ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τελική Εξέταση

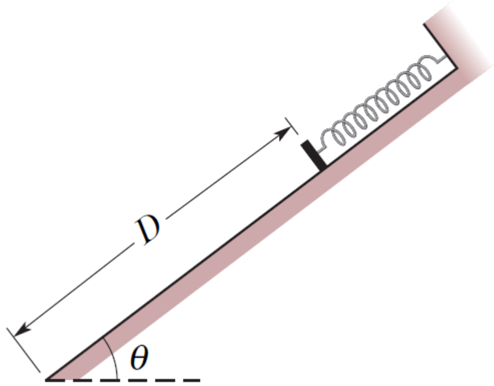
Ονοματεπώνυμο: ____

Α.Μ: ______________ Τμήμα: ______________________________________

Με άριστα το 10, με πόσο θα βαθμολογούσατε την προετοιμασία σας για αυτήν την εξέταση; ________

- **ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ**
- **Υπολογίστε όλες τις απαντήσεις σας <u>με ακρίβεια 3ου δεκαδικού ψηφίου.</u>**
- **Τα θέματα επιστρέφονται μαζί με τις απαντήσεις σας.**
- **Μπορείτε να αποχωρήσετε οποτεδήποτε θέλετε, αφού παραδώσετε κόλλες και θέματα.**
- **Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή τσέπης.**
- **Όπου χρειάζεται, θεωρήστε** $g = 9.8$ **m/s^2**
- **Διαβάστε προσεκτικά όλα τα θέματα και ξεκινήστε από αυτό που γνωρίζετε καλύτερα.**
- **Αντιγράψτε τα σχήματα στις κόλλες σας αν χρειαστεί να αναφερθείτε σε αυτά.**
- **ΟΤΙΔΗΠΟΤΕ γράψετε πάνω στις κόλλες των εκφωνήσεων δε θα αξιολογηθεί.**

1. **Θέμα 1ο: Κλασική Μηχανική - 25 μονάδες**
Στο Σχήμα 1, ένα ελατήριο σταθεράς $k = 170$ N/m βρίσκεται στην κορυφή ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας $\theta = 37°$. Το κάτω άκρο του επικλινούς βρίσκεται σε απόσταση $D = 1.00$ m από το *άκρο* του ελατηρίου, το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Ένα σώμα μάζας 2.0 kg συμπιέζει το ελατήριο κατά 0.2 m και αφήνεται να ολισθήσει.

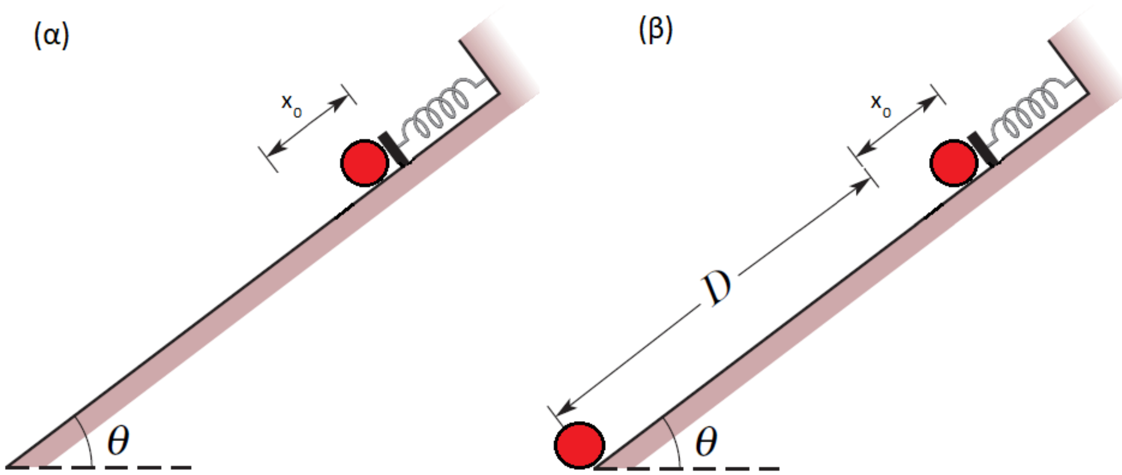


Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 1.*

(α΄) **(15 μ.)** Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος όταν το ελατήριο επιστρέφει στη φυσική του θέση; (δηλ. όταν το σώμα μόλις χάνει την επαφή του με το ελατήριο)

(β΄) **(10 μ.)** Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος όταν φτάνει στο κάτω άκρο του επικλινούς;

<u>Λύση</u>:
Έστω το σύστημα {ελατήριο, σώμα, Γη}. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα (βάρους και ελατηρίου) είναι εσωτερικές και συντηρητικές. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας στη βάση του κεκλιμένου. Έστω άξονας $x'x$ παράλληλος του επικλινούς, με θετική φορά προς τα πάνω και σημείο αναφοράς τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου. Συμβολίζουμε με $x_0 = 0.2$ m τη συμπίεση του ελατηρίου.



