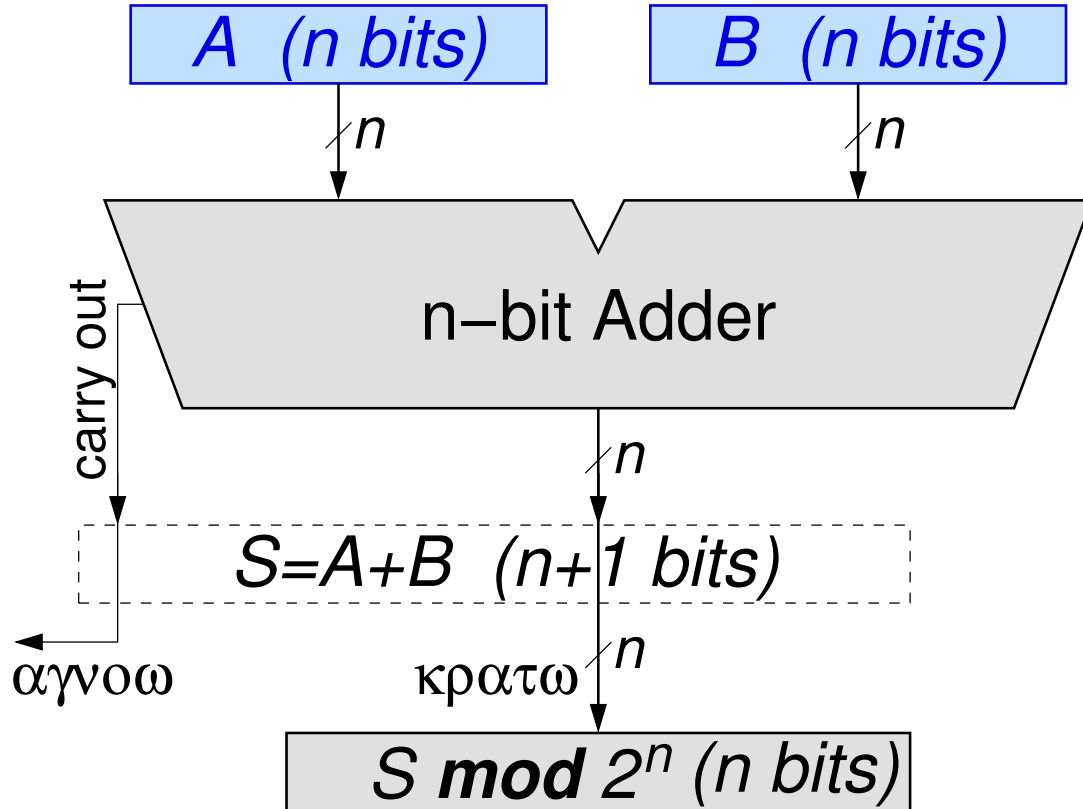
Εύρεση Αντιθέτου: Συμπλήρωμα ως προς 9 ή 10

- Πώς βρίσκουμε την αναπαράσταση 9505 του $-495 = 495 \text{ π.Χ.}$;
- $9505 = 10.000 - 495 = 9.999 - 495 + 1$
- | | |
|------------------|----------------------|
| 9 9 9 9 | κατά την αφαίρεση |
| 0 4 9 5 − | από 9 («Συμπλήρωμα |
| <hr/> | ως προς 9»), κανένα |
| 9 5 0 4 | ψηφίο δεν χρειάζεται |
| 1 + | δανεικό από αριστερά |
| <hr/> | |
| 9 5 0 5 | |
- “10’s Complement” αριθμού = “9’s Complement” κάθε ψηφίου, συν ένα



- Θυμηθείτε το για το Δυαδικό!

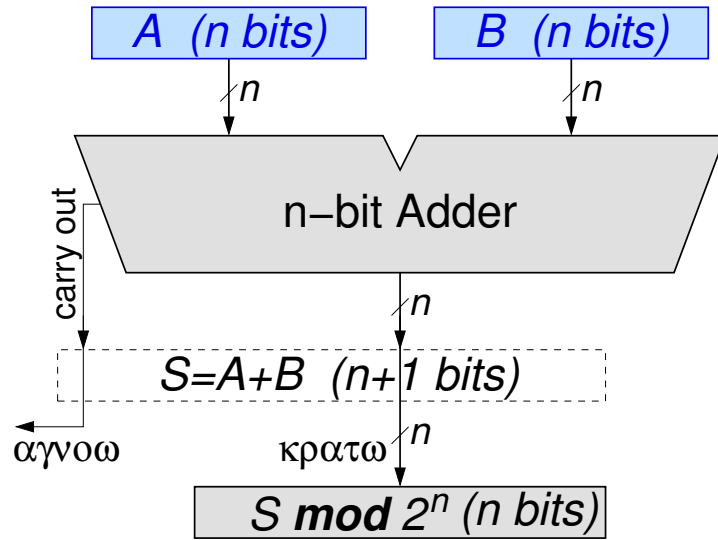
Πρόσθεση κρατώντας μόνον n bits: Συστροφή



