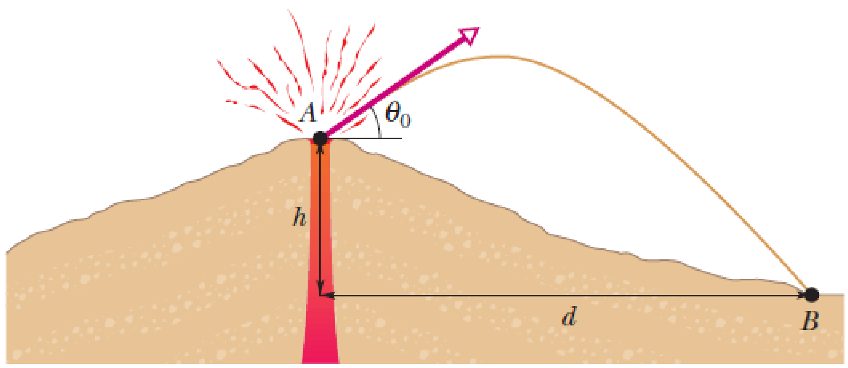
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Επαναληπτική Τελική Εξέταση

1. **Θέμα 1ο: Κλασική Μηχανική - 30 μονάδες**
Κατά τη διάρκεια ηφαιστειακών εκρήξεων, κομμάτια από μεγάλες πέτρες εκσφενδονίζονται μέσα από το ηφαίστειο: οι επονομαζόμενες *ηφαιστειακές βόμβες*. Το Σχήμα 1 δείχνει τη διατομή του ηφαιστείου Fuji, στην Ιαπωνία.



Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 1.*

(α΄) **(15 μ.)** Δείξτε ότι η εξίσωση της τροχιάς της ηφαιστειακης βόμβας δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = (\tan(\theta_0))x - \frac{gx^2}{2(u_0\cos(\theta_0))^2} \tag{1}$$

με θ_0 τη γωνία ρίψης και u_0 την ταχύτητα ρίψης. Προσέξτε ότι ζητούμενη είναι μια συνάρτηση $y(x)$, δηλ. κατακόρυφη μετατόπιση ως συνάρτηση της οριζόντιας μετατόπισης.

(β΄) **(10 μ.)** Με ποιά αρχική ταχύτητα πρέπει να εκσφενδονιστεί μια ηφαιστειακή βόμβα, υπό γωνία $\theta_0 = 30^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο, από το σημείο Α, το οποίο βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση $h = 3.30$ km, έτσι ώστε να πέσει στους πρόποδες του ηφαιστείου στο σημείο Β, που βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση $d = 9.40$ km;

(γ΄) **(5 μ.)** Ποιός θα είναι ο χρόνος πτήσης της ηφαιστειακής βόμβας;

<u>Λύση</u>: Θεωρούμε θετική φορά οριζόντιας κίνησης προς τα δεξιά και θετική φορά κατακόρυφης κίνησης προς τα πάνω. Ως εκ τούτου, το διάνυσμα της βαρύτητας ορίζεται ως $\vec{g} = -9.8\vec{j}$ m/s^2.

(α΄) Γνωρίζουμε τις σχέσεις

$$x = x_0 + u_{0x}t = x_0 + u_0\cos(\theta_0)t \tag{2}$$

$$y = y_0 + u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = y_0 + u_0\sin(\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$

για την οριζόντια και κατακόρυφη κίνηση της ηφαιστειακής βόμβας, αντίστοιχα. Θεωρώντας σημείο αναφοράς $(x_0, y_0) = (0, 0)$ και λύνοντας την πρώτη ως προς το χρόνο έχουμε

$$t = \frac{x}{u_0\cos(\theta_0)} \tag{4}$$

και αντικαθιστώντας στη δεύτερη, έχουμε

$$y = u_0 \sin(\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2 \Big|_{t=\frac{x}{u_0 \cos(\theta_0)}} \tag{5}$$

$$= u_0 \sin(\theta_0) \frac{x}{u_0 \cos(\theta_0)} - \frac{1}{2} g \Big(\frac{x}{u_0 \cos(\theta_0)} \Big)^2 \tag{6}$$

$$= \tan(\theta_0) x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u_0^2 \cos^2(\theta_0)} \tag{7}$$

που είναι το ζητούμενο.