Σχήμα 2: *Σχήματα λύσης Θέματος 1.*

(α΄) Δείτε το Σχήμα 2(α). Μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας, καθώς πληρούνται οι προϋποθέσεις της, στη διαδρομή από τη θέση συμπίεσης x_0 του ελατηρίου ως τη θέση που το ελατήριο επιστρέφει στο φυσικό του μήκος, και λαμβάνοντας υπ' όψη τη γεωμετρία του σχήματος, θα είναι

$$K_i + U_{g_i} + U_{s_i} = K_f + U_{g_f} + U_{s_f} \tag{1}$$

$$0 + mg(D + x_0)\sin(\theta) + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mu_f^2 + mgD\sin(\theta) + 0 \tag{2}$$

$$u_f = \sqrt{2gx_0\sin(\theta) + \frac{kx_0^2}{m}} = 2.399 \text{ m/s} \tag{3}$$

(β΄) Δείτε το Σχήμα 2(β). Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας, καθώς πληρούνται οι προϋποθέσεις της, στη διαδρομή από τη θέση συμπίεσης x_0 του ελατηρίου ως τη θέση που το σώμα βρίσκεται στη βάση του κεκλιμένου, και Λαμβάνοντας υπ' όψη τη γεωμετρία του σχήματος, θα είναι

$$K_i + U_{g_i} + U_{s_i} = K_f + U_{g_f} + U_{s_f} \tag{4}$$

$$0 + mg(D + x_0)\sin(\theta) + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mu_f^2 + 0 + 0 \tag{5}$$

$$u_f = \sqrt{2g(D + x_0)\sin(\theta) + \frac{kx_0^2}{m}} = 4.1898 \text{ m/s} \tag{6}$$

Λύσεις με άλλα ενεργειακά θεωρήματα ή με εξισώσεις κίνησης είναι αποδεκτές.

2. **Θέμα 2ο: Βασική Κυματική - 25 μονάδες**

Στο Σχήμα 3 βλέπουμε τη μετατόπιση y ως προς το χρόνο t ενός στοιχείου που βρίσκεται στη θέση $x = 0$ ενός εγκάρσιου ημιτονοειδούς κύματος με μήκος κύματος 20 cm που κινείται κατά τη *θετική* φορά ενός άξονα $x'x$. Με άλλα λόγια, βλέπουμε την κυματοσυνάρτηση $y(0, t)$. Στο Σχήμα ισχύει ότι $y_s = 4.0$ cm. Γνωρίζετε ότι η γενική εξίσωση του κύματος είναι της μορφής

$$y(x, t) = A\sin(kx \pm \omega t + \phi) \tag{7}$$

(α΄) **(5 μ.)** Όταν $t = 0$, η συνάρτηση $y(x, 0)$ είναι μια ορθή ή ανεστραμμένη (ως προς τον άξονα $x'x$) ημιτονοειδής συνάρτηση; Σχεδιάστε τη μορφή της $y(x, 0)$.

(β΄) **(2.5 μ.)** Ποιό είναι το πλάτος A του κύματος;

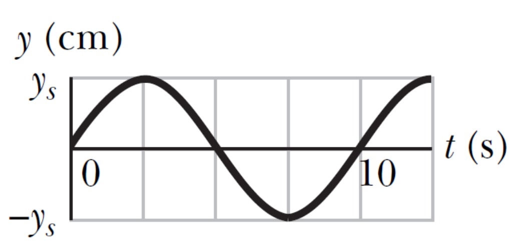
(γ΄) **(2.5 μ.)** Ποιός είναι ο κυματαριθμός k;

(δ΄) **(5 μ.)** Βρείτε τη συχνότητα ω του κύματος.

(ε΄) **(2.5 μ.)** Βρείτε την αρχική φάση ϕ του κύματος.

(ϛ΄) **(2.5 μ.)** Βρείτε την ταχύτητα διάδοσης u του κύματος.

