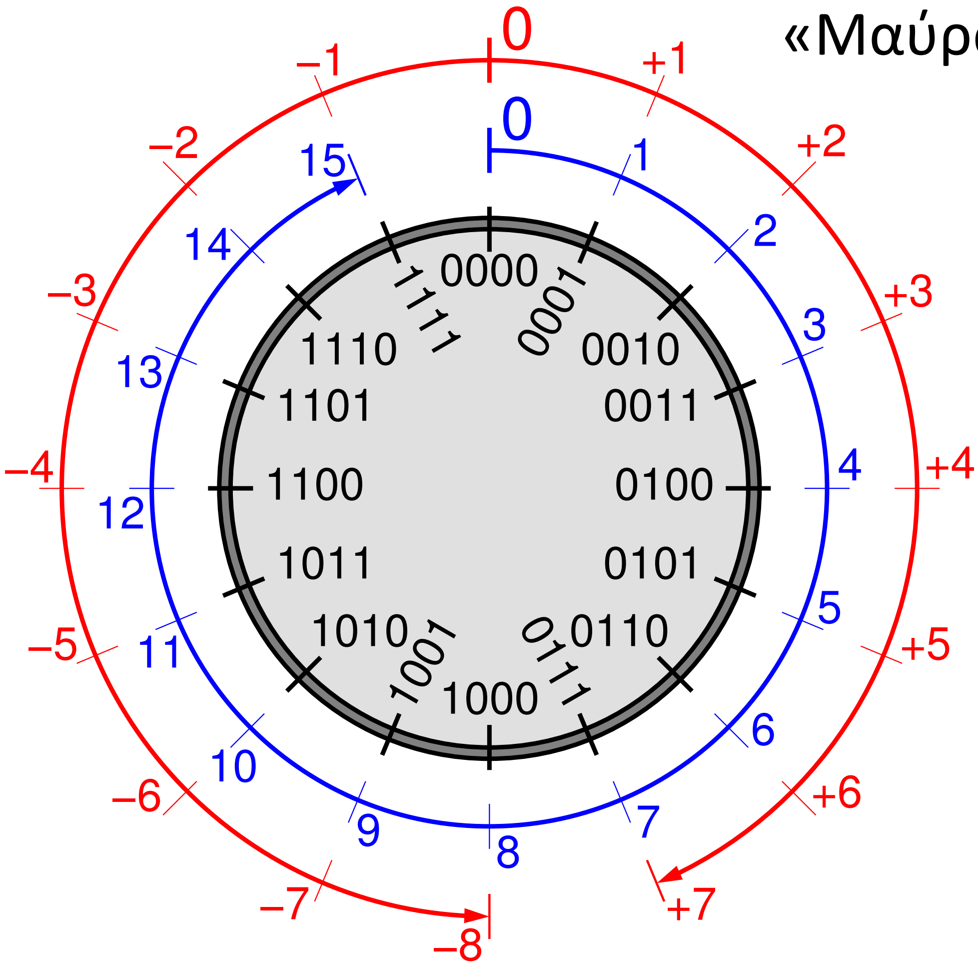
Προσημασμένοι Συμπληρώματος ως προς 2, Πρόσθεσή Προσημασμένων, Αντίθετος Αριθμού, Προσθαφαιρέτες

06b (§ 6.3 - 6.10) – 6-9 Νοε. 2020 – Μανόλης Κατεβαίνης

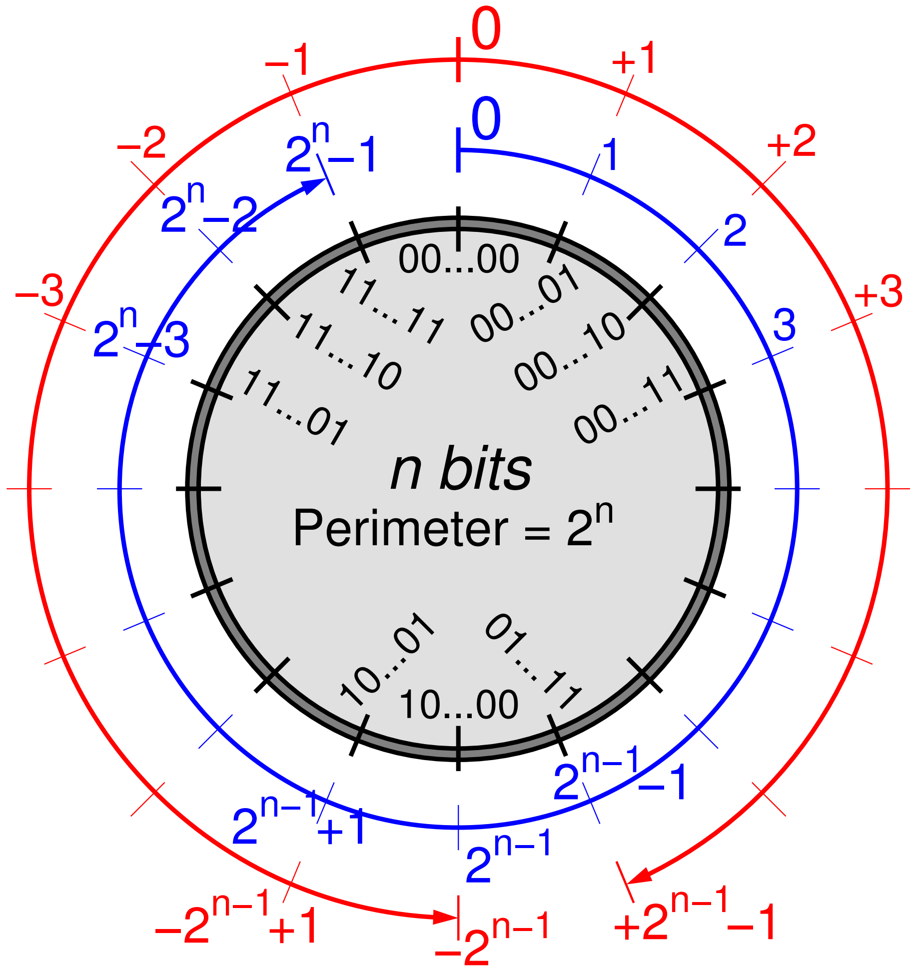
Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Συμπλήρωμα ως προς 2



«Μαύρα» bits: ερμηνεία με δύο κώδικες:

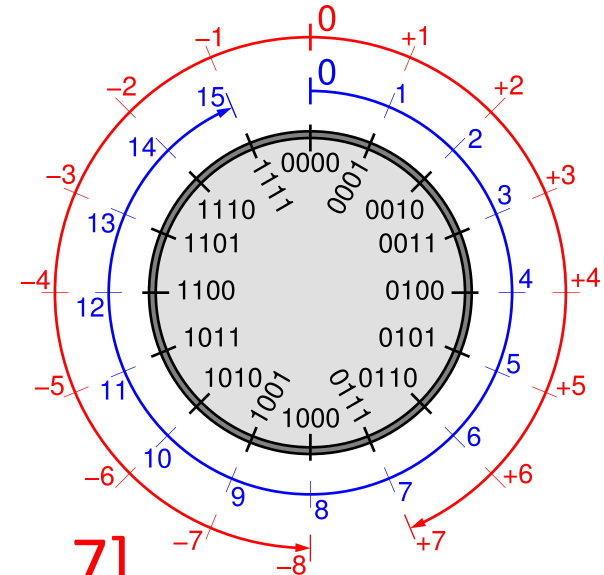
- Unsigned (μη προσημα-σμένοι): θετικοί & μηδέν
- Signed (προσημασμένοι):
- Μισοί θετικοί & μηδέν
  - MS bit == 0
- Μισοί αρνητικοί
  - MS bit == 1
- Μικροί θετικοί: ίδιοι signed
- Μεγάλοι θετικοί: διαφέρουν

