ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τελική Εξέταση

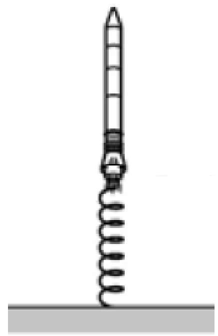
- **ΑΝΤΙΓΡΑΨΤΕ ΣΤΟ ΠΑΝΩ ΜΕΡΟΣ ΚΑΘΕ ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ τον παρακάτω πίνακα, βάζοντας τα 4 ψηφία του ΑΜ σας κάτω από τις σταθερές** a, b, c, d:

a	b	c	d

- **Αντικαταστήστε πριν οποιαδήποτε λύση σας τις σταθερές** a, b, c, d **όπου εμφανίζονται στα παρακάτω θέματα (μόνο με <u>μικρά</u> γράμματα) με τα αντίστοιχα ψηφία του ΑΜ σας.**
- **Λύσεις ΧΩΡΙΣ αντικατάσταση ή με ΛΑΘΟΣ αντικατάσταση ψηφίων ΔΕΝ είναι αποδεκτές και ΜΗΔΕΝΙΖΟΝΤΑΙ.**
- **ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ**
- **ΠΡΟΘΕΣΜΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ: 18:30 ΑΥΣΤΗΡΑ μέσω του προγράμματος TURNIN με χρήση της παρακάτω εντολής:**
  turnin FE@hy112 /mypath/hy112/exam
- **Υπολογίστε όλες τις απαντήσεις σας <u>με ακρίβεια 3ου δεκαδικού ψηφίου.</u>**
- **Απαγορεύεται η συνεργασία με οποιοδήποτε φυσικό πρόσωπο ή πρόσωπα και η μεταξύ σας ή με τρίτους αντιγραφή. Ο διδάσκων διατηρεί το δικαίωμα (α) να μηδενίσει <u>κατ΄ ευθείαν</u> γραπτό ή γραπτά με προφανείς ομοιότητες και (β) να καλέσει σε <u>προφορική εξέταση</u> μέσω Zoom αν υπάρξουν όποιες υποψίες.**
- **Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή τσέπης ή λογισμικού αριθμητικών υπολογισμών.**
- **Όπου χρειάζεται, θεωρήστε** $g = 9.8$ **m/s^2**
- **Δεν επιτρέπονται ερωτήσεις. Γράφετε μόνοι/ες σας με βάση όσα γνωρίζετε.**
- **Το σύμβολο** $\times$ **όπου εμφανίζεται παρακάτω, δηλώνει την πράξη του πολλαπλασιασμού.**
- **Διαβάστε προσεκτικά όλα τα θέματα και ξεκινήστε από αυτό που γνωρίζετε καλύτερα.**

1. **Θέμα 1ο: Κλασική Μηχανική - 30 μονάδες**

Σε μια προσομοίωση της εταιρίας Space-X[i], μια ρουκέτα μάζας $a + b$ kg δίνει μέσω των κινητήρων της ώθηση $(d + 1) \times 10^4$ N. Η ρουκέτα "κοιτάζει" προς τα πάνω και βρίσκεται *δεμένη* επάνω σε ένα κατακόρυφο, ιδανικό ελατήριο το οποίο βρίσκεται στο έδαφος, όπως στο Σχήμα 1. Η σταθερά του ελατηρίου είναι $(c + 1) \times 10^3$ N/m.



Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 1.*

(α') **(10 μ.)** Αρχικά, πριν ανάψουν οι μηχανές της ρουκέτας, αυτή βρίσκεται σε ηρεμία επάνω στο ελατήριο. Πόσο συμπιέζεται το ελατήριο λόγω της δύναμης του βάρους της;

(β') **(20 μ.)** Όταν ανάψουν οι μηχανές, ποιά είναι η ταχύτητα της ρουκέτας όταν το ελατήριο έχει εκταθεί κατά $(b + 1) \times 10^{-1}$ m *από τη θέση ισορροπίας του*; Στην περίπτωση χρήσης ενεργειακού θεωρήματος, αναφέρετε ρητά το σύστημα που θεωρείτε και τις συνθήκες που ικανοποιούνται για την εφαρμογή του θεωρήματος.

Λύση:

(α') Αφού βρίσκεται σε ηρεμία επάνω στο ελατήριο, έστω ότι η ρουκέτα το έχει συμπιέσει κατά y_c. Από τον 1ο νόμο του Newton στον άξονα ισορροπίας $y'y$, θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω, θα έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Longleftrightarrow \vec{F}_e + m\vec{g} = 0 \Longrightarrow F_e - mg = 0 \Longleftrightarrow F_e = mg \Longleftrightarrow -ky_c = mg \Longleftrightarrow y_c = -\frac{mg}{k} \tag{1}$$

Άρα η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας, και άρα η συμπίεση του ελατηρίου, θα είναι

$$y_c = -\frac{(a+b)g}{(c+1)} \times 10^{-3} \text{ m} \tag{2}$$

(β') Έστω (Α) η θέση ηρεμίας του συστήματος ελατήριο-Γη-ρουκέτα, όπως αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα. Έστω (Β) η θέση όπου το ελατήριο έχει εκταθεί κατά $y_e = (b + 1) \times 10^{-1}$ m. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη θέση (Α), όπου το ελατήριο είναι συμπιεσμένο. Μοντελοποιώντας την ώθηση των κινητήρων ως εξωτερική δύναμη, το σύστημα είναι μη-απομονωμένο και ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας από τη θέση (Α) στη θέση (Β). Η συνολική απόσταση που διανύει η ρουκέτα είναι $y_t = y_e + |y_c|$.

