ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τελική Εξέταση

Ονοματεπώνυμο: ____

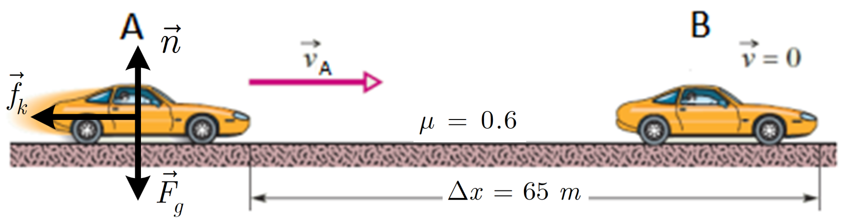
Α.Μ: ______________ Τμήμα: ______________________________________

Με άριστα το 10, με πόσο θα βαθμολογούσατε την προετοιμασία σας για αυτήν την εξέταση; ________

- **ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ**
- **Υπολογίστε όλες τις απαντήσεις σας με ακρίβεια 3ου δεκαδικού ψηφίου.**
- **Τα θέματα επιστρέφονται μαζί με τις απαντήσεις σας.**
- **Μπορείτε να αποχωρήσετε οποτεδήποτε θέλετε, αφού παραδώσετε κόλλες και θέματα.**
- **Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή τσέπης.**
- **Όπου χρειάζεται, θεωρήστε** $g = 9.8$ $\mathbf{m/s^2}$
- **Διαβάστε προσεκτικά όλα τα θέματα και ξεκινήστε από αυτό που γνωρίζετε καλύτερα.**
- **Αντιγράψτε τα σχήματα στις κόλλες σας αν χρειαστεί να αναφερθείτε σε αυτά.**
- **ΟΤΙΔΗΠΟΤΕ γράψετε πάνω στις κόλλες των εκφωνήσεων δε θα αξιολογηθεί.**
- **Συνολικές μονάδες αυτής της εξέτασης:** 120**. Αριστα:** 100**.**

1. **Θέμα 1ο: Κλασική Μηχανική I - 25 μονάδες**
Καλείστε - ξανά - ως ειδικός μάρτυρας σε ένα δικαστήριο για παράβαση ορίου ταχύτητας. Το προεδρείο σας δίνει τα παρακάτω στοιχεία: ο κατηγορούμενος οδηγούσε σε περιοχή με ανώτατο όριο ταχύτητας 80 km/h. Όταν τον πλησίασε περιπολικό, πάτησε τα φρένα του και σταμάτησε με σταθερή επιτάχυνση. Μετρήσεις στα ελαστικά του και στο οδόστρωμα έδειξαν ότι όταν τα ελαστικά του "κλείδωσαν", το αυτοκίνητο ταξίδεψε 65 m πριν έρθει σε ακινησία, και ότι το οδόστρωμα είχε συντελεστή τριβής ολισθήσεως ίσο με 0.6. Ο κατηγορούμενος έλαβε κλήση για υπερβολική ταχύτητα αλλά δηλώνει αθώος. Τι συμπέρασμα βγάζετε;

Λύση: Αρχικά, τα 80.0 km/h ισούνται με 22.22 m/s. Αυτό είναι το όριο ταχύτητας. Ζητούμε την ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο όταν το πλησίασε το περιπολικό και αναγκάστηκε να πατήσει τα φρένα του. Αν μοντελοποιήσουμε το αυτοκίνητο ως σώμα υπό σταθερή επιτάχυνση, και η κίνησή του θεωρηθεί ευθύγραμμη και προς τα δεξιά (ταυτίζεται με τη θετική φορά), τότε μπορούμε να ορίσουμε ως θέση (Α) τη θέση που πάτησε τα φρένα του και (Β) τη θέση που σταμάτησε, όπως στο Σχήμα 1. Στο αυτοκίνητο ασκούνται οι εξής δυνάμεις στη διαδρομή του: η δύναμη



Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 1.*

του βάρους του, $\vec{F}_g$, η κάθετη δύναμη από το οδόστρωμα, $\vec{n}$, και η τριβή ολισθήσεως, $\vec{f}_k$. Αφού το αυτοκίνητο επιβραδύνει στον άξονα $x'x$ ισχύει ο 2ος νόμος του Newton:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Longleftrightarrow \vec{f}_k = m\vec{a}_x \Longrightarrow -f_k = ma_x \Longrightarrow a_x = -\frac{f_k}{m} \tag{1}$$

Στον άξονα $y'y$, το αυτοκίνητο ισορροπεί, άρα ισχύει ο 1ος νόμος του Newton:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0} \Longrightarrow n - F_g = 0 \Longleftrightarrow n = F_g = mg \tag{2}$$

κι επειδή ξέρουμε ότι

$$f_k = \mu_k n \tag{3}$$

τότε

$$f_k = \mu_k mg \tag{4}$$

Από τη σχέση (1) παίρνουμε λοιπόν

$$a_x = -\frac{\mu_k mg}{m} = -\mu_k g \tag{5}$$

Στη διαδρομή $A \to B$, το αυτοκίνητο βρίσκεται υπό σταθερή επιτάχυνση, άρα

$$u_B^2 = u_A^2 + 2a_x\Delta x \Longleftrightarrow 0 = u_A^2 - 2\mu_k g\Delta x \Longleftrightarrow u_A^2 = 2\mu_k g\Delta x \tag{6}$$

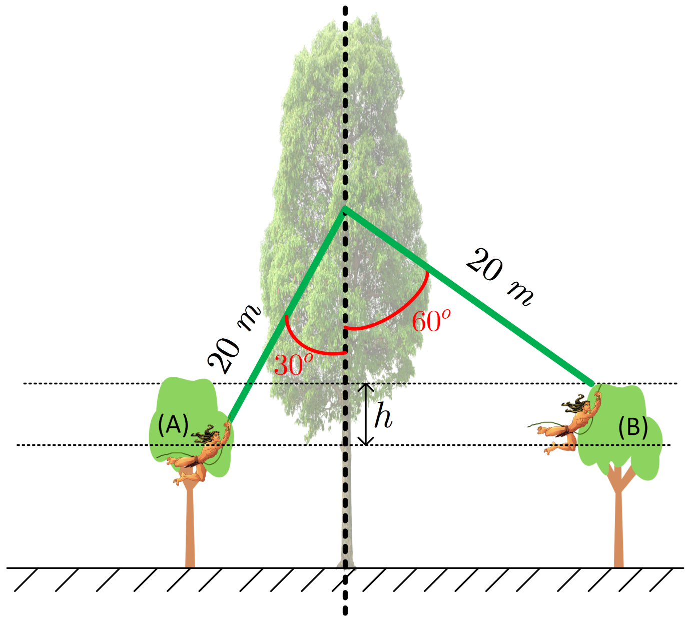
Σύμφωνα με τα στοιχεία,

$$u_A^2 = 2 \cdot 0.6 \cdot 9.8 \cdot 65 = 764.4 \Longrightarrow u_A = 27.64 \text{ m/s} \tag{7}$$

Άρα για να σταματήσει στην απόσταση που μετρήθηκε, θα έπρεπε όταν πάτησε τα φρένα του να κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη του ορίου - συγκεκριμένα με ταχύτητα 99.5 km/h. Ένοχος!

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με ενεργειακά θεωρήματα (ΘΜΚΕΕ, ΑΔΕ).

