ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Επαναληπτική Τελική Εξέταση

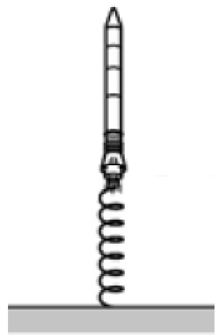
Ονοματεπώνυμο: ______________________________

Α.Μ: ____________ Τμήμα: ______________________________

Με άριστα το 10, με πόσο θα βαθμολογούσατε την προετοιμασία σας για αυτήν την εξέταση; ________

- **ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ**
- **Υπολογίστε όλες τις απαντήσεις σας με ακρίβεια 3ου δεκαδικού ψηφίου.**
- **Τα θέματα επιστρέφονται μαζί με τις απαντήσεις σας.**
- **Μπορείτε να αποχωρήσετε οποτεδήποτε θέλετε, αφού παραδώσετε κόλλες και θέματα.**
- **Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή τσέπης.**
- **Όπου χρειάζεται, θεωρήστε** $g = 9.8$ **m/s^2**
- **Διαβάστε προσεκτικά όλα τα θέματα και ξεκινήστε από αυτό που γνωρίζετε καλύτερα.**
- **Αντιγράψτε τα σχήματα στις κόλλες σας αν χρειαστεί να αναφερθείτε σε αυτά.**
- **ΟΤΙΔΗΠΟΤΕ γράψετε πάνω στις κόλλες των εκφωνήσεων δε θα αξιολογηθεί.**
- **Συνολικές μονάδες αυτής της εξέτασης:** 120**. Αριστα:** 100**.**

1. **Θέμα 1ο: Κλασική Μηχανική - 30 μονάδες**
Σε μια προσομοίωση της εταιρίας Space-X[i], μια ρουκέτα μάζας 200 kg δίνει μέσω των κινητήρων της ώθηση 5×10^4 N. Η ρουκέτα "κοιτάζει" προς τα πάνω και βρίσκεται *δεμένη* επάνω σε ένα κατακόρυφο, ιδανικό ελατήριο το οποίο βρίσκεται στο έδαφος, όπως στο Σχήμα 1. Η σταθερά του ελατηρίου είναι 3×10^3 N/m.



Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 1.*

(α') **(10 μ.)** Αρχικά, πριν ανάψουν οι μηχανές της ρουκέτας, αυτή βρίσκεται σε ηρεμία επάνω στο ελατήριο. Πόσο συμπιέζεται το ελατήριο λόγω της δύναμης του βάρους της; Σχεδιάστε κατάλληλα σχήματα.

(β') **(20 μ.)** Όταν ανάψουν οι μηχανές, ποιά είναι η ταχύτητα της ρουκέτας όταν το ελατήριο έχει εκταθεί κατά 0.5 m *από τη θέση ισορροπίας του*; Στην περίπτωση χρήσης ενεργειακού θεωρήματος, σχεδιάστε κατάλληλα σχήματα, αναφέρετε ρητά το σύστημα που θεωρείτε και τις συνθήκες που ικανοποιούνται για την εφαρμογή του θεωρήματος.

Λύση:

(α') Αφού βρίσκεται σε ηρεμία επάνω στο ελατήριο, έστω ότι η ρουκέτα το έχει συμπιέσει κατά y_c. Από τον 1ο νόμο του Newton στον άξονα ισορροπίας $y'y$, θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω, θα έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Longleftrightarrow \vec{F}_e + m\vec{g} = 0 \Longrightarrow F_e - mg = 0 \Longleftrightarrow F_e = mg \Longleftrightarrow -ky_c = mg \Longleftrightarrow y_c = -\frac{mg}{k} \quad (1)$$

Άρα η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας, και άρα η συμπίεση του ελατηρίου, θα είναι

$$y_c = -\frac{200 \cdot 9.8}{3 \times 10^3} = -0.65 \text{ m} \quad (2)$$

(β') Έστω (Α) η θέση ηρεμίας του συστήματος ελατήριο-Γη-ρουκέτα, όπως αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα. Έστω (Β) η θέση όπου το ελατήριο έχει εκταθεί κατά $y_e = 5 \times 10^{-1}$ m. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη θέση (Α), όπου το ελατήριο είναι συμπιεσμένο. Μοντελοποιώντας την ώθηση των κινητήρων ως εξωτερική δύναμη, το σύστημα είναι μη-απομονωμένο και ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας από τη θέση (Α) στη θέση (Β). Η συνολική απόσταση που διανύει η ρουκέτα είναι $y_t = y_e + |y_c|$.