Ποιοί Προσημασμένοι Ακέραιοι παρίστανται με *n* bits



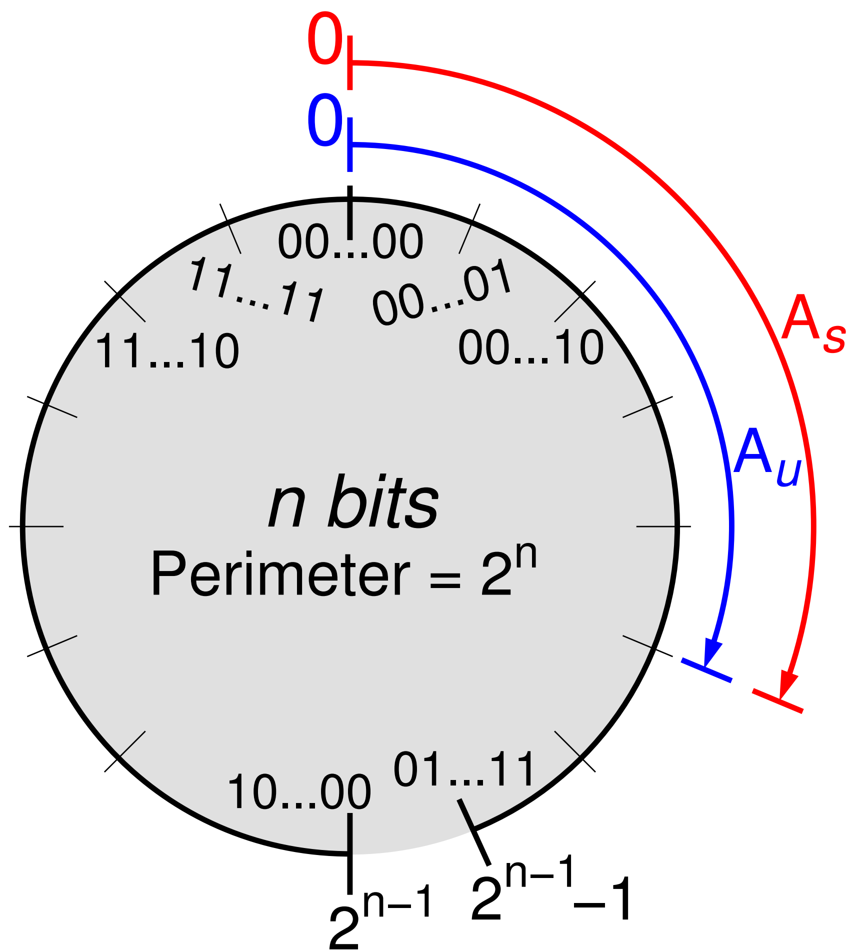
- n bits → 2^n το πλήθος ακερ.
- $0 \leq$ unsigned $\leq 2^n$-1
- $-2^{n-1} \leq$ signed $\leq +2^{n-1}-1$
- Αρνητικοί: μισοί απ' όλους = μισοί από τους $2^n \Rightarrow 2^{n-1}$
- Θετικοί & μηδέν: οι άλλοι μισοί από $2^n \Rightarrow 2^{n-1} \Rightarrow$ από το 0 έως και το 2^{n-1}-1

Πόσα bits χρειάζονται γιά δοθέντα αριθμό;



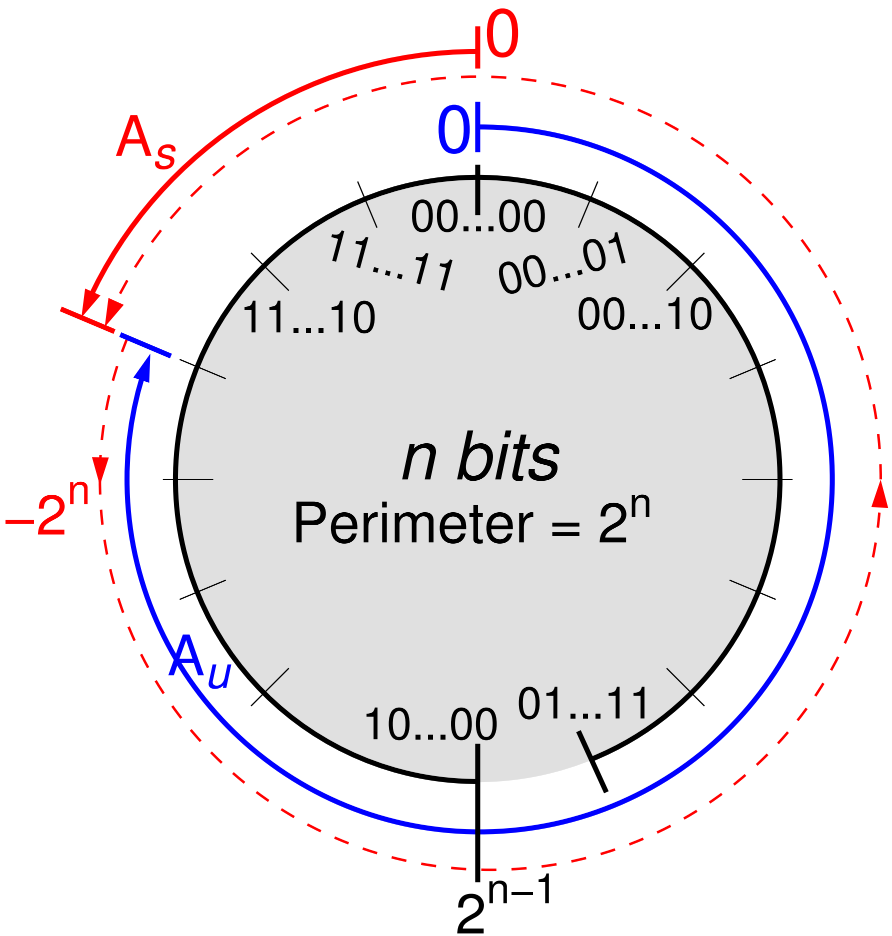
- Ο *unsigned* 12 πόσα bits χρειάζεται;
- 4 bits ⇒ 2^4=16 αριθμοί: [0,… 15]
- Ο *unsigned* 12 ∈ [0,… 15] και γράφεται: 1100
- Ο *signed* 12 πόσα bits χρειάζεται;
- 4 bits ⇒ 2^4=16 αριθμοί: [-8,… -1, 0, 1,… 7]
- 5 bits ⇒ 2^5=32 αριθμοί: [-16,… -1, 0, 1,… +15]
- Ο *signed* 12 ∈ [-16,… +15] και γράφεται: 01100
- Ο *signed* 1100 ποιός είναι; MSbit==1 άρα αρνητικός: -4

Μετατροπή *Unsigned* ↔ *Signed* γιά Θετικούς



- Δοθέντων *n* bits που ερμηνεύονται ως ο *unsigned* A_u με MS bit == 0, δηλ.: $0 \le A_u \le 2^{n-1}-1$
- Τότε αυτά ερμηνεύονται ως ο signed A_s όπου: $A_s = A_u$
- Αντιστρόφως, δοθέντος επιθυμητού signed $A_s \ge 0$, αυτός αναπαρίσταται όπως ο unsigned A_u με *n* bits όπου $A_u = A_s$ και *n* τέτοιο ώστε: $A_s \le 2^{n-1}-1$