2. **Θέμα 2ο: Κλασική Μηχανική ΙΙ - 20 μονάδες**
Ο Ταρζάν βρισκεται σε ένα δένδρο και βλέπει απέναντί του την Τζέιν να τον περιμένει, σε άλλο δένδρο. Δεδομένου ότι την τελευταία φορά που βρέθηκε σε αυτή τη θέση, τα πράγματα δεν πήγαν και πολύ καλά, θέλει να είναι πιο προσεκτικός αυτή τη φορά. Αρπάζει την άκρη ενός κλήματος με μήκος 20 μέτρα, το οποίο σχηματίζει γωνία 30 μοιρών με την κατακόρυφο, και αιωρείται προς τα κάτω *με αρχική ταχύτητα* $u_A = 12$ m/s, και στη συνέχεια προς τα πάνω, φτάνοντας τελικά στην αγκαλιά της Τζέιν. Όταν φτάνει στη στιγμή ακριβώς πριν την αγκαλιάσει, το κλήμα σχηματίζει γωνία 60 μοιρών με την κατακόρυφο. Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα και το βάρος του κλήματος, βρείτε αν ο Ταρζάν θα δώσει μια απαλή αγκαλιά στην Τζέιν ή θα τη ρίξει με δύναμη κάτω από το δένδρο της. Με άλλα λόγια, υπολογίστε την ταχύτητα που θα έχει ακριβώς πριν την αγκαλιάσει. Λάβετε υπ' όψη σας ότι η Τζέιν μπορεί να αντέξει ταχύτητα πτώσης πάνω της μέχρι 6.5 m/s. Το Σχήμα 2 θα σας βοηθήσει.



Σχήμα 2: *Σχήμα Θέματος 2.*

Λύση:
Έστω το σύστημα {Ταρζάν, Γη}. Στον Ταρζάν ασκείται η δύναμη του βάρους και η τάση του κλήματος, με την τελευταία να παράγει μηδενικό έργο γιατί είναι πάντα κάθετη στη μετατόπιση. Το σύστημα είναι απομονωμένο και περιλαμβάνει μόνο συντηρητικές δυνάμεις. Ισχύει η ΑΔΜΕ από το σημείο εκκίνησης του Ταρζάν, (Α), ως το σημείο επαφής με την Τζέιν, (Β). Επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας θεωρείται το επίπεδο εκκίνησης του Ταρζάν, h μέτρα κάτω από το σημείο επαφής με την Τζέιν.

$$K_A + U_{g_A} = K_B + U_{g_B} \tag{8}$$
$$\frac{1}{2}mu_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mu_B^2 + mgh \tag{9}$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος,

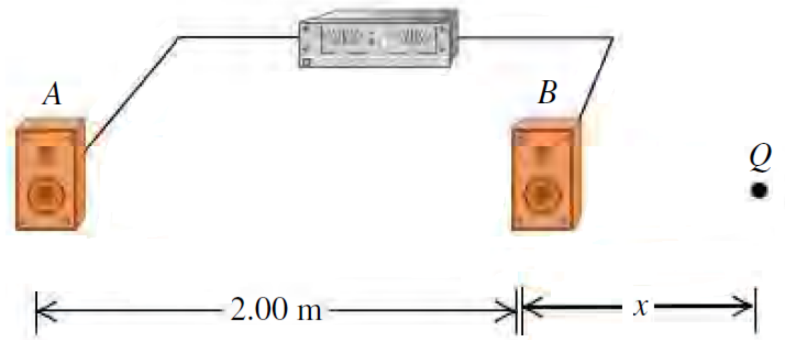
$$h = 20\cos(30^\circ) - 20\cos(60^\circ) = 7.3205 \text{ m} \tag{10}$$

Οπότε

$$u_B^2 = u_A^2 - 2gh \Longrightarrow u_B = \sqrt{u_A^2 - 2gh} = 0.7198 \text{ m/s} \tag{11}$$

Ευτυχώς για την Τζέιν, ο Ταρζάν έκανε καλές προπονήσεις στις αιωρήσεις! :)

3. **Θέμα 3ο: Ηχητικά Κύματα - 20 μονάδες**
Δυο ηχητικές πηγές A και B όπως στο Σχήμα 3 είναι συνδεδεμένες με τον ίδιο ενισχυτή και εκπέμπουν ημιτονοειδή κύματα *σε φάση*. Το ηχείο B βρίσκεται σε απόσταση 2.0 m στα δεξιά του ηχείου A. Θεωρήστε σημείο Q δεξιά από το ηχείο B και κατά μήκος νοητής γραμμής που τα συνδέει, σε απόσταση x από το ηχείο B. Θεωρήστε ότι $u_{sound} = 344$ m/s. Και τα δυο ηχεία εκπέμπουν ηχητικά κύματα που ταξιδεύουν από τα ηχεία προς το σημείο Q.