$$\Delta K_{A\to B} + \Delta U_{g_{A\to B}} + \Delta U_{s_{A\to B}} = \sum W \quad (3)$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} + U_{s_B} - U_{s_A} = F\Delta y \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 + mgy_t - 0 + \frac{1}{2}ky_e^2 - \frac{1}{2}ky_c^2 = Fy_t \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 = Fy_t - mgy_t - \frac{1}{2}ky_e^2 + \frac{1}{2}ky_c^2 \quad (6)$$

$$u_B^2 = \frac{2Fy_t - 2mgy_t - k(y_e^2 - y_c^2)}{m} \quad (7)$$

[i] https://www.spacex.com/

$$u_B = \pm\sqrt{\frac{2Fy_t - 2mgy_t - k(y_e^2 - y_c^2)}{m}} \tag{8}$$

$$= 23.593 \text{ m/s} \tag{9}$$

Κρατάμε τη θετική λύση αφού η ρουκέτα κινείται προς τα πάνω.

2. **Θέμα 2ο: Ταλαντώσεις - 25 μονάδες**
   Η συνάρτηση

$$x(t) = 6\cos(3\pi t + \pi/3) \tag{10}$$

περιγράφει την απλή αρμονική κίνηση ενός σώματος, με το x να μετριέται σε μέτρα. Για $t = 2.0$ s, ποιά είναι

(α΄) (**5 μ.**) η θέση

(β΄) (**5 μ.**) η ταχύτητα

(γ΄) (**5 μ.**) η επιτάχυνση

(δ΄) (**5 μ.**) η φάση (συνολική)

(ε΄) (**2.5 μ.**) η συχνότητα

(ϛ΄) (**2.5 μ.**) η περίοδος της κίνησης

Λύση:
Για $t = 2.0$ s,

(α΄) η θέση του σώματος είναι

$$x(2) = 6\cos(6\pi + \pi/3) = 3.0 \text{ m} \tag{11}$$

(β΄) η ταχύτητα του σώματος είναι

$$u(2) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2} = -18\pi\sin(6\pi + \pi/3) = -48.97 \text{ m/s} \tag{12}$$

(γ΄) η επιτάχυνση του σώματος είναι

$$a(2) = \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=2} = -(3\pi)^2 \cdot 6\cos(6\pi + \pi/3) = -266.48 \text{ m/s}^2 \tag{13}$$

(δ΄) η συνολική φάση είναι το όρισμα του συνημιτόνου, δηλ. $6\pi + \pi/3 = 19\pi/3$.

(ε΄) Η συχνότητα της κίνησης είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3}{2} \text{ Hz} \tag{14}$$

(ϛ΄) Η περίοδος της κίνησης είναι

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2}{3} \text{ s} \tag{15}$$

3. **Θέμα 3ο: Φαινόμενο Doppler - 15 μονάδες**
   Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Ένα πρωί "κολλάει" και δεν μπορείτε να το κλείσετε. Στην απελπισία σας, το πετάτε ("αφήνετε") από το παράθυρο σας. Αν υποθέσετε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s και ότι βρίσκεστε στον 4ο όροφο (15 μ. από το έδαφος), ποιά συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;

Λύση:
Επειδή η πηγή του ήχου απομακρύνεται από μας, αναμένουμε η συχνότητα που ακούμε να είναι μικρότερη από 600 Hz. Από τη σχέση του Doppler θα έχουμε

$$f_- = \frac{u}{u + u_s} f_0 \tag{16}$$

Έστω (A) η θέση που αφήνουμε το ξυπνητήρι από το παράθυρο, και η στιγμή που $t = 0$. Το ξυπνητήρι εκτελεί ελεύθερη πτώση ως το έδαφος - θέση (B). Θεωρούμε τη συμβολή των αξόνων μας στο σημείο (A), με θετική φορά προς τα πάνω. Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το ξυπνητήρι στο έδαφος μπορεί να βρεθεί από την Κινητική ως

$$y_B = y_A + u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Longleftrightarrow -h = 0 + 0 - \frac{1}{2}gt^2 \Longleftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{17}$$

Επίσης,

$$u_B = u_A - gt_B = 0 - gt = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} \Longrightarrow |u_B| = \left|\sqrt{2gh}\right| \text{ m/s} \approx 17.14 \text{ m/s} \tag{18}$$