Μετατροπή *Unsigned* ↔ *Signed* γιά Αρνητικούς



- Δοθέντων *n* bits που ερμηνεύονται ως ο *unsigned* A_u με MS bit == 1, δηλ: $2^{n-1} \le A_u \le 2^n-1$
- Τότε αυτά ερμηνεύονται ως ο signed A_s όπου: $A_s = A_u-2^n < 0$
- Αντιστρόφως, δοθέντος επιθυμητού signed $A_s<0$, αυτός αναπαρίσταται όπως ο unsigned A_u με *n* bits όπου: $A_u = A_s+2^n$ και *n* τέτοιο ώστε: $-2^{n-1} \le A_s$

Εναλλακτικός Ορισμός Signed 2's Complement

- $B_u = +b_{n-1} \times 2^{n-1} + b_{n-2} \times 2^{n-2} + b_{n-3} \times 2^{n-3} + \ldots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$
- $B_s = -b_{n-1} \times 2^{n-1} + b_{n-2} \times 2^{n-2} + b_{n-3} \times 2^{n-3} + \ldots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$
- Μόνον το MS bit με αρνητικό συντελεστή σημαντικότητας
  - όλα τα υπόλοιπα θετικά – αντίθετα με τη συνήθη παράστ. αρνητ.
- $B_s \geq 0 \Leftrightarrow b_{n-1} = 0 \Rightarrow B_s = B_u$ $\longrightarrow$ άρα ίδιο όπως πριν
- $B_s < 0 \Leftrightarrow b_{n-1} = 1 \Rightarrow$

  $B_s = -2^{n-1} + (b_{n-2} \times 2^{n-2} + b_{n-3} \times 2^{n-3} + \ldots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0) =$

  $= -2^n + 2^{n-1} + (b_{n-2} \times 2^{n-2} + b_{n-3} \times 2^{n-3} + \ldots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0) =$

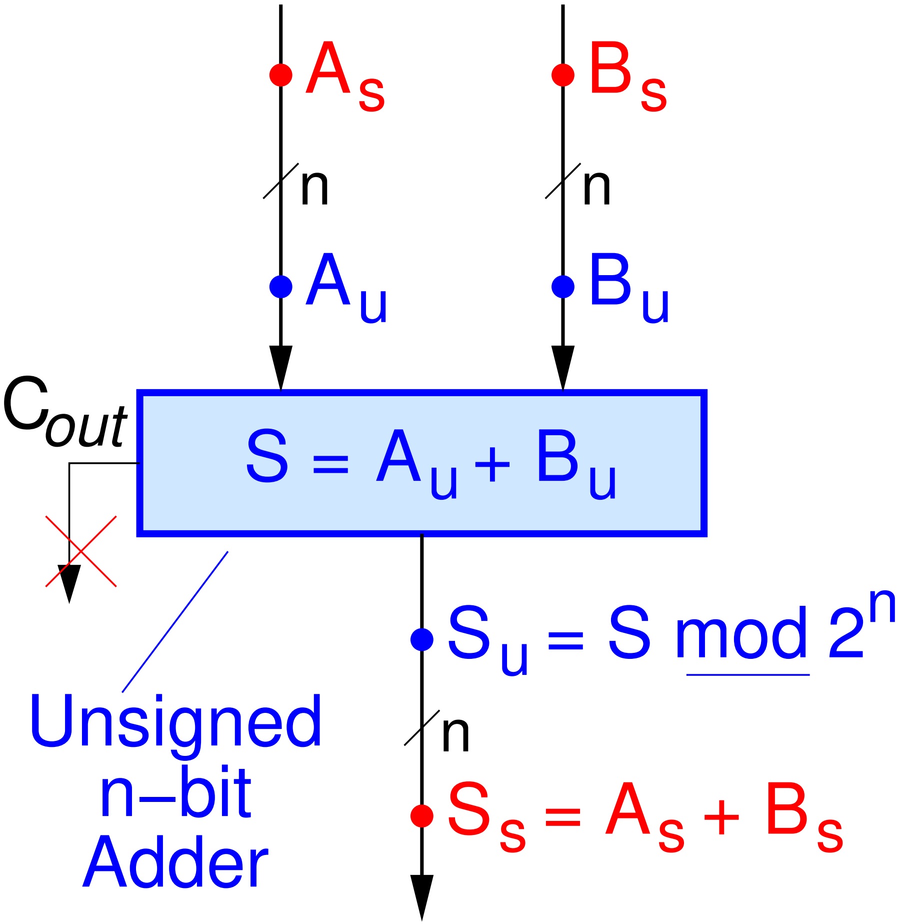
  $= -2^n + B_u$ $\longrightarrow$ άρα ίδιο όπως πριν

Παραδείγματα

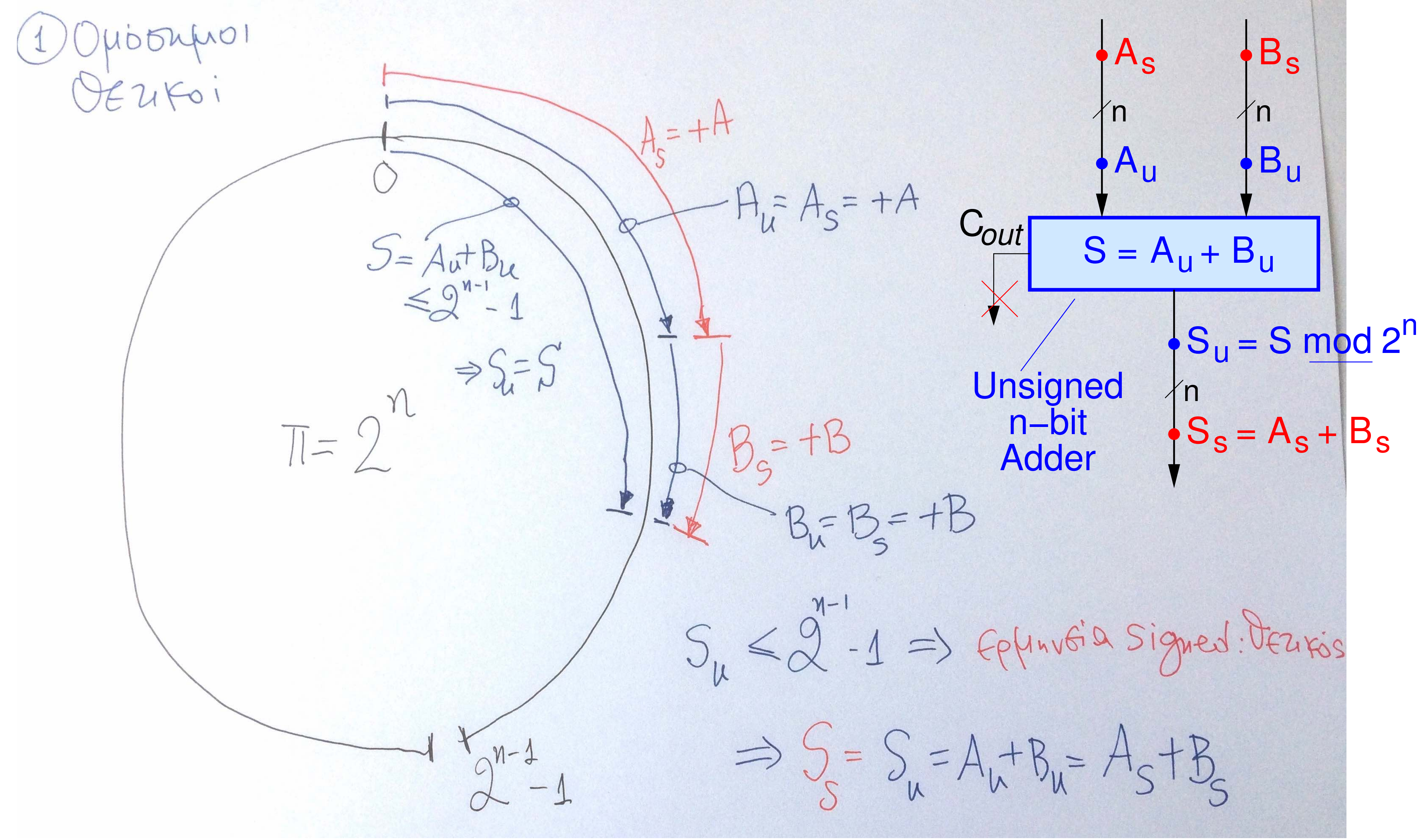
- Να γραφτεί σε 2's complement ο signed **-40**
  - Χρειάζεται 7 bits: $2^7=128$ οι αριθμοί από -64 έως και +63
  - $A_s = -40$ αρνητικός, άρα ίδιος με $A_u = A_s + 2^7 = -40 + 128$