Σχήμα 3: *Σχήμα Θέματος 3.*

(α΄) **(10 μ.)** Ποιές είναι οι πιθανές συχνότητες f_m που πρέπει να εκπέμπονται από τα ηχεία ώστε να έχουμε στο σημείο Q ενισχυτική συμβολή;

(β΄) **(10 μ.)** Ποιές είναι οι πιθανές συχνότητες f_m που πρέπει να εκπέμπονται από τα ηχεία ώστε να έχουμε στο σημείο Q καταστρεπτική συμβολή;

Λύση:
Η διαφορά διαδρομής Δr στο σημείο Q για τα δυο ηχητικά κύματα είναι

$$\Delta r = |r_B - r_A| = |x - (2 + x)| = |-2| = 2 \text{ m} \tag{12}$$

Οι συχνότητες που μπορεί να εκπέμπονται από τα ηχεία είναι

$$u = \lambda f \iff f = \frac{u}{\lambda} = \frac{344}{\lambda} \tag{13}$$

(α΄) Για να έχουμε ενισχυτική συμβολή στο σημείο Q θα πρέπει

$$\Delta r = m\lambda \iff 2 = m\lambda \iff \lambda = \frac{2}{m}, \ \ m = 1, 2, 3, \cdots \tag{14}$$

και άρα

$$f = \frac{344}{\frac{2}{m}} = \frac{344m}{2} = 172m, \ \ m = 1, 2, 3, \cdots \tag{15}$$

οπότε

$$f_m = 172m = 86 \cdot (2m), \ \ m = 1, 2, 3, \cdots \tag{16}$$

(β΄) Για να έχουμε καταστρεπτική συμβολή στο σημείο Q θα πρέπει

$$\Delta r = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \iff 4 = (2m+1)\lambda \iff \lambda = \frac{4}{2m+1}, \ \ m = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{17}$$

και άρα

$$f = \frac{344}{\frac{4}{2m+1}} = 86(2m+1), \ \ m = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{18}$$

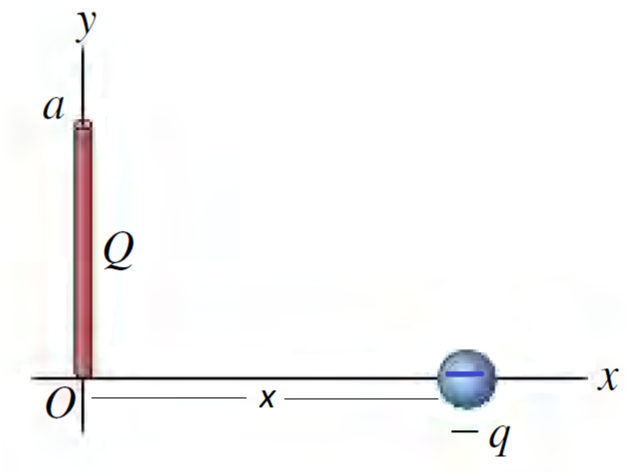
οπότε

$$f_m = 86(2m+1), \ \ m = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{19}$$

Συνολικά, μπορούμε να πούμε ότι σε συχνότητες άρτια πολλαπλάσιες των 86 Hz έχουμε ενισχυτική συμβολή, ενώ σε συχνότητες περιττά πολλαπλάσιες των 86 Hz έχουμε καταστρεπτική συμβολή.