Από τη σχέση του Doppler ξανά έχουμε

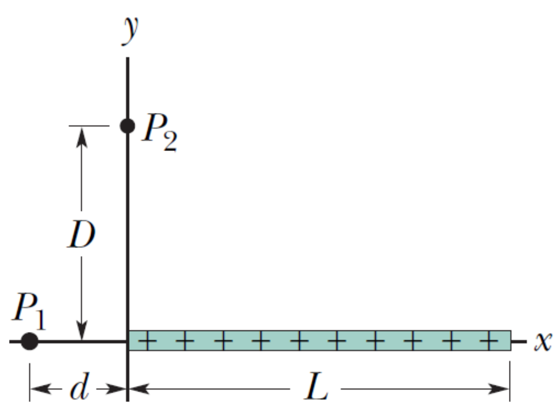
$$f_- = \frac{u}{u + u_B} f_0 = \frac{343}{343 + 17.14} 600 \approx 571 \text{ Hz} \tag{19}$$

Εναλλακτικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση

$$u_B^2 = u_A^2 - 2g\Delta y \tag{20}$$

για να βρείτε πιο εύκολα την ταχύτητα στη θέση B ή κάποιο ενεργειακό θεώρημα.

4. **Θέμα 4ο: Ηλεκτρικά Δυναμικά - 25 μονάδες**
Στο Σχήμα 2 βλέπετε μια λεπτή πλαστική ράβδο μήκους L και ομοιόμορφης κατανομής φορτίου λ, με φορτίο Q, να βρίσκεται πάνω σε νοητό άξονα $x'x$. Με το δυναμικό $V = 0$ να βρίσκεται στο άπειρο, δείξτε ότι:



Σχήμα 2: *Σχήμα Θέματος 4.*

(α') το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P_1, σε οριζόντια απόσταση d από το αριστερό άκρο της ράβδου ισούται με

$$V_{P_1} = k_e \frac{Q}{L} \ln\left(1 + \frac{L}{d}\right) \tag{21}$$

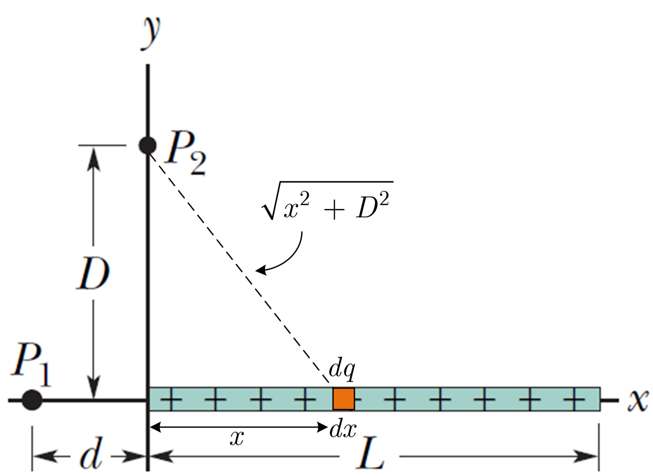
(β΄) το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P_2, σε κάθετη απόσταση $y = D$ από το αριστερό άκρο της ράβδου, αν η κατανομή φορτίου δεν είναι ομοιόμορφη αλλά της μορφής $\lambda(x) = cx$, με c σταθερά, ισούται με

$$V_{P_2} = k_e c(\sqrt{L^2 + y^2} - y) \tag{22}$$

Δίνεται ότι

$$\int_a^b \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx = \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=a}^{x=b} \tag{23}$$

<u>Λύση</u>:
Δείτε το Σχήμα 3.



Σχήμα 3: *Σχήμα Θέματος 4.*

(α΄) Έστω ένα απειροστά μικρό τμήμα της ράβδου μήκους dx, φορτίου dq. Ισχύει $dq = \lambda dx$, με $\lambda = Q/L$ η γραμμική πυκνότητα φορτίου της ράβδου. Από το Σχήμα 2, η απόσταση του από το σημείο P_1 είναι $d + x$ και το δυναμικό του στο σημείο αυτό δίνεται ως

$$dV_{P_1} = k_e \frac{dq}{d+x} = k_e \frac{\lambda dx}{d+x} \tag{24}$$

Το συνολικό δυναμικό στο σημείο P_1 δίνεται αθροίζοντας όλες τις απειροστά μικρές συνεισφορές δυναμικού από τα σημειακά φορτία της ράβδου. Οπότε

$$V_{P_1} = \int dV_{P_1} = k_e \int \frac{\lambda dx}{d+x} = k_e \lambda \int_0^L \frac{dx}{d+x} = k_e \lambda \ln(d+x)\Big|_0^L = k_e \frac{Q}{L} \ln\left(1 + \frac{L}{d}\right) \tag{25}$$

