ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τελική Εξέταση

- **ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ**
- **Υπολογίστε όλες τις απαντήσεις σας με ακρίβεια 3ου δεκαδικού ψηφίου, όπου απαιτείται.**
- **Μπορείτε να αποχωρήσετε οποτεδήποτε θέλετε, αφού παραδώσετε κόλλες και θέματα.**
- **Αιτιολογήστε ΠΛΗΡΩΣ τις απαντήσεις σας. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή τσέπης.**
- **ΟΤΙΔΗΠΟΤΕ γράψετε πάνω στις κόλλες των εκφωνήσεων ΔΕ θα αξιολογηθεί.**
- **Κάνετε/αντιγράψτε ΣΧΗΜΑΤΑ και εξηγήστε με ΛΟΓΙΑ τι κάνετε!**
- **Συνολικές μονάδες αυτής της εξέτασης:** 110**. Αριστα:** 100.

1. **Θέμα 1ο: Κλασική Μηχανική - 25 μονάδες**
Είστε μέλος της Ομάδας Διάσωσης Πι.Τσι.Κέι. Αποστολή σας: να σπρώξετε ένα κουτί με προμήθειες κατά μήκος μιας πλαγιάς σταθερής κλίσης θ, ξεκινώντας από τη βάση της, ώστε αυτό να ολισθήσει και να φτάσει σε έναν παγιδευμένο σκιέρ σε κατακόρυφο ύψος h από τη βάση της πλαγιάς. Η πλαγιά είναι αρκετά γλιστερή αλλά υπάρχει κάποια μικρή τριβή, με συντελεστή τριβής ολισθήσεως ίσο με μ_k μεταξύ της πλαγιάς και του κουτιού. Δείξτε ότι η *ελάχιστη* ταχύτητα με την οποία πρέπει να "φύγει" το κουτί από τη βάση της πλαγιάς ώστε να φτάσει (οριακά, με μηδενική ταχύτητα) στον παγιδευμένο σκιέρ δίνεται από τη σχέση

$$u_i = \sqrt{2gh\left(1 + \frac{\mu_k}{\tan(\theta)}\right)} \tag{1}$$

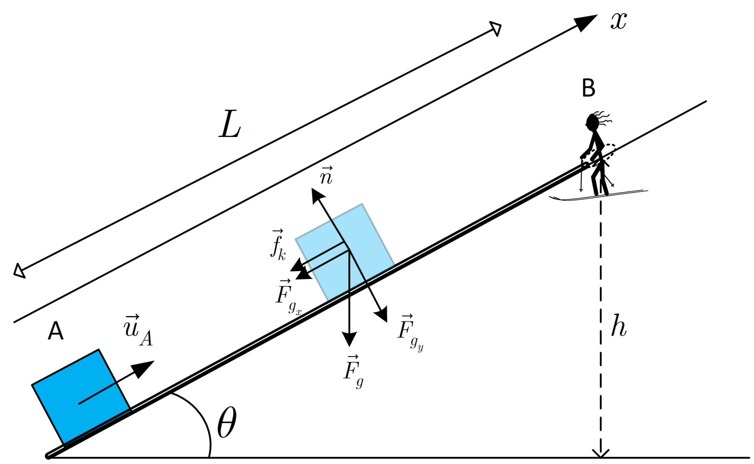
Πως θα αλλάξει η απάντησή σας αν η πλαγιά είναι λεία (απουσία τριβών);

Λύση:
Δείτε το Σχήμα 1. Θεωρούμε σύστημα αξόνων xy με τον άξονα $x'x$ παράλληλο στην πλαγιά, με φορά προς την κορυφή της πλαγιάς. Το κουτί εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρνητική επιτάχυνση. Θεωρούμε ως σύστημα το $\{$κουτί$\}$. Οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό φαίνονται στο Σχήμα 1. Ισχύει το ΘΜΚΕ-Ε στη διαδρομή Α $\rightarrow$ Β.

$$\Delta K = \sum W_{ext} \tag{2}$$
$$K_B - K_A = W_n + W_{F_{gy}} + W_{F_{gx}} + W_{f_k} \tag{3}$$
$$0 - \frac{1}{2}mu_A^2 = 0 + 0 + F_{gx}L\cos(\pi) + f_kL\cos(\pi) \tag{4}$$
$$-\frac{1}{2}mu_A^2 = -mg\sin(\theta)L - \mu_k nL \tag{5}$$

Το κουτί ισορροπεί στον άξονα $y'y$. Ισχύει ο 1ος νόμος Newton.