  $\Rightarrow$ $A_u = 128-40 = 88 = 64 + 24 = 64+16+8 \longrightarrow$ 1011000
  - Επαλήθευση ($2^η$ μέθοδος): $1011000 = -2^6+2^4+2^3 = -64+16+8 = -40$
- Ο προσημασμένος **11010** ποιός είναι στο δεκαδικό;
  - Αρχίζει με 1, άρα αρνητικός. Έχει 5 bits άρα «κύκλος» Π = 32
  - $A_u = 11010 = 2^4+2^3+2^1 = 16+8+2 = 26$
  - Επειδή αρνητικός, 5 bits: $A_s = A_u - 32 = 26-32 = -6$
  - Επαλήθευση ($2^η$ μέθ.): $-6 = -16+10 = -16+8+2 = -2^4+2^3+2^1 = 11010$

Πρόσθεση Προσημασμένων Συμπληρώματος του 2

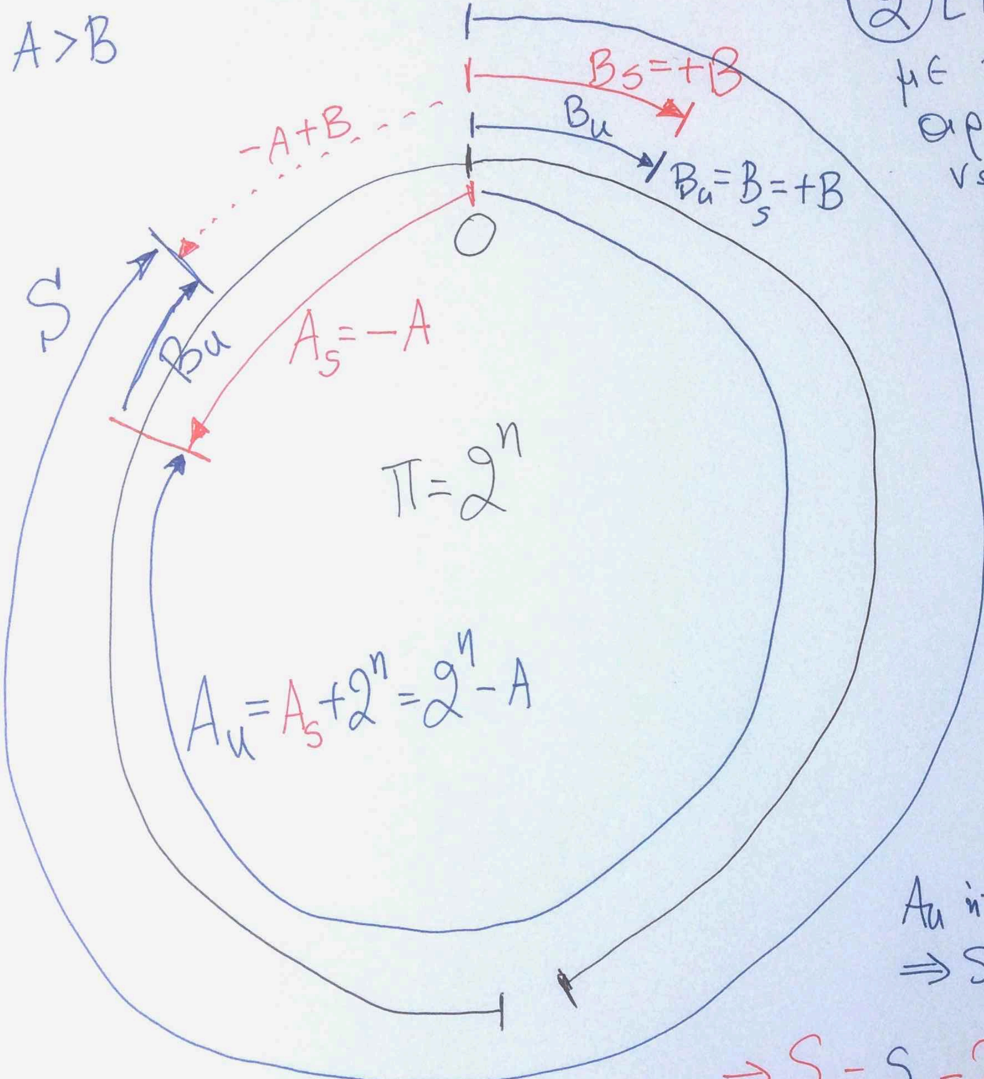


- Με τον ίδιο απαράλλακτο αθροιστή απρόσημων!
- *Πρέπει* το Carry-out να *αγνοηθεί*
- *Εάν* το αλγεβρικό άθροισμα των προσημασμένων χωρά σε *n* bits, τότε & μόνο τότε αυτό θα είναι πάντα σωστό
- Απόδειξη: 4 περιπτώσεις



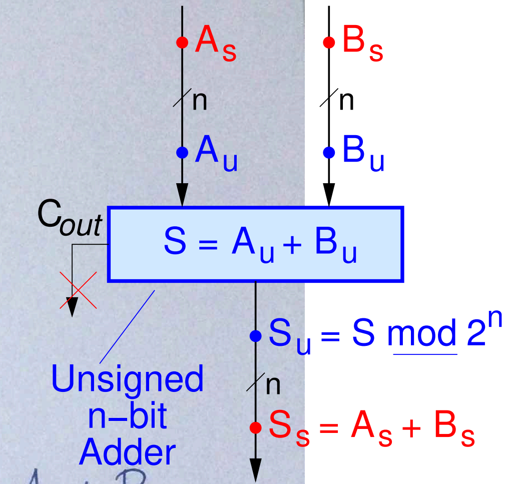
1 Ομόσημοι θετικοί
0
$A_s = +A$
$A_u = A_s = +A$
$S = A_u + B_u \leq 2^{n-1} - 1$
$\Rightarrow S_u = S$
$\Pi = 2^n$
$B_s = +B$
$B_u = B_s = +B$
$2^{n-1} - 1$
A_s
B_s
n
A_u
B_u
C_{out}
$S = A_u + B_u$
$S_u = S \bmod 2^n$
Unsigned n–bit Adder
$S_s = A_s + B_s$
$S_u \leq 2^{n-1} - 1 \Rightarrow$ ερμηνεία signed: θετικός
$\Rightarrow S_s = S_u = A_u + B_u = A_s + B_s$