(β΄) Έστω ένα απειροστά μικρό τμήμα της ράβδου μήκους dx, φορτίου dq. Ισχύει $dq = \lambda dx$, με $\lambda = Q/L$ η γραμμική πυκνότητα φορτίου της ράβδου. Από το Σχήμα 2, η συνεισφορά του στο δυναμικό στο σημείο P_2 είναι

$$dV_{P_2} = k_e \frac{\lambda(x) dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = k_e \frac{cx}{\sqrt{x^2+y^2}} dx \tag{26}$$

με $y = D$ την τεταγμένη του σημείου P_2. Το συνολικό δυναμικό στο σημείο P_2 δίνεται αθροίζοντας όλες τις απειροστά μικρές συνεισφορές δυναμικού από τα σημειακά φορτία της ράβδου. Οπότε

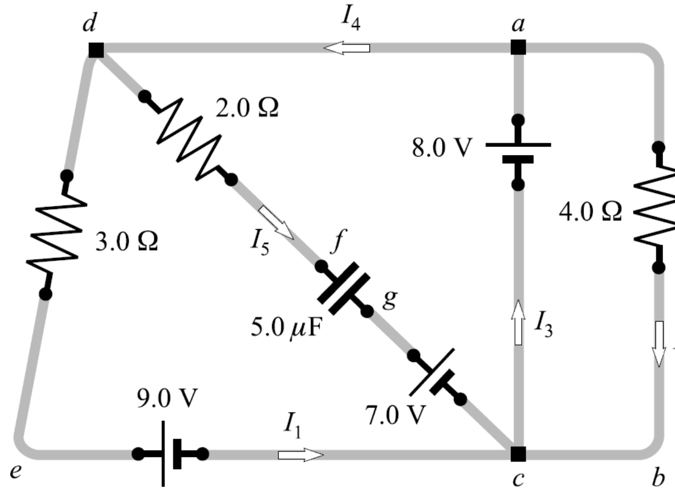
$$V_{P_2} = \int dV_{P_2} = k_e c \int_0^L \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx = k_e c(\sqrt{x^2+y^2})\Big|_{x=0}^{x=L} = k_e c(\sqrt{L^2+y^2} - y) \tag{27}$$

από το δοσμένο ολοκλήρωμα.

5. **Θέμα 5ο: Ηλεκτρικά Κυκλώματα - 25 μονάδες**
   Το κύκλωμα του Σχήματος 4 έχει σταθερά ρεύματα, δηλ. βρίσκεται σε λειτουργία πολλή ώρα. Βρείτε

   (α΄) **(20 μ.)** τα I_x, με $x = 1, 2, 3, 4, 5$, καθώς και

   (β΄) **(5 μ.)** το φορτίο του πυκνωτή των $5.0\ \mu$F.



Σχήμα 4: *Σχήμα Θέματος 5.*

<u>Λύση:</u>
Εφ'όσον το κύκλωμα βρίσκεται σε λειτουργία πολλή ώρα, ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος, άρα $I_5 = 0$. Ο 2ος κανόνας του Kirchhoff για το βρόχο $acba$ δίνει

$$-8 + 4I_2 = 0 \Longleftrightarrow I_2 = 2 \text{ A} \tag{28}$$

Ο 2ος κανόνας του Kirchhoff για το βρόχο $adeca$ δίνει

$$-3I_1 - 9 + 8 = 0 \Longleftrightarrow I_1 = -0.33 \text{ A} \tag{29}$$

Ο 1ος κανόνας του Kirchhoff στον κόμβο c μας δίνει

$$I_1 + I_5 + I_2 = I_3 \Longleftrightarrow I_3 = 1.67 \text{ A} \tag{30}$$

και ο ίδιος κανόνας στον κόμβο a δίνει

$$I_3 = I_4 + I_2 \Longleftrightarrow I_4 = -0.33 \text{ A} \tag{31}$$

Για να βρούμε το φορτίο του πυκνωτή, χρειαζόμαστε τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του. Εφαρμόζοντας το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο $dfgced$ έχουμε

$$-2I_5 + \Delta V_{fg} - 7 + 9 + 3I_1 = 0 \Longleftrightarrow \Delta V_{fg} = -1 \text{ V} \tag{32}$$

'ρα το φορτίο του πυκνωτή είναι

$$Q = C|\Delta V_{fg}| = 5 \text{ μC} \tag{33}$$