4. **Θέμα 4ο: Ηλεκτρικά Πεδία και Δυναμικά - 30 μονάδες**

Στο Σχήμα 4, μια θετικά φορτισμένη ράβδος με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q βρίσκεται τοποθετημένη στον άξονα $y'y$ ανάμεσα στα σημεία $y = 0$ και $y = \alpha$. Ένα αρνητικά φορτισμένο σημειακό φορτίο βρίσκεται στο θετικό



$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = \left.\frac{y}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{y=c_1}^{y=c_2}$$

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = \left.-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{y=c_1}^{y=c_2}$$

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dy = \left.\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right|_{y=c_1}^{y=c_2}$$

Σχήμα 4: *Σχήμα Θέματος 4.*

ημιάξονα $x'x$, σε απόσταση x από τη συμβολή των αξόνων. Για τα παρακάτω ερωτήματα, σας δίνονται στο σχήμα κάποια έτοιμα ολοκληρώματα για να τα χρησιμοποιήσετε.

(α΄) **(15 μ.)** Δείξτε ότι οι $x-$ και $y-$ συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου λόγω της ράβδου για κάθε σημείο του θετικού ημιάξονα $x'x$ δίνονται ως

$$E_x = \frac{k_e Q}{x}\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} \tag{20}$$

$$E_y = -\frac{k_e Q}{\alpha}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\right) \tag{21}$$

(β΄) **(10 μ.)** Δείξτε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό λόγω της ράβδου για κάθε σημείο του θετικού ημιάξονα $x'x$ δίνεται ως

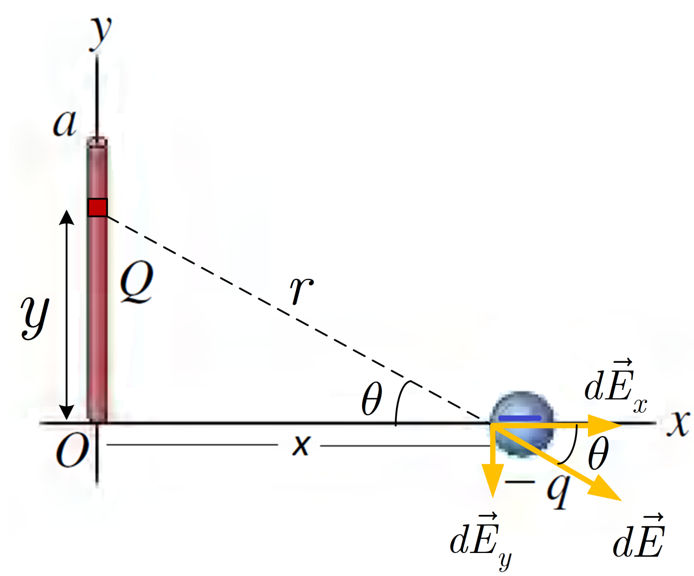
$$V = k_e\frac{Q}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right) \tag{22}$$

(γ΄) **(5 μ.)** Πόσο έργο απαιτείται για να μεταφερθεί από έναν εξωτερικό παρατηρητή το φορτίο $-q$ από το ∞ ως το σημείο που βρίσκεται στο Σχήμα;

Λύση:

(α΄) Έστω απειροστά μικρό τμήμα της ράβδου, dy, απειροστά μικρού φορτίου dq. Λόγω ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου, ισχύει $\lambda = Q/a = dq/dy \Longrightarrow dq = \lambda dy$. Το ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}$ λόγω αυτού του σημειακού φορτίου στο σημείο απόστασης x από τη συμβολή των αξόνων φαίνεται στο Σχήμα 5. Θεωρώντας ως θετικές φορές τις συμβατικές, θα είναι

$$dE = k_e\frac{dq}{r^2} = k_e\frac{dq}{x^2+y^2} \tag{23}$$



Σχήμα 5: *Σχήμα Θέματος 4.*

και οι επιμέρους συνιστώσες

$$dE_x = dE\cos(\theta) \tag{24}$$
$$dE_y = -dE\sin(\theta) \tag{25}$$

με

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{26}$$
$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{27}$$