(β΄) Λύνοντας την προηγούμενη σχέση ως προς u_0 έχουμε

$$u_0 = \frac{x}{\cos(\theta_0)} \sqrt{\frac{g}{2(x \tan(\theta_0) - y)}} \tag{8}$$

και αντικαθιστώντας $\theta_0 = 30°$, $x = d = 9400$ m, $y = -h = -3300$ m, παίρνουμε $u_0 \approx 257$ m/s.

(γ΄) Από την πρώτη σχέση του πρώτου ερωτήματος έχουμε

$$t = \frac{x}{u_0 \cos(\theta_0)} = \frac{9400}{257 \cos(30°)} \approx 42.2 \text{ s} \tag{9}$$

2. **Θέμα 2ο: Απλή Αρμονική Ταλάντωση - 20 μονάδες**

Ένα σώμα μάζας $m = 0.1$ kg ταλαντώνεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Η μετατόπισή του από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 0.01 \cos(10t + \pi/2) \tag{10}$$

(α΄) (**2.5 μ.**) Ποιά είναι η συχνότητα ταλάντωσης σε Hz;

(β΄) (**2.5 μ.**) Ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα που λαμβάνει το σώμα;

(γ΄) (**5 μ.**) Για ποιά τιμή του x συμβαίνει η μέγιστη ταχύτητα;

(δ΄) (**2.5 μ.**) Ποιό είναι το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης του σώματος;

(ε΄) (**5 μ.**) Για ποιά τιμή του x συμβαίνει η μέγιστη επιτάχυνση;

(ϛ΄) (**2.5 μ.**) Σε ποιά δύναμη, που εφαρμόζεται από το ελατήριο στο σώμα, οφείλεται η ταλάντωσή που συζητάμε;

Λύση:

(α΄) Από την εξίσωση βλέπουμε ότι

$$\omega = 10 \text{ rad/s} \Longrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 1.6 \text{ Hz} \tag{11}$$

(β΄) Γνωρίζουμε ότι $u_{max} = \omega A$ και αφού $A = 0.01$ m, παίρνουμε $u_{max} = 0.1$ m/s.

(γ΄) Παρατηρούμε ότι όταν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του, η ταχύτητα είναι μέγιστη. Άρα η τιμή του x είναι η $x = 0$.

(δ΄) Γνωρίζουμε ότι $a_{max} = \omega^2 A$, οπότε $a_{max} = 1$ m/s^2.

(ε΄) Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη επιτάχυνση (κατά μέτρο) συμβαίνει στις άκρες της κίνησης του σώματος, δηλ. όταν το σώμα στιγμιαία ακινητοποιείται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης. Οπότε $x = \pm 0.01$ m.

(ϛ΄) Η δύναμη του ελατηρίου $F_s = -kx$ είναι αυτή στην οποία οφείλεται η ταλάντωση.

3. **Θέμα 3ο: Κυματική Διάδοση - 15 μονάδες**

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ και στη θέση $x = 0$ κατά μήκος ενός νήματος, ένα ημιτονοειδές κύμα με γωνιακή συχνότητα 440 rad/s έχει μετατόπιση $y(0,0) = 0.0045$ m και εγκάρσια ταχύτητα $u = -0.75$ m/s. Αν το κύμα έχει τη γενική μορφή

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi) \tag{12}$$

ποιά είναι η αρχική σταθερά φάσης, ϕ;