(ζ΄) **(5 μ.)** Ποιά είναι η εγκάρσια ταχύτητα του στοιχείου που βρίσκεται στη θέση $x = 0$ όταν $t = 5.0$ s;



Σχήμα 3: *Σχήμα Θέματος 2.*

Λύση:

(α΄) Η κυματοσυνάρτηση είναι της μορφής

$$y(x, t) = A\sin(kx - \omega t + \phi) \tag{8}$$

και μας δίνεται το σχήμα της μετατόπισης του στοιχείου $x = 0$ ως προς t. Άρα

$$y(0,t) = A\sin(-\omega t + \phi) \tag{9}$$

η οποία από το σχήμα είναι μια ορθή ημιτονοειδής συνάρτηση, δηλ. πρέπει

$$y(0,t) = A\sin(-\omega t + \phi) = A\sin(\omega t) \tag{10}$$

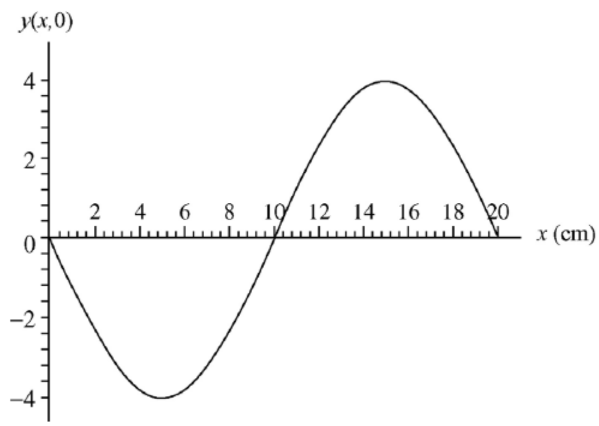
Για να ισχύει η σχέση πρέπει $\phi = \pi$, δηλ.

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \pi) \tag{11}$$

Για $t = 0$, έχουμε

$$y(x,0) = A\sin(kx + \pi) = -A\sin(kx) \tag{12}$$

που είναι μια ανεστραμμένη ημιτονοειδής συνάρτηση. Το σχήμα της φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: *Σχήμα Θέματος 2.*

(β') Το πλάτος του κύματος είναι $A = 4.0$ cm.

(γ') Είναι

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{10} \text{ rad/cm} \tag{13}$$

(δ') Είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s} \tag{14}$$

(ε') Βρήκαμε ήδη ότι $\phi = \pi$.

(ϛ') Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι

$$u = \lambda f = 2.0 \text{ cm/s} \tag{15}$$

(ζ') Αφού η κυματοσυνάρτηση είναι τελικά της μορφής

$$y(x,t) = 4.0\sin(\frac{\pi x}{10} - \frac{\pi t}{5} + \pi) \tag{16}$$

παραγωγίζοντας ως προς t θα έχουμε

$$u(x,t) = \frac{4}{5}\pi\cos(\frac{\pi x}{10} - \frac{\pi t}{5}) \tag{17}$$

που δίνει $u(0,5) = -2.5$ cm/s.

3. **Θέμα 3ο: Φαινόμενο Doppler - 20 μονάδες**
Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Ένα πρωί "κολλάει" και δεν μπορείτε να το κλείσετε. Στην απελπισία σας, το πετάτε ("αφήνετε") από το παράθυρο. Αν υποθέσετε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s, και ότι βρίσκεστε στον 4ο όροφο (15 μέτρα από το εδαφος), τι συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;

Λύση:
Επειδή η πηγή του ήχου απομακρύνεται από μας, αναμένουμε η συχνότητα που ακούμε να είναι μικρότερη από 600 Hz. Από τη σχέση του Doppler θα έχουμε

$$f_- = \frac{u}{u+u_s} f_0 \tag{18}$$

Έστω (Α) η θέση που αφήνουμε το ξυπνητήρι από το παράθυρο, και η στιγμή που $t = 0$. Το ξυπνητήρι εκτελεί ελεύθερη πτώση ως το έδαφος - θέση (Β). Θεωρούμε τη συμβολή των αξόνων μας στο σημείο (Α), με θετική φορά προς τα πάνω. Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το ξυπνητήρι στο έδαφος μπορεί να βρεθεί από την Κινητική ως

$$y_B = y_A + u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Longleftrightarrow -h = 0 + 0 - \frac{1}{2}gt^2 \Longleftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{19}$$