Άρα

$$dE_x = dE\cos(\theta) = k_e\frac{dq}{x^2+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = k_e\frac{xdq}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{28}$$
$$dE_y = -dE\sin(\theta) = k_e\frac{dq}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -k_e\frac{ydq}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{29}$$

"Αθροίζουμε" τη συνεισφορά στο ηλεκτρικό πεδίο, σε κάθε συνιστώσα του, από κάθε σημειακό φορτίο dq της ράβδου, από $y = 0$ ως $y = a$, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $dq = \lambda dy$, και έχουμε

$$E_x = \int dE_x = \int k_e\frac{xdq}{(x^2+y^2)^{3/2}} = k_e\int_0^a\frac{xdq}{(x^2+y^2)^{3/2}} = k_e\lambda x\int_0^a\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{30}$$
$$E_y = \int dE_y = -\int k_e\frac{ydq}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -k_e\int_0^a\frac{ydq}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -k_e\lambda\int_0^a\frac{ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{31}$$

Από τα δοσμένα ολοκληρώματα, με χρήση και της σχέσης $\lambda = Q/a$, έχουμε

$$E_x = k_e\lambda x\int_0^a\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy = k_e\lambda x\frac{y}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{y=0}^{y=a} = k_e\lambda x\frac{a}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = k_e\frac{Q}{x\sqrt{x^2+a^2}} \tag{32}$$
$$E_y = -k_e\lambda\int_0^a\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy = -k_e\lambda\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\Big|_{y=0}^{y=a} = -k_e\frac{Q}{a}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) \tag{33}$$

(β΄) Έστω απειροστά μικρό τμήμα της ράβδου, dy, απειροστά μικρού φορτίου dq. Λόγω ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου, ισχύει $\lambda = Q/a = dq/dy \Longrightarrow dq = \lambda dy$. Το ηλεκτρικό δυναμικό dV λόγω αυτού του σημειακού φορτίου στο σημείο απόστασης x από τη συμβολή των αξόνων θα είναι

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{dq}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{34}$$

"Αθροίζουμε" τη συνεισφορά στο ηλεκτρικό δυναμικό, σε κάθε συνιστώσα του, από κάθε σημειακό φορτίο dq της ράβδου, από $y = 0$ ως $y = a$.

$$V = \int dV = \int k_e \frac{dq}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k_e \int_0^a \frac{dq}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k_e \lambda \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{35}$$

και από δοσμένο ολοκλήρωμα έχουμε

$$V = k_e \lambda \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})\Big|_{y=0}^{y=a} = k_e \lambda \left(\ln(a + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln(\sqrt{x^2}) \right) = k_e \lambda \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right) \tag{36}$$

Επειδή $\lambda = Q/a$, έχουμε

$$V = k_e \frac{Q}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right) \tag{37}$$

(γ΄) Έστω P το σημείο που βρίσκεται το φορτίο στο σχήμα. Το έργο που απαιτείται ισούται με