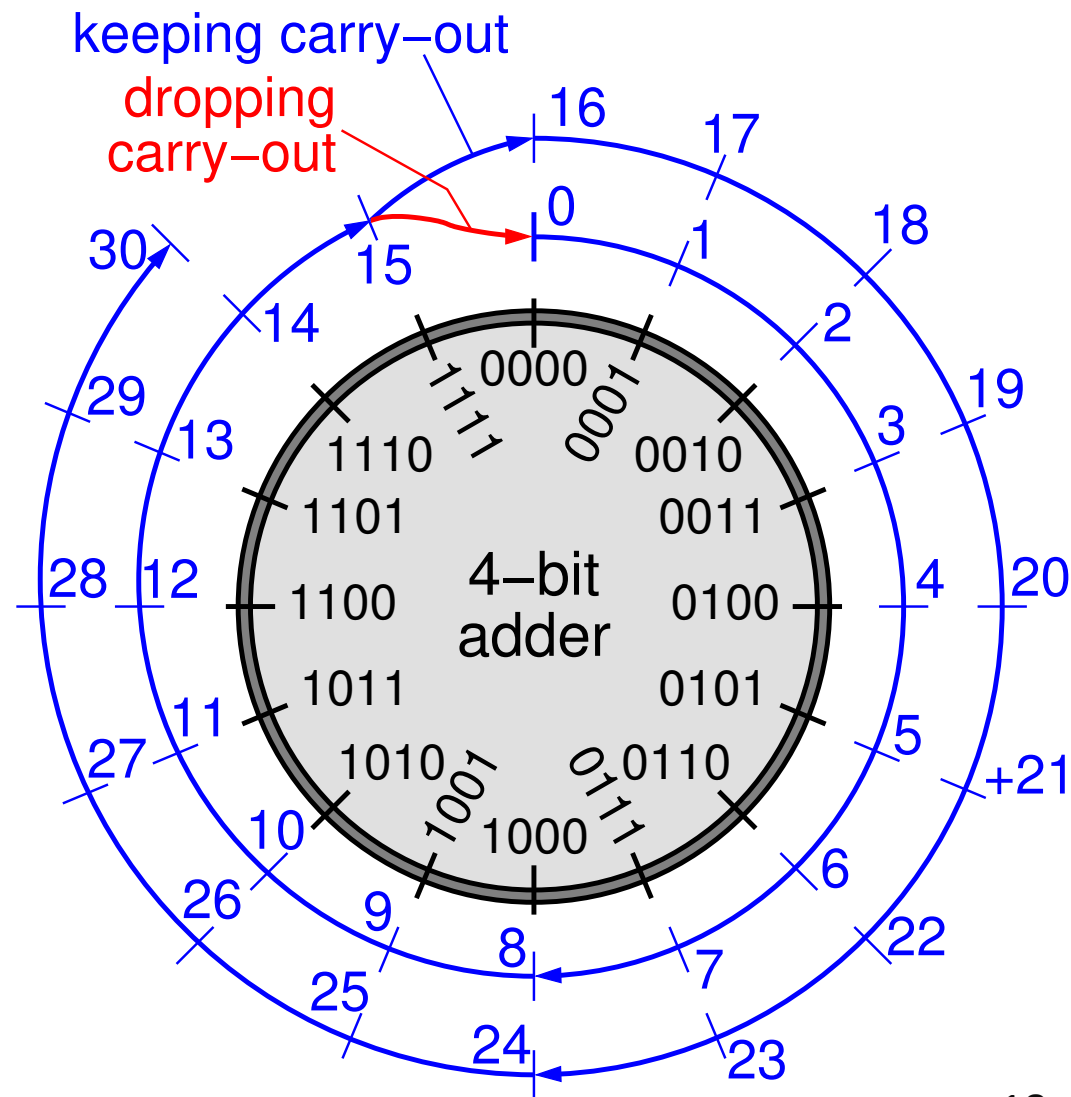
- Δύο αιτίες:
- Δεν χωρά το προσθετο bit σε μνήμη / καταχωρητές
- Για «πολύ μεγάλα» αποτελέσματα, η αγνόηση του carry-out ισοδυναμεί με «μείον 2^n »