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_{g_y} = \vec{0} \Longrightarrow n - F_{g_y} = 0 \Longleftrightarrow n = F_{g_y} = mg\cos(\theta) \tag{6}$$



Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 1.*

και αντικαθιστώντας

$$-\frac{1}{2}mu_A^2 = -mg\sin(\theta)L - \mu_k nL \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2}mu_A^2 = -mg\sin(\theta)L - \mu_k mg\cos(\theta)L \tag{8}$$

$$u_A^2 = 2g\sin(\theta)L + 2\mu_k g\cos(\theta)L \tag{9}$$

και από το σχήμα

$$\sin(\theta) = \frac{h}{L} \Longrightarrow L = \frac{h}{\sin(\theta)} \tag{10}$$

Οπότε

$$u_A = \sqrt{2g\sin(\theta)\frac{h}{\sin(\theta)} + 2\mu_k g\cos(\theta)\frac{h}{\sin(\theta)}} = \sqrt{2gh\left(1+\frac{\mu_k}{\tan(\theta)}\right)} \tag{11}$$

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με νόμους Newton και εξισώσεις κινηματικής.

Απουσία τριβής σημαίνει ότι ο συντελεστής μ_k θα είναι μηδέν, και άρα

$$u_A = \sqrt{2gh} \tag{12}$$

2. **Θέμα 2ο: Κυματική - 10 μονάδες**
Μια σειρήνα εκπέμπει ήχο συχνότητας $f = 1000$ Hz και κινείται απομακρυνόμενη από σας και προς την πλαγιά ενός λόφου με ταχύτητα $u_s = 10$ m/s. Θεωρήστε την ταχύτητα του ήχου στον αέρα ίση με $u = 344$ m/s.

(αʹ) **(5 μ.)** Ποιά η συχνότητα που αντιλαμβάνεστε κατευθείαν από τη σειρήνα;

(βʹ) **(5 μ.)** Ποιά η συχνότητα που αντιλαμβάνεστε όταν το ηχητικό κύμα ανακλάται από την πλαγιά και επιστρέφει πίσω στο αυτί σας;

Λύση:

(αʹ) Η συχνότητα που ακούμε ως ακίνητος παρατηρητής από απομακρυνόμενη πηγή θα είναι

$$f' = \frac{u+0}{u+u_s}f = 971.75 \text{ Hz} \tag{13}$$

(β΄) Η συχνότητα που ακούμε όταν ανακλάται το ηχητικό κύμα στην πλαγιά ισούται με τη συχνότητα που ακούει κάποιος που βρίσκεται ακίνητος στην πλαγιά, τον οποίο και προσεγγίζει η σειρήνα. Οπότε

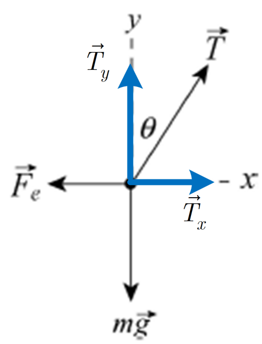
$$f' = \frac{u+0}{u-u_s} f = 1029.94 \text{ Hz} \tag{14}$$

3. **Θέμα 3ο: Κλασική Μηχανική και Ηλεκτρικές Δυνάμεις - 15 μονάδες**
Στο Σχήμα 3(a), δυο σημειακές φορτισμένες σφαίρες μάζας m και φορτίου q η καθεμιά, κρέμονται από μη αγώγιμο νήμα μήκους L. Δείξτε ότι η απόσταση μεταξύ των φορτίων, x, που πρέπει να βρίσκονται ώστε να ισορροπούν δίνεται από τη σχέση

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3} \tag{15}$$

Θεωρήστε ότι $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ και θεωρήστε ότι η γωνία θ είναι τόσο μικρή ώστε να ισχύει η προσέγγιση $\tan(\theta) \approx \sin(\theta)$.