<u>Λύση:</u> Από την κυματοσυνάρτηση γνωρίζουμε (ή μπορούμε να βρούμε παραγωγίζοντας ως προς t) ότι

$$u(x,t) = -A\omega\cos(kx - \omega t + \phi) \tag{13}$$

είναι η εγκάρσια ταχύτητα των στοιχείων του κύματος. Μπορούμε τώρα να γράψουμε ότι

$$\frac{y(x,t)}{u(x,t)} = \frac{A\sin(kx - \omega t + \phi)}{-A\omega\cos(kx - \omega t + \phi)} = -\frac{1}{\omega}\tan(kx - \omega t + \phi) \tag{14}$$

Για το σημείο $(x,t) = (0,0)$ ξέρουμε ότι $y(0,0) = 0.0045$ m και ότι $u(0,0) = -0.75$ m/s, ενώ επίσης γνωρίζουμε ότι $\omega = 440$ rad/s. Αντικαθιστώντας

$$\frac{y(0,0)}{u(0,0)} = -\frac{1}{440}\tan(\phi) \Longrightarrow \phi = \tan^{-1}\left[\frac{-440 \times 0.0045}{-0.75}\right] \approx 1.2 \text{ rad} \tag{15}$$

4. **Θέμα 4ο: Ηχητικά Κύματα - 25 μονάδες**

Θεωρήστε ότι βρισκεστε σε ένα δωμάτιο που απορροφά εντελώς τους, ανακλώμενους στους τοίχους, ήχους που παράγει ένα σφαιρικό ηχείο που μεταδίδει ισοτροπικά με ισχύ 10 W. Το δωμάτιο αυτό ονομάζεται *ανηχωικό*.

(α΄) **(10 μ.)** Ποιά είναι η ένταση του ήχου σε απόσταση $d = 3.0$ m από την πηγή;

(β΄) **(15 μ.)** Ποιός είναι ο λόγος του πλάτους του κύματος σε απόσταση $d = 4.0$ m προς αυτού σε απόσταση $d = 3.0$ m;

<u>Λύση:</u>

(α΄) Ο ήχος διαδίδεται σε σφαιρικά κυματικά μέτωπα, με το εμβαδό κάθε κυματικού μετώπου να είναι $A = 4\pi r^2$, με r την απόσταση από το ηχείο. Οπότε

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10}{4\pi 3^2} \approx 0.088 \text{ W/m}^2 \tag{16}$$

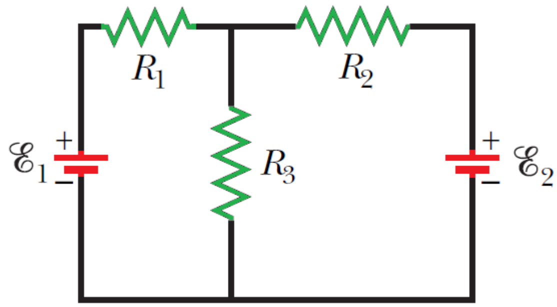
(β΄) Η ένταση του ηχητικού κύματος είναι ανάλογη της ισχύος εκπομπής. Όμως η ισχύς ενός κύματος είναι ευθεύως ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους μετατόπισης του κύματος, s_{max}. Οπότε αν θεωρήσουμε τις εντάσεις σε απόσταση $r_1 = 3.0$ m ως I_1 και την αντίστοιχη σε απόσταση $r_2 = 4.0$ m ως I_2, τότε

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{s^2_{max,2}}{s^2_{max,1}} = \frac{\frac{P}{4\pi r_2^2}}{\frac{P}{4\pi r_1^2}} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \tag{17}$$

δηλ.

$$\frac{s_{max,2}}{s_{max,1}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{3.0}{4.0} = 0.75 \tag{18}$$

5. **Θέμα 5ο: Ηλεκτρικά Κυκλώματα - 25 μονάδες**
Στο κύκλωμα του Σχήματος 2, έχουμε $\varepsilon_1 = 3.0$ V, $\varepsilon_2 = 1.0$ V, $R_1 = 4.0\ \Omega$, $R_2 = 2.0\ \Omega$, και $R_3 = 5.0\ \Omega$.