⇒ δυνατότητα αναπαράστασης & πράξεων με αρνητικούς

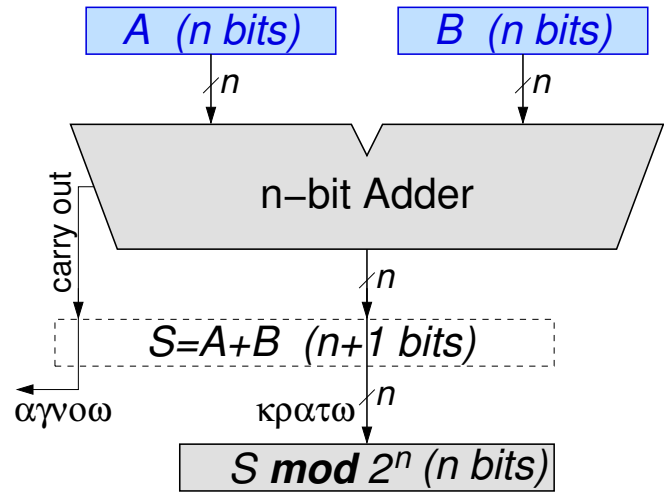
Carry-out – Συστροφή



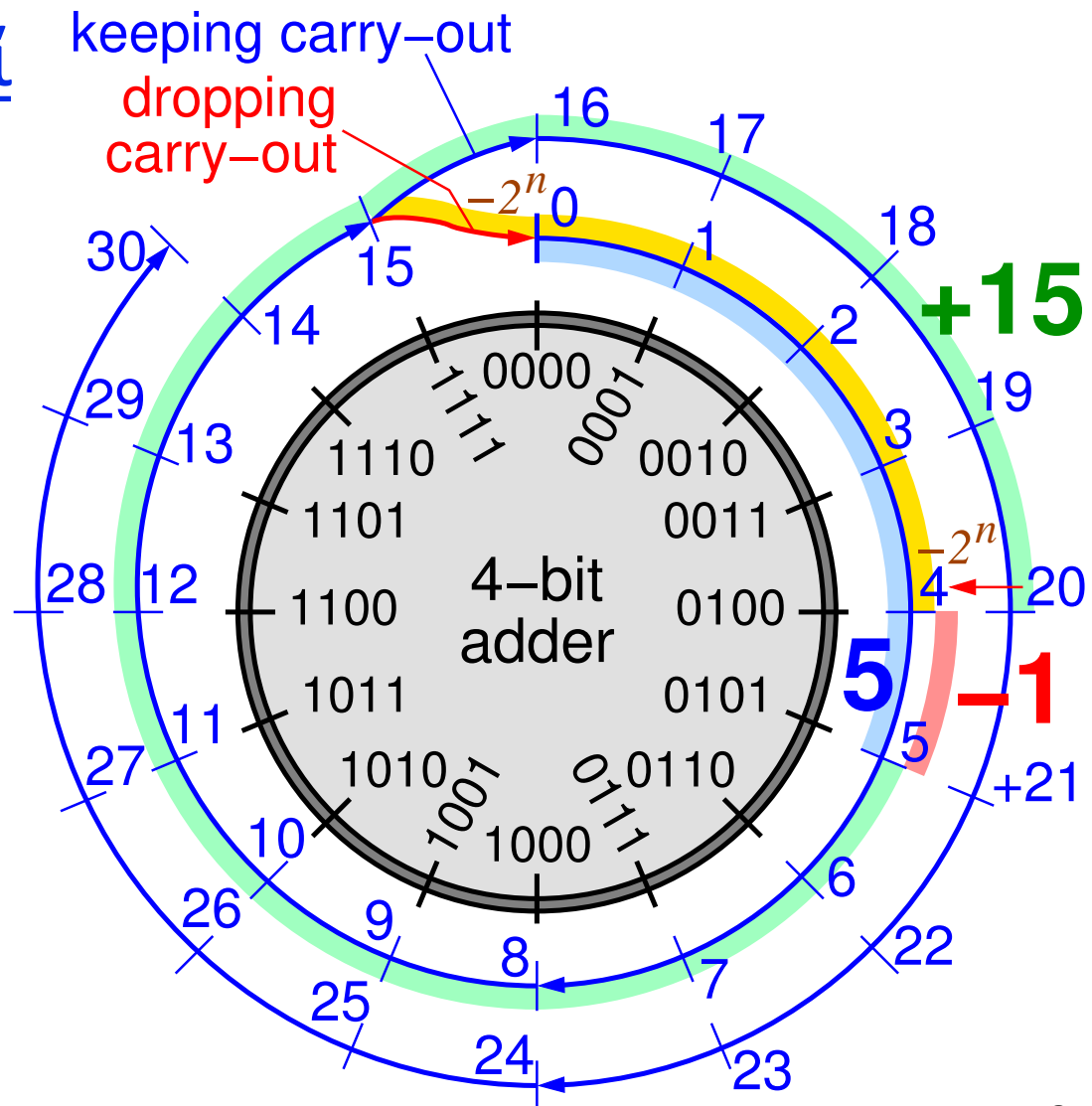
- Χωρίς το carry-out:
 n least-significant bits =
υπόλοιπο διαίρεσης
δια 2^n (εδώ: $n=4$)