$A > B$



② Ετερόσημοι

με τον αρνητικό να είναι μεγαλύτερος κατ' απόλυτη τιμή



$$S = A_u + B_u = 2^n - A + B = 2^n - \underbrace{(A-B)}_{\text{θετικό}} < 2^n$$

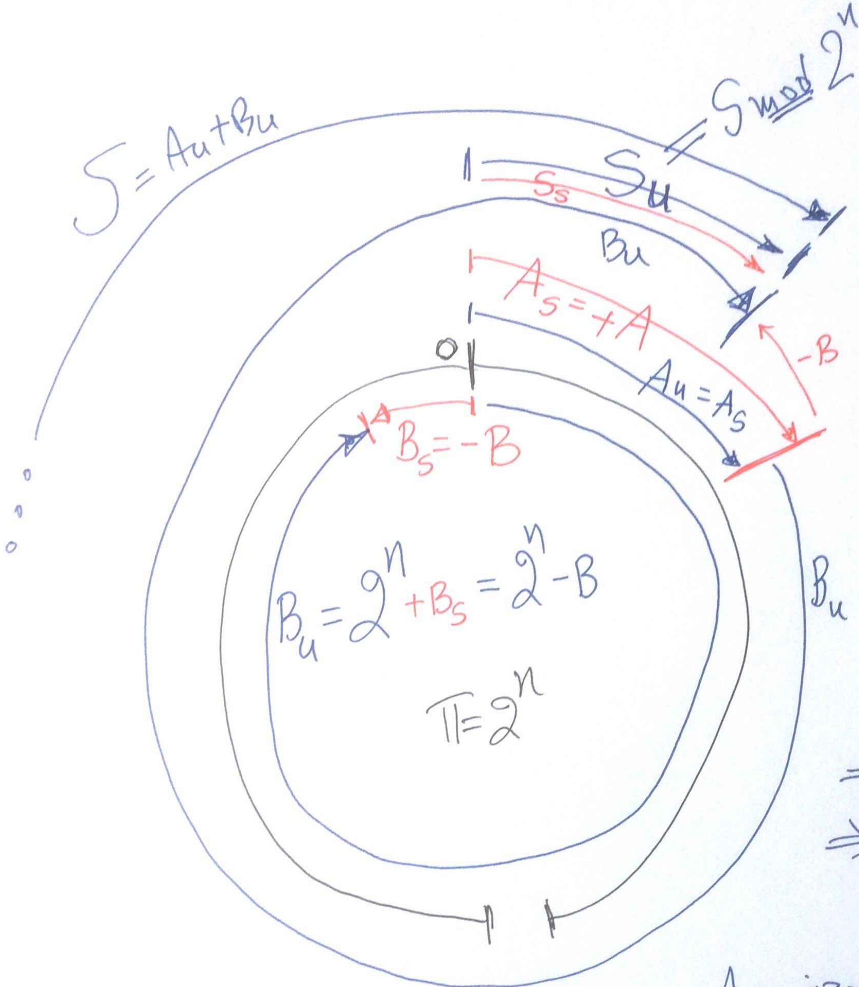
$\Rightarrow$ Carry-out $= 0$

$$\Rightarrow S_u = S = A_u + B_u = 2^n - (A-B)$$

Αν ήταν "αριστερά", κινηθήκαμε δεξιά

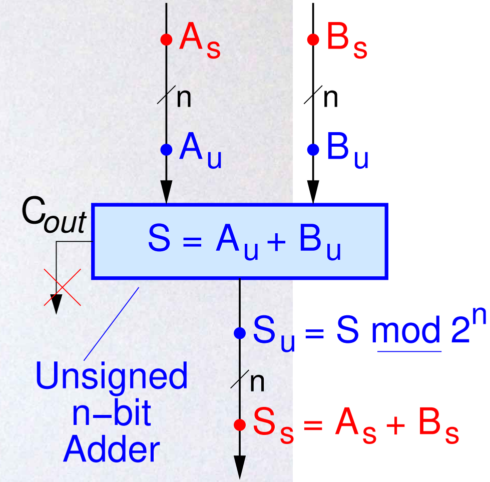
$\Rightarrow S_u$ είναι "αριστερά" $\Rightarrow S_s$: αρνητικός

$$\Rightarrow S_s = S_u - 2^n = 2^n - (A-B) - 2^n = -A + B = A_s + B_s$$



3

Ετερόσημοι με τον θετικό να είναι μεγαλύτερος κατ' απόλυτη τιμή



$$S = A_u + B_u = A + 2^n - B =$$
$$= 2^n + \underbrace{(A-B)}_{\text{θετικό}} \geq 2^n$$

$\Rightarrow$ Carry-out = 1

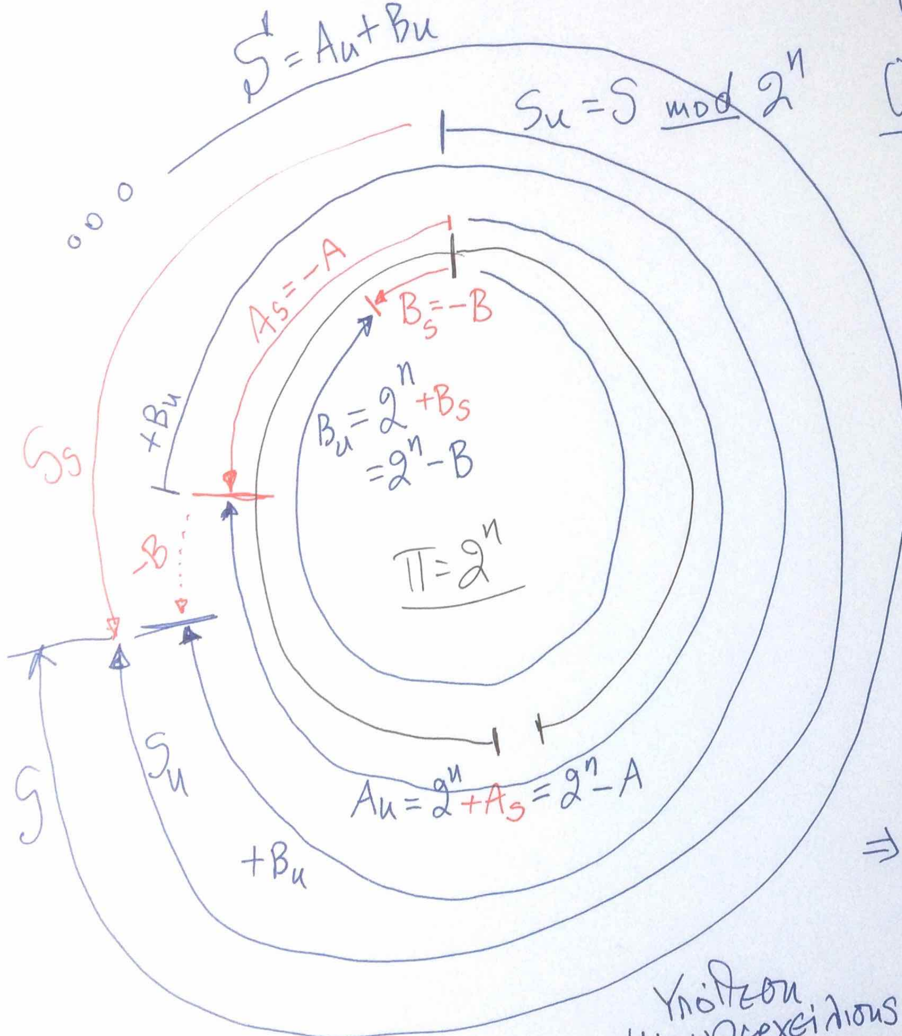
$$\Rightarrow S_u = S \ \underline{mod}\ 2^n = S - 2^n =$$
$$= 2^n + (A-B) - 2^n = A - B$$