Επίσης,

$$u_B = u_A - gt_B = 0 - gt = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} \Longrightarrow |u_B| = \left|\sqrt{2gh}\right| \text{ m/s} \approx 17.14 \text{ m/s} \tag{20}$$

Από τη σχέση του Doppler ξανά έχουμε

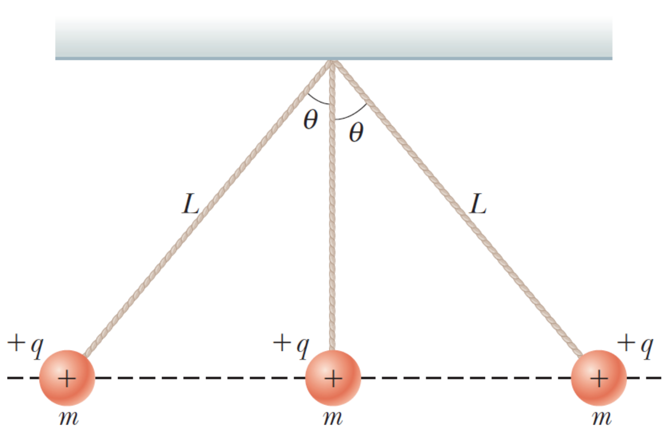
$$f_- = \frac{u}{u+u_B} f_0 = \frac{343}{343 + 17.14} 600 \approx 571 \text{ Hz} \tag{21}$$

Εναλλακτικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση

$$u_B^2 = u_A^2 - 2g\Delta y \tag{22}$$

για να βρείτε πιο εύκολα την ταχύτητα στη θέση B ή κάποιο ενεργειακό θεώρημα.

4. **Θέμα 4ο: Δυνάμεις Coulomb - 25 μονάδες**
Τρια όμοια σημειακά φορτία φορτίου $+q$ και μάζας m το καθένα, κρέμονται από τρια νήματα ισορροπώντας όπως στο Σχήμα 5.

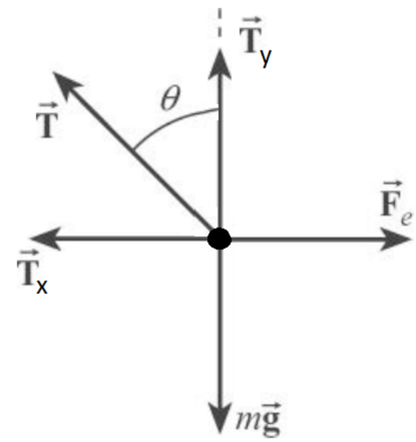


Σχήμα 5: *Φορτία Θέματος 4.*

Αν τα μήκη των νημάτων αριστερά και δεξιά είναι L, τότε δείξτε ότι το φορτίο q ισούται με

$$q = \sqrt{\frac{4L^2 mg \sin^2(\theta)\tan(\theta)}{5k_e}}$$

Λύση:
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο (τυχαία επιλογή) τελευταίο φορτίο φαίνονται στο Σχήμα 6. Θετικές φορές θεωρούνται οι συμβατικές (πάνω και δεξιά). Η τάση του νήματος $\vec{T}$ αναλύεται σε δυο συνιστώσες, $\vec{T}_x$ και $\vec{T}_y$. Λόγω του ότι τα



Σχήμα 6: *Λύση θέματος 4.*

φορτία ισορροπούν, από τον 1ο νόμο του Newton έχουμε ότι

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{T}_y + m\vec{g} = \vec{0} \Longrightarrow T_y - mg = 0 \Longleftrightarrow T\cos(\theta) = mg \Longleftrightarrow T = \frac{mg}{\cos(\theta)} \tag{23}$$

και

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{T}_x + \vec{F}_e = \vec{0} \Longrightarrow -T_x + F_e = 0 \Longleftrightarrow F_e = T\sin(\theta) = \frac{mg}{\cos(\theta)}\sin(\theta) = mg\tan(\theta) \tag{24}$$

Όμως στο τελευταίο φορτίο ασκούνται δυο απωστικές ηλεκτρικές δυνάμεις από τα άλλα δυο φορτία, οπότε

$$F_e = k_e\frac{q^2}{r_1^2} + k_e\frac{q^2}{r_2^2} = \frac{k_e q^2}{(L\sin(\theta))^2} + \frac{k_e q^2}{(2L\sin(\theta))^2} = \frac{5k_e q^2}{4L^2\sin^2(\theta)} \tag{25}$$