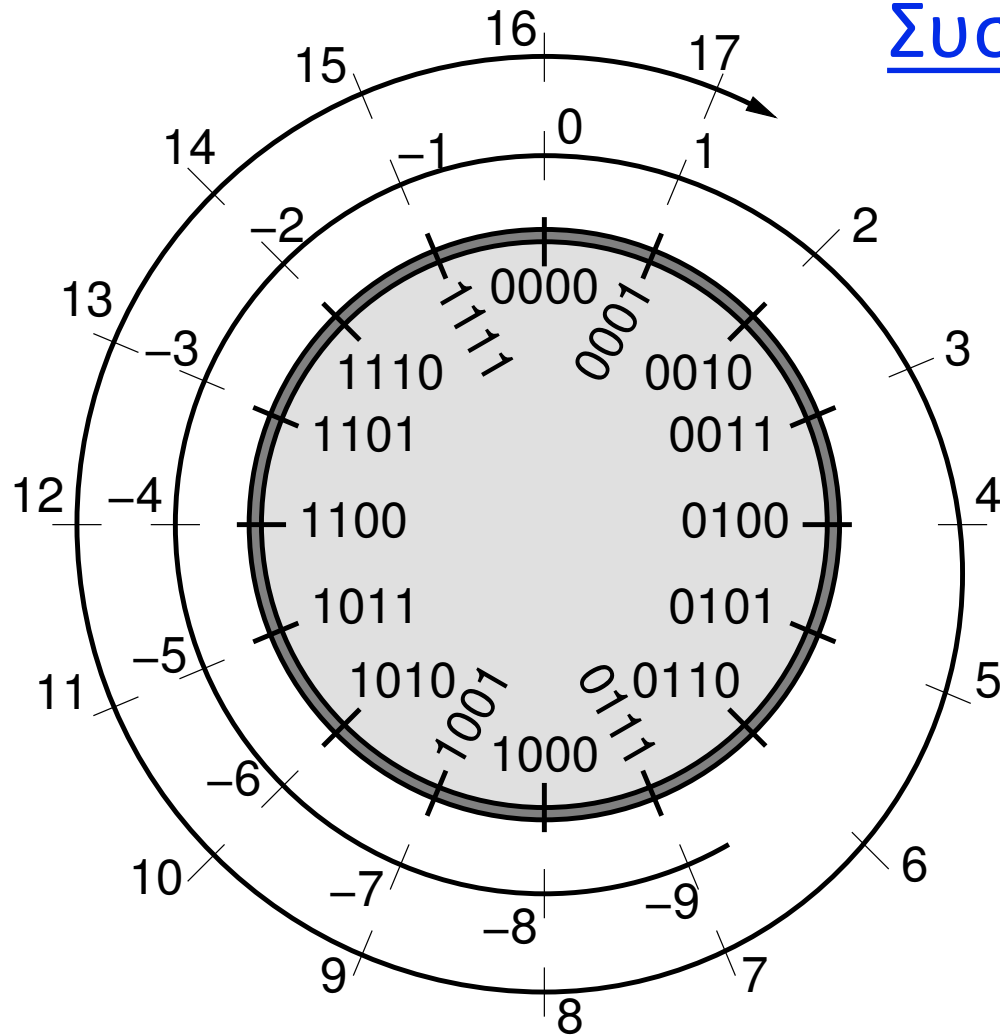
Συστροφή – Αρνητικοί



- $5 + 15 - 2^4 = 5 + (-1)$
- Μεγάλοι θετικοί με συστροφή μοιάζουν με αρνητικούς!



Συστροφή και Αρνητικοί Αρ.



- Πρόσθεση mod $2^n =$ συστροφή
- Όπως επεκτείνουμε προς τα δεξιά τον άξονα των αριθμών, μπορούμε να τον επεκτείνουμε και αριστερά, προς τους αρνητικούς αριθμούς