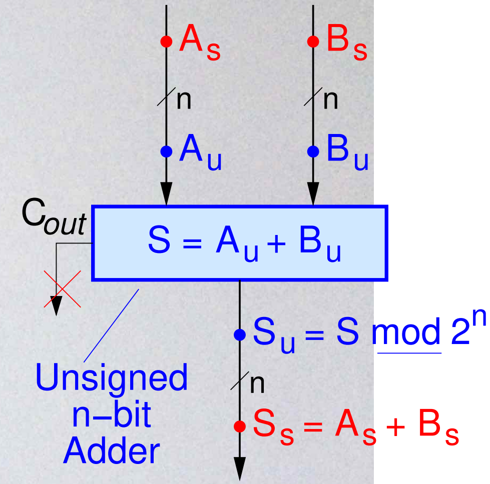
A_u ήταν "δεξιά", κινηθήκαμε "λίγο" αριστερά

$\Rightarrow$ S_u είναι "δεξιά" $\Rightarrow$ S_s : θετικός

$$\Rightarrow S_s = S_u = A - B = A_s + B_s$$

④





Ομόσημοι Αρνητικοί

$A+B = |A_s| + |B_s| \le 2^{n-1}$

$$S = A_u + B_u = 2^n - A + 2^n - B =$$

$$= 2^{n+1} - (\underbrace{A+B})$$

θετικός, μικρότερος από μισό κύκλο

$\Rightarrow$ Carry-Out $= 1$

$$\Rightarrow S_u = S \bmod 2^n = S - 2^n =$$

$$= 2^{n+1} - 2^n - (A+B)$$

$$= 2^n - (A+B)$$

Υπόθεση μη υπερχείλισης $\Rightarrow$ είμαστε "αριστερά" $\Rightarrow S_s$: αρνητικός $\Rightarrow S_s = S_u - 2^n =$

$$= 2^n - (A+B) - 2^n = -A - B = A_s + B_s$$

Παραδείγματα

- (-40)+(+8) = (-32)
  - 7 bits, από διαφάνεια 8
  - (-40) = 1011000
  - (+8) = 0001000
  - 1100000 = -2^6+2^5 = -64+32 = -32

$$
\begin{array}{rr}
 & 1011000 \\
+ & 0001000 \\
\hline
\cancel{(C_{out}=0)} & 1100000
\end{array}
$$

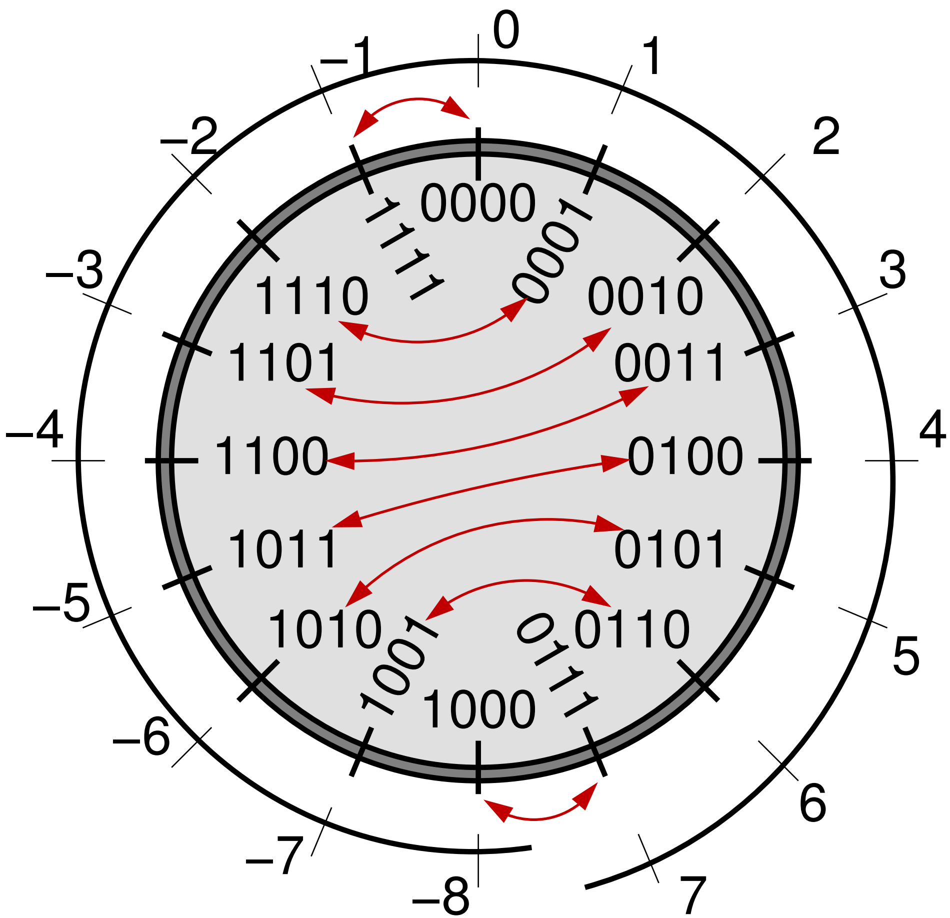
$$
\begin{array}{rr}
 & 1011000 \\
+ & 0101111 \\
\hline
\cancel{(C_{out}=1)} & 0000111
\end{array}
$$

- (-40)+(+47) = (+7)
  - (+47) = 32+8+4+2+1 = 0101111

- (-40)+(-13) = (-53)
  - B_s = (-13) = 115 - 128 = $B_u - 2^7$
  - B_u = 115 = 64+32+16+2+1 = 1110011
  - 1001011 = $-2^6+2^3+2^1+2^0$= -64+11 = -53

$$
\begin{array}{rr}
 & 1011000 \\
+ & 1110011 \\
\hline
\cancel{(C_{out}=1)} & 1001011
\end{array}
$$

Συμπλήρωμα ως προς 1 (bitwise NOT) & ιδιότητες

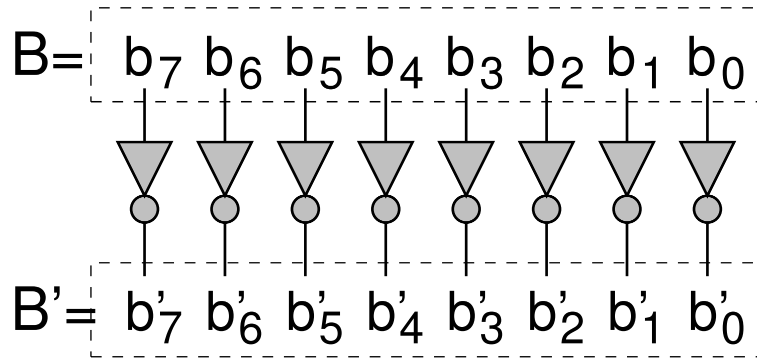


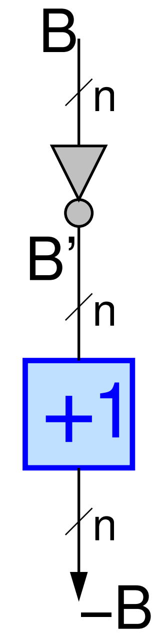
$$
\begin{array}{rl}
B = & 0\;0\;1\;0\;1\;1\;0\;1 \\
B' = & 1\;1\;0\;1\;0\;0\;1\;0 \quad + \\
\hline
B+B' = & 1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1 \;=\; \text{"}-1\text{"}
\end{array}
$$

- «Συμπλήρωμα ως προς 1» (1’s complement) = τα ΟΧΙ των bits, καθένα
- Αθροιζόμενο με τον αρχικό αριθμό δίνει πάντα -1

Αντίθετος Αριθμού = Bitwise NOT συν 1

$$
\begin{array}{rl}
B = & 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\
B' = & 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \quad + \\
\hline
B+B' = & 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \ = \text{"}-1\text{"}
\end{array}
$$





- $B + B' = -1 \Rightarrow (B + B') + 1 = 0$

$\Rightarrow B + (B' + 1) = 0$

  – όταν (B' + 1) δεν προκαλεί υπερχείλιση (βλ. επόμενη διαφ.)