αφού οι αποστάσεις r_1, r_2 δίνονται από τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζουν τα νήματα με τον οριζόντιο άξονα ως

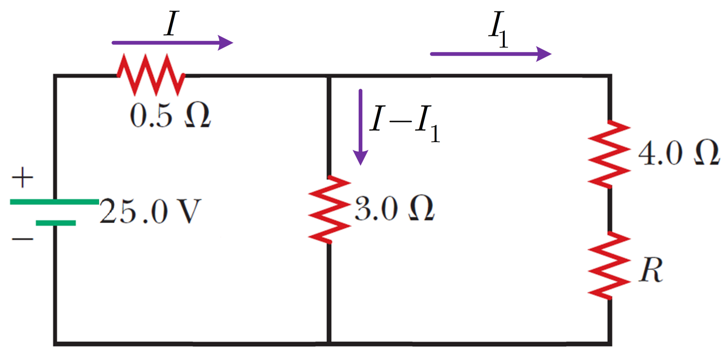
$$\sin(\theta) = \frac{r_1}{L} \Longrightarrow r_1 = L\sin(\theta) \tag{26}$$

Οπότε

$$\frac{5k_e q^2}{4L^2\sin^2(\theta)} = mg\tan(\theta) \Longleftrightarrow q = \sqrt{\frac{4L^2 mg\sin^2(\theta)\tan(\theta)}{5k_e}} \tag{27}$$

αφού το φορτίο q είναι θετικό.

5. **Θέμα 5ο: Ηλεκτρικά Κυκλώματα - 25 μονάδες**
Το κύκλωμα του Σχήματος 7 προέρχεται από το νέο ενισχυτή που αγοράσατε τα Χριστούγεννα για να ταιριάξει με το στερεοφωνικό σας. Δυστυχώς το παρακάνατε με τη χρήση και ο αντιστάτης αντίστασης R κάηκε. Από το εγχειρίδιο χρήσης βρίσκετε ότι η ισχύς που παραδίδεται στον αντιστάτη αυτό είναι $P_R = 20.0$ W. Χρησιμοποιώντας κανόνες του Kirchhoff και τα ρεύματα του σχήματος, βρείτε



Σχήμα 7: *Κύκλωμα Θέματος 5.*

(α') **(2.5 μ.)** μια έκφραση της ισχύος που παραδίδεται στον αντιστάτη R συναρτήσει του ρεύματος που τον διαρρέει

(β') **(20 μ.)** τις πιθανές τιμές ρεύματος που μπορεί να διαρρέουν τον αντιστάτη αντίστασης R

(γ') **(2.5 μ.)** τις πιθανές τιμές που μπορεί να έχει η αντίσταση R στο παραπάνω κύκλωμα ώστε να αγοράσετε ένα νέο αντιστάτη.

Λύση:

(α') Από το σχήμα, ο αντιστάτης R διαρρέεται από ρεύμα I_1. Από γνωστές σχέσεις ηλεκτρισμού έχουμε ότι

$$P_R = I_1^2 R \Longrightarrow R = \frac{20}{I_1^2} \tag{28}$$

(β') Εφαρμόζοντας το 2ο κανόνα Kirchhoff στον αριστερό και στο δεξί βρόχο του κυκλώματος, έχουμε

$$25 - 0.5I - 3(I - I_1) = 0 \tag{29}$$
$$-4I_1 - I_1 R + 3(I - I_1) = 0 \tag{30}$$

δηλ.

$$I = \frac{25 + 3I_1}{3.5} \Longleftrightarrow I = \frac{50 + 6I_1}{7} \tag{31}$$
$$-7I_1 - RI_1 + 3\frac{50 + 6I_1}{7} = 0 \Longleftrightarrow -49I_1 - 7RI_1 + 150 + 18I_1 = 0 \tag{32}$$

και η τελευταία σχέση γράφεται ως

$$-31I_1 - 7I_1 R + 150 = 0 \tag{33}$$

κι αφού

$$R = \frac{20}{I_1^2} \tag{34}$$

θα έχουμε

$$31I_1^2 - 150I_1 + 140 = 0 \tag{35}$$

Λύνοντας το τριώνυμο

$$I_1 = 3.575 \text{ ή } I_1 = 1.263 \text{ A} \tag{36}$$

(γ') Από τα παραπάνω ρεύματα και τη σχέση του (α) ερωτήματος, έχουμε

$$R = 1.564\ \Omega \tag{37}$$

ή

$$R = 12.537\ \Omega \tag{38}$$