Σχήμα 2: *Κύκλωμα Θέματος 5.*

Οι μπαταρίες είναι ιδανικές. Δείξτε ότι τα ρεύματα στο κύκλωμα έχουν *μέτρο*

$$\frac{8}{19}\ \text{A},\ \frac{3}{19}\ \text{A},\ \frac{5}{19}\ \text{A} \tag{19}$$

Λύση: Έστω I_1, I_2, I_3 τα τρια ρεύματα που διαρρέουν το κύκλωμα, με το I_1 να διαρρέει τον αντιστάτη R_1 από αριστερά προς τα δεξιά, το I_2 να διαρρέει τον αντιστάτη R_2 από αριστερά προς τα δεξιά, και το I_3 να διαρρέει τον αντιστάτη R_3 από κάτω προς τα επάνω. Ο 1ος κανόνας του Kirchhoff στον επάνω κόμβο θα μας δώσει

$$I_1 + I_3 = I_2 \tag{20}$$

Ο 2ος κανόνας του Kirchhoff εφαρμοζόμενος δεξιόστροφα στους δυο βρόχους αριστερά και δεξιά στο κύκλωμα θα μας δώσει

$$\varepsilon_1 - I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0 \tag{21}$$
$$-\varepsilon_2 - I_3 R_3 - I_2 R_2 = 0 \tag{22}$$

αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας

$$3 - 4I_1 + 5I_3 = 0 \tag{23}$$
$$-1 - 5I_3 - 2I_2 = 0 \tag{24}$$

και μαζί με τη σχέση $I_1 + I_3 = I_2$ έχουμε από τη δεύτερη παραπάνω σχέση ότι

$$-1 - 5I_3 - 2(I_1 + I_3) = 0 \Longleftrightarrow -7I_3 - 2I_1 = 1 \Longleftrightarrow I_1 = -\frac{1}{2}(1 + 7I_3) \tag{25}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση βρόχου παιρνουμε

$$3 + 4\frac{1}{2}(1 + 7I_3) + 5I_3 = 0 \Longleftrightarrow 3 + 2 + 19I_3 = 0 \Longleftrightarrow I_3 = -\frac{5}{19}\ \text{A} \tag{26}$$

και αντίστοιχα

$$I_1 = -\frac{1}{2}(1 - \frac{35}{19}) = \frac{1}{2}\frac{16}{19} = \frac{8}{19}\ \text{A} \tag{27}$$

και

$$I_2 = \frac{8}{19} - \frac{5}{19} = \frac{3}{19}\ \text{A} \tag{28}$$

6. **Θέμα 6ο: Ηλεκτρικά Πεδία και Δυναμικά - 20 μονάδες**
Σας δίνεται ότι το μέτρο E ενός ηλεκτρικού πεδίου εξαρτάται από την ακτινική απόσταση r σύμφωνα με τη σχέση

$$E = \frac{A}{r^4} \tag{29}$$

με A να είναι σταθερά σε μονάδες V/m^3. Ποιό είναι το μέτρο της διαφοράς ηλεκτρικού δυναμικού μεταξύ $r = 2.0$ m και $r = 3.0$ m συναρτήσει του A;

<u>Λύση</u>: Αφού το ηλεκτρικό πεδίο είναι ακτινικό, τότε η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στις ζητούμενες θέσεις θα είναι

$$\Delta V = -\int_{r_1}^{r_2} E_r dr = -\int_2^3 \frac{A}{r^4} dr = -A \int_2^3 \frac{1}{r^4} dr = \frac{A}{3}\frac{1}{r^3}\Big|_2^3 = \frac{A}{3}\left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{2^3}\right) \approx -0.029A \text{ V} \tag{30}$$

οπότε

$$|\Delta V| \approx 0.029A \text{ V} \tag{31}$$

Συνολικές μονάδες: 135
Άριστα: 100