$\Rightarrow$ Ο *<u>αντίθετος</u>* του B είναι ο: $-B = B' + 1$

Παραδείγματα

- Γράψτε τον (-40) σαν signed 2's cmpl.
  - 7 bits, από διαφάνεια 8
  - (+40) = 32+8 = 0101000
  - bitwise NOT: 1010111

  ⇒Αντίθετος -(+40) = -40 = 1011000 (ίδιο με πριν)

$$
\begin{array}{r}
1010111 \\
+ \quad 1 \\
\hline
\cancel{(C_{out}=0)}\ 1011000
\end{array}
$$

Αντίθετος του (-7) = 1001

NOT = 0110

$$
\begin{array}{r}
0110 \\
+ \quad 1 \\
\hline
0111 = +7
\end{array}
$$

Αντίθετος του (+7) = 0111

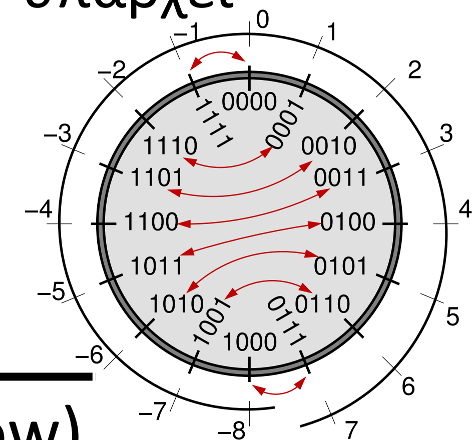
NOT = 1000

$$
\begin{array}{r}
1000 \\
+ \quad 1 \\
\hline
1001 = -7
\end{array}
$$

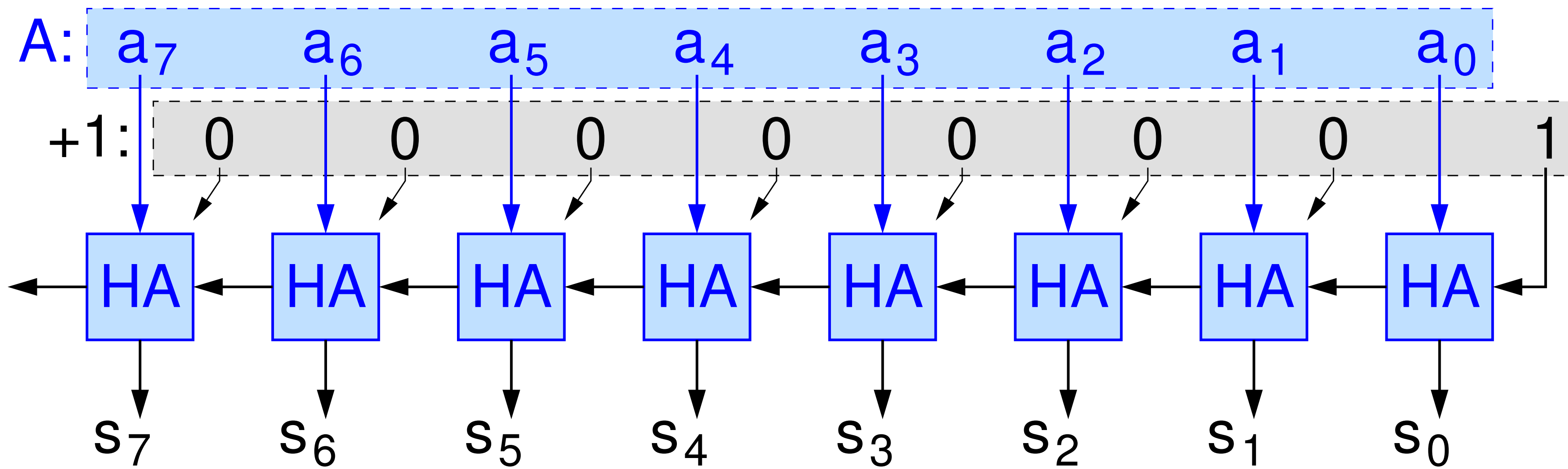
Αντίθετος του -8 δεν υπάρχει (-8) = 1000

NOT = 0111

$$
\begin{array}{r}
0111 \\
+ \quad 1 \\
\hline
1000 = -8 \text{ (overflow)}
\end{array}
$$