Λύση:
Αναλύοντας τις δυνάμεις πάνω στο αριστερό εκ των φορτίων, έχουμε τις δυνάμεις του Σχήματος 2. Θεωρούμε ως θετικές φορές των αξόνων μας τις συμβατικές (πάνω και δεξιά). Αναλύουμε την τάση του νήματος $\vec{T}$ σε δυο κάθετες



Σχήμα 2: *Δυνάμεις Θέματος 2.*

μεταξύ τους συνιστώσες, $\vec{T}_x$ και $\vec{T}_y$. Τα σώματα θέλουμε να ισορροπούν, δηλ. από τον 1ο νόμο του Newton στους δυο άξονες θα έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{T}_x + \vec{F}_e = \vec{0} \tag{16}$$

$$T_x - F_e = 0 \iff T\sin(\theta) = k_e \frac{q^2}{x^2} \tag{17}$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{T}_y + m\vec{g} = \vec{0} \tag{18}$$

$$T_y - mg = 0 \iff T\cos(\theta) = mg \tag{19}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δυο εξισώσεις έχουμε

$$\tan(\theta) = k_e \frac{q^2}{mgx^2} \tag{20}$$

Θεωρώντας την προσέγγιση

$$\tan(\theta) \approx \sin(\theta) \tag{21}$$

και από την τριγωνομετρία του σχήματος ισχύει

$$\sin(\theta) = \frac{x}{2L} \tag{22}$$

οπότε

$$\frac{x}{2L} = k_e \frac{q^2}{mgx^2} \Longleftrightarrow x^3 = \frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg} \Longleftrightarrow x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3} \tag{23}$$

4. **Θέμα 4ο: Ηλεκτρικά Δυναμικά - 30 μονάδες**
Στο Σχήμα 3(b) βλέπετε μια θετικά φορτισμένη ράβδο με φορτίο Q και μήκος $L/2$, γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ, η οποία ενώνεται με μια αρνητικά φορτισμένη ράβδο με φορτίο $-Q$ και μήκος $L/2$, επίσης γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ. Θεωρήστε σημείο P σε απόσταση d από τις ράβδους όπως στο σχήμα.

(α') **(5 μ.)** Δείξτε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P ισούται με μηδέν.
<u>Hint:</u> **ΔΕ** χρειάζεται να χρησιμοποιήσετε ολοκληρώματα.

(β') **(20 μ.)** Δείξτε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P λόγω της **δεξιάς**, **θετικά φορτισμένης ράβδου**, δίνεται ως

$$V_{P_+} = k_e \lambda \ln\left(\frac{\sqrt{(L/2)^2 + d^2} + L/2}{d}\right) \tag{24}$$

Σας δίνεται η σχέση

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + d^2})\Big|_{x=a}^{x=b} \tag{25}$$

(γ') **(5 μ.)** Δείξτε ότι αν $L/2 \gg d$, τότε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P λόγω της δεξιάς, θετικά φορτισμένης ράβδου, δίνεται ως

$$V_{P_+} = k_e \lambda \ln\left(\frac{L}{d}\right) \tag{26}$$

<u>Λύση:</u>

(α') Το σημείο P βρίσκεται στη μεσοκάθετο της συνολικής, θετικής και αρνητικής, ράβδου, σε απόσταση d από αυτή. Έστω απειροστά μικρό φορτίο $dq_l = -dq$ της αριστερής ράβδου. Το δυναμικό στο σημείο P εξ αιτίας αυτού του φορτίου θα είναι

$$dV_{left} = k_e \frac{-dq}{r} \tag{27}$$

με r την απόσταση του φορτίου dq_l και του σημείου P. Έστω απειροστά μικρό φορτίο $dq_r = dq$ της δεξιάς ράβδου, συμμετρικό ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διαπερνά την μεσοκάθετο με το φορτίο dq_l. Το δυναμικό στο σημείο P εξ αιτίας αυτού του φορτίου θα είναι

$$dV_{right} = k_e \frac{dq}{r} \tag{28}$$

με r την απόσταση του φορτίου dq_r και του σημείου P. Το συνολικό δυναμικό εξ αιτίας των δυο αυτών φορτίων θα είναι

$$dV = dV_{left} + dV_{right} = k_e \frac{-dq}{r} + k_e \frac{dq}{r} = 0 \tag{29}$$