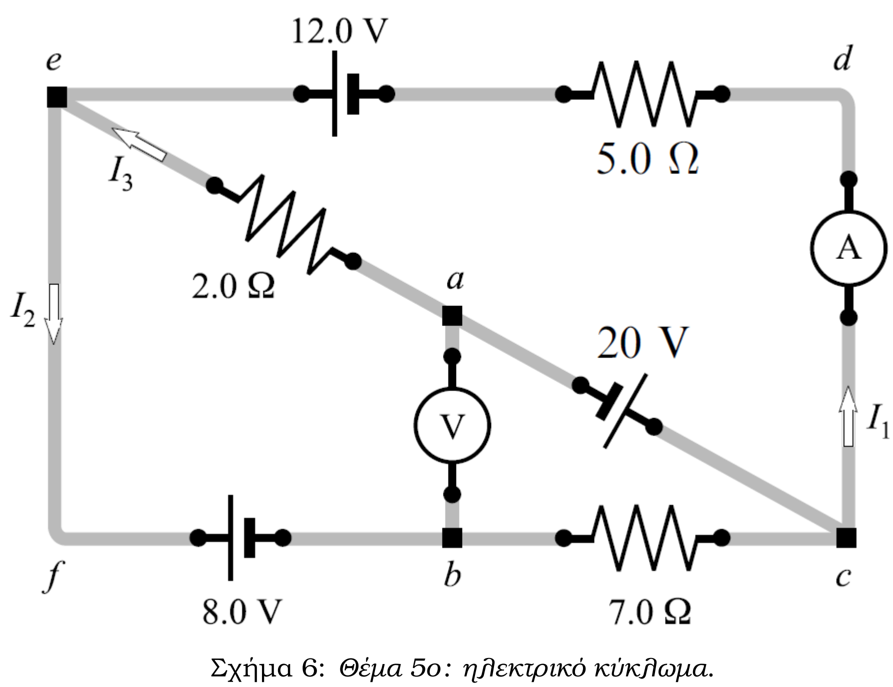
$$W = -q \Delta V_{\infty \to P} = -q(V_P - V_\infty) = -q \left(k_e \frac{Q}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right) - 0 \right) = -k_e \frac{Qq}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right) \tag{38}$$

5. **Θέμα 5ο: Ηλεκτρικά Κυκλώματα - 25 μονάδες**

Ένα αμπερόμετρο (ammeter) μετρά την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που το διαπερνά, ενώ ένα βολτόμετρο (voltmeter) μετρά την τάση (διαφορά δυναμικού) που υπάρχει στα άκρα του. Για το ηλεκτρικό κύκλωμα του Σχήματος 6, δείξτε ότι οι ενδείξεις του αμπερόμετρου και του βολτόμετρου είναι

$$I_{\text{αμπερόμετρου}} = 3.93\, A \qquad V_{\text{βολτόμετρου}} = 4.3\, V \tag{39}$$

Υποθέστε ότι οι συσκευές αυτές είναι ιδανικές (το βολτόμετρο έχει άπειρη αντίσταση, άρα είναι σαν να μην υπάρχει στο κύκλωμα, ενώ το αμπερόμετρο μηδενική αντίσταση, άρα αφήνει το ρεύμα του κλάδου του να το διαπεράσει).



Σχήμα 6: *Θέμα 5ο: ηλεκτρικό κύκλωμα.*

Λύση:
Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο $cdefc$:

$$-5I_1 + 12 - 8 - 7I_2 = 0 \Longleftrightarrow 5I_1 + 7I_2 = 4 \tag{40}$$

Όμοια για το βρόχο $cdeac$:

$$-5I_1 + 12 + 2I_3 + 20 = 0 \Longleftrightarrow 5I_1 - 2I_3 = 32 \tag{41}$$

Στον κόμβο e ισχύει ο 1ος κανόνας του Kirchhoff, δηλ.

$$I_1 + I_3 = I_2 \tag{42}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στη σχέση (40) έχουμε

$$5I_1 + 7I_1 + 7I_3 = 4 \Longrightarrow I_3 = \frac{4 - 12I_1}{7} \tag{43}$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (41), παίρνουμε

$$5I_1 - 2\frac{4 - 12I_1}{7} = 32 \Longrightarrow I_1 = 3.93 \text{ A} \tag{44}$$

που είναι και η ένδειξη του αμπερόμετρου. Κατά συνέπεια, $I_2 = -2.2$ A. Για να βρούμε την ένδειξη του βολτόμετρου, δηλ. το V_{ab}, γράφουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο μονοπάτι acb:

$$V_a + 20 + 7I_2 = V_b \Longleftrightarrow V_b - V_a = 20 + 7I_2 \Longleftrightarrow V_{ab} = 7I_2 + 20 = 0 \Longrightarrow V_{ab} = 4.3 \text{ V} \tag{45}$$