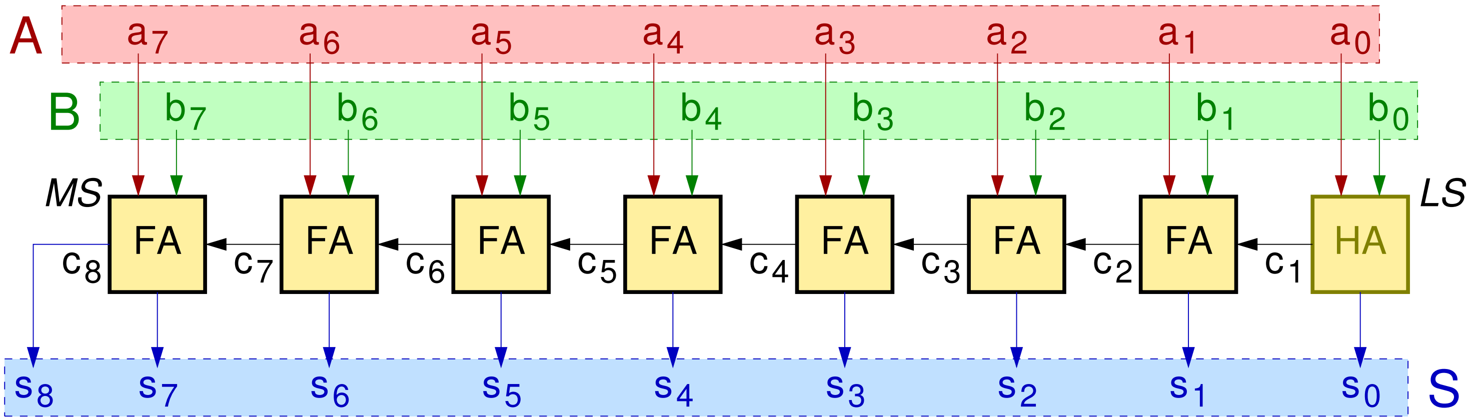


Αυξητής (Incrementor) (+1) μέσω Ημιαθροιστών μόνο

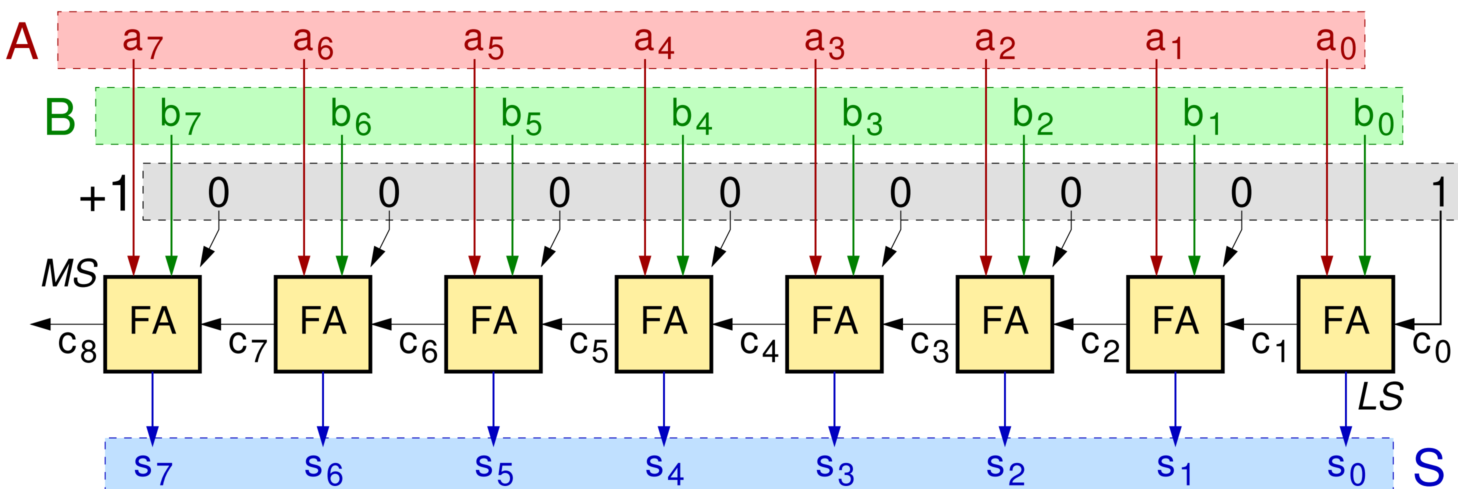


- Τα μηδενικά περιττό να προστεθούν
- Μόνον το LS bit έχει δεύτερο προσθετέο ≠ 0
  - εκείνο ακριβώς το bit που *δεν* έχει κρατούμενο εισόδου
- Σε όλα τα bits αρκεί Ημιαθροιστής (Half Adder – HA)

A+B+1: αρκεί ένας μόνον Αθροιστής (με FA's παντού)

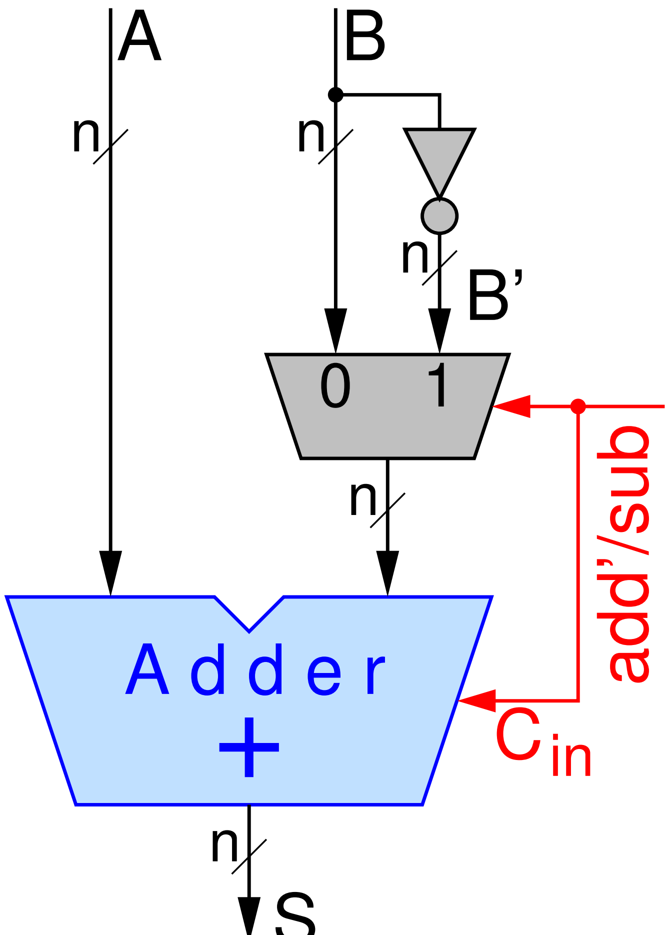


Κλασικός Αθροιστής δύο αριθμών, A+B



A+B+1: αρκεί απλώς ο δεξιός HA να γίνει FA

Κύκλωμα Προσθαφαιρέτη



Όταν add'/sub = 0, τότε:

- Δεύτερη είσοδος αθροιστή = B
- $C_{in} = 0$

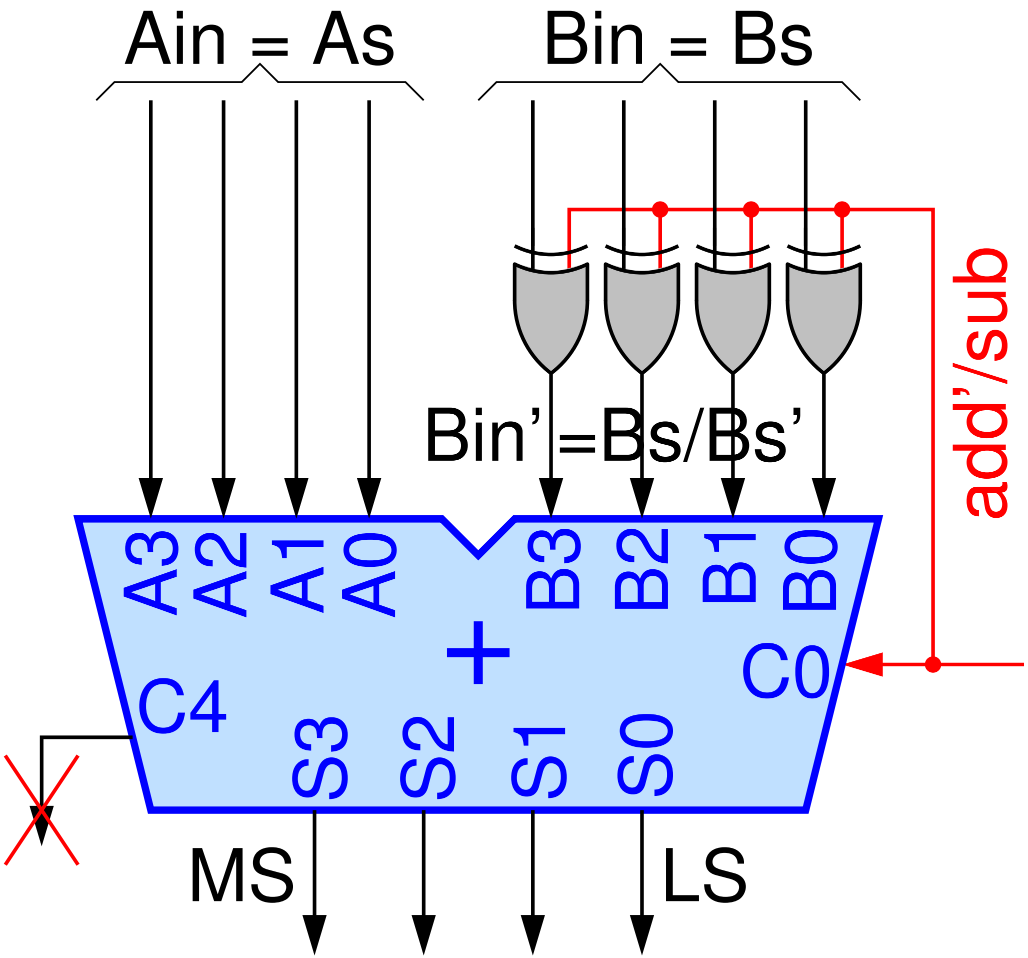
$\Rightarrow S = A + B$

Όταν add'/sub = 1, τότε:

- Δεύτερη είσοδος αθροιστή = B'
- $C_{in} = 1$

$\Rightarrow S = A + B' + 1 = A + (-B) = A\text{-}B$

Παρατήρηση: επιλεκτική αντιστροφή με XOR



- Αντί πολυπλέκτη, γίνεται και με:
- B **XOR** 0 = B
- B **XOR** 1 = B’

XOR		B: 0	B: 1
A	0	0	1
A	1	1	0