Οποιαδήποτε αντίστοιχα συμμετρικά φορτία θα δίνουν συνολικό δυναμικό μηδέν, άρα το συνολικό δυναμικό εξ αιτίας των δυο φορτισμένων ράβδων στο σημείο P θα είναι μηδέν.

(β') Έστω απειροστά μικρό φορτίο dq μήκους dx της δεξιάς, θετικά φορτισμένης ράβδου, σε απόσταση x από την αρχή της ράβδου (αριστερό άκρο), και σε απόσταση r από το σημείο P. Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο αυτό εξ αιτίας του φορτίου αυτού θα είναι

$$dV_P = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{dq}{\sqrt{x^2 + d^2}} \tag{30}$$

Η ράβδος είναι ομοιόμορφα φορτισμένη, άρα θα έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda = \frac{Q}{L/2}$, η οποία ισχύει για κάθε τμήμα της, όσο μικρό κι αν είναι, δηλ.

$$\lambda = \frac{dq}{dx} \Longleftrightarrow dq = \lambda dx \tag{31}$$

για το φορτίο στο οποίο συζητάμε. Οπότε

$$dV_P = k_e \lambda \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} \tag{32}$$

Το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P για όλη τη ράβδο θα δίνεται ως (και με τη βοήθεια του ολοκληρώματος)

$$V_{P_+} = \int dV_P = k_e \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = k_e \lambda \int_0^{L/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} \tag{33}$$

$$= k_e \lambda \ln(x + \sqrt{x^2 + d^2})\Big|_{x=0}^{x=L/2} = k_e \lambda \ln \left(\frac{\sqrt{(L/2)^2 + d^2} + L/2}{d} \right) \tag{34}$$

(γ΄) Αν $L/2 \gg d \Longrightarrow (L/2)^2 \gg d^2 \Longrightarrow (L/2)^2 + d^2 \approx (L/2)^2$, οπότε

$$V_{P_+} = k_e \lambda \ln \left(\frac{\sqrt{(L/2)^2} + L/2}{d} \right) = k_e \lambda \ln \left(\frac{L}{d} \right) \tag{35}$$

5. **Θέμα 5ο: Ηλεκτρικά Κυκλώματα - 30 μονάδες**

Σας δίνεται το ηλεκτρικό κύκλωμα του Σχήματος 3(c). Βρείτε

(α΄) (**20 μ.**) ότι τα ρεύματα που κυκλοφορούν στο κύκλωμα έχουν τιμές (κατά μέτρο)

$$I_1 = \frac{51}{16}\ \text{A},\ \ I_2 = \frac{57}{16}\ \text{A},\ \ I_3 = \frac{3}{8}\ \text{A} \tag{36}$$

(β΄) (**5 μ.**) τη διαφορά δυναμικού στα άκρα όλων των αντιστατών, καθώς και

(γ΄) (**5 μ.**) την ισχύ που παραδίδεται στον κάθε αντιστάτη.

Λύση:

(α΄) Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στον αριστερό βρόχο:

$$12 - 4I_1 - 2I_3 = 0 \Longleftrightarrow 4I_1 + 2I_3 = 12 \tag{37}$$

Όμοια για τον δεξιό βρόχο:

$$15 - 4I_2 + 2I_3 = 0 \Longleftrightarrow 4I_2 - 2I_3 = 15 \tag{38}$$

Σε καθέναν απ'τους δυο κόμβους ισχύει ο 1ος κανόνας του Kirchhoff, δηλ.

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{39}$$

Λύνοντας το σύστημα καταλήγουμε στις τιμές

$$I_1 = \frac{51}{16}\ \text{A},\ \ I_2 = \frac{57}{16}\ \text{A},\ \ I_3 = -\frac{3}{8}\ \text{A} \tag{40}$$

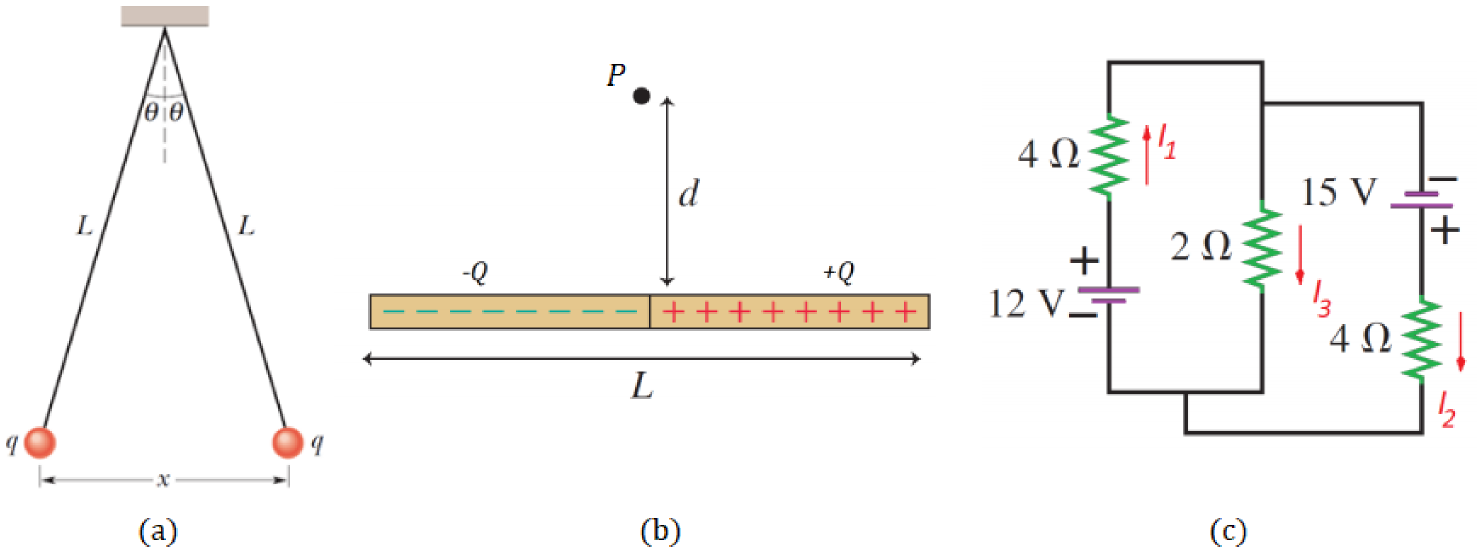
Το I_3 θα έπρεπε να έχει αντίθετη φορά απ' αυτή που υποθέσαμε στο σχήμα, όμως το μέτρο του θα είναι πράγματι $I_3 = \frac{3}{8}$ A.

(β΄) Για κάθε αντιστάτη

- $\Delta V_1 = I_1 R_1 = \frac{51}{16} \cdot 4 = \frac{51}{4}$ V
- $\Delta V_2 = I_2 R_2 = \frac{57}{16} \cdot 4 = \frac{57}{4}$ V
- $\Delta V_3 = I_3 R_3 = \frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3}{4}$ V

(γ΄) Για κάθε αντιστάτη

- $P_1 = I_1^2 R_1 = \left(\frac{51}{16}\right)^2 \cdot 4 = 40.64$ W
- $P_2 = I_2^2 R_2 = \left(\frac{57}{16}\right)^2 \cdot 4 = 50.766$ W
- $P_3 = I_3^2 R_3 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot 2 = 0.2812$ W



Σχήμα 3: *Σχήματα.*