$$\Delta K_{A\to B} + \Delta U_{g_{A\to B}} + \Delta U_{s_{A\to B}} = \sum W \tag{3}$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} + U_{s_B} - U_{s_A} = F\Delta y \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 + mgy_t - 0 + \frac{1}{2}ky_e^2 - \frac{1}{2}ky_c^2 = Fy_t \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 = Fy_t - mgy_t - \frac{1}{2}ky_e^2 + \frac{1}{2}ky_c^2 \tag{6}$$

$$u_B^2 = \frac{2Fy_t - 2mgy_t - k(y_e^2 - y_c^2)}{m} \tag{7}$$

$$u_B = \pm\sqrt{\frac{2Fy_t - 2mgy_t - k(y_e^2 - y_c^2)}{m}} \tag{8}$$

Κρατάμε τη θετική λύση αφού η ρουκέτα κινείται προς τα πάνω.

[i]https://www.spacex.com/

2. **Θέμα 2ο: Απλή Αρμονική Ταλάντωση - 20 μονάδες**

Στη λαχαναγορά της περιοχής σας, αναγκάζεστε να ζυγίζετε μόνοι/ες σας τα φρούτα και τα λαχανικά σας, λόγω κορονοϊού. Παίρνετε κάμποσα μήλα και τα βάζετε σε μια ζυγαριά ελατηρίου. Η ένδειξη της ζυγαριάς "γράφει" 20 N και χρησιμοποιώντας το χάρακα που έχετε πάντα μαζί σας, βλέπετε ότι το δοχείο της ζυγαριάς έχει κατέβει $3 \times (a + d) \times 10^{-2}$ m όταν βάζετε επάνω τα μήλα σας. Αν χτυπήσετε το κάτω μέρος του δοχείου λίγο, ώστε να το κάνετε να ταλαντωθεί, ποιά είναι η συχνότητα ταλάντωσης; Αγνοήστε τη μάζα του δοχείου, θεωρήστε τη ζυγαριά ιδανική, και ότι η ταλάντωση είναι απλή αρμονική.

Λύση:

Όταν τα μήλα τοποθετούνται στη ζυγαριά, το σύστημα ζυγαριά-ελατήριο-μήλα ισορροπεί μετατοπίζοντας το ελατήριο κατά $y_c = -3 \times (a + d) \times 10^{-2}$ m. Υποθέτοντας θετική φορά προς τα πάνω, από το 2ο νόμο του Newton ισχύει

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Longleftrightarrow \vec{F}_s + m\vec{g} = 0 \Longrightarrow F_s - mg = 0 \Longleftrightarrow -ky_c = mg \Longleftrightarrow k = -\frac{mg}{y_c} \text{ N/m} \tag{9}$$

Η συχνότητα ταλάντωσης θα είναι

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-\frac{mg}{y_c}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{g}{y_c}} \tag{10}$$

Οπότε τελικά

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{3 \times (a + d) \times 10^{-2}}} \text{ Hz} \tag{11}$$

Απαντήσεις σε μορφή γωνιακής συχνότητας $\omega = 2\pi f$ rad/s είναι επίσης σωστές.

3. **Θέμα 3ο: Κυματική Διάδοση - 15 μονάδες**

Ένα κύμα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$y(x,t) = (a \times 10^{-2}) \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{(b+1)} + \frac{t}{(c+1) \times 10^{-1}} + 1\right)\right] \tag{12}$$

και διαδίδεται σε ένα νήμα, με y, x και t να μετρώνεται σε μέτρα και δευτερόλεπτα, αντίστοιχα.

(α') (**5 μ.**) Σε ποιά κατεύθυνση ταξιδεύει το κύμα;

(β') (**5 μ.**) Ποιά είναι η ταχύτητα, η συχνότητα σε Hz, και ο κυματαριθμός του κύματος;

(γ') (**5 μ.**) Σε χρόνο $t = 0.5$ s, ποιά είναι η μετατόπιση του στοιχείου $x = (d + 2) \times 10^{-1}$ m του νήματος;

Λύση:

(α') Το κύμα ταξιδεύει προς τα αριστερά, αφού η κυματοσυνάρτηση έχει όρισμα ημιτόνου $(kx + \omega t + \phi)$, με το $+$ μπροστά στο ω να υποδηλώνει ταξίδι προς τα αριστερά.

(β') Η κυματοσυνάρτηση γράφεται ως

$$y(x,t) = (a \times 10^{-2}) \sin\left[\left(\frac{2\pi}{(b+1)}x + \frac{2\pi}{(c+1) \times 10^{-1}}t + 2\pi\right)\right] \tag{13}$$

οπότε έχουμε

$$\text{κυματαριθμός}: \; k = \frac{2\pi}{b+1} \text{ rad/m} \tag{14}$$

$$\text{μήκος κύματος}: \; \lambda = b+1 \text{ m} \tag{15}$$

$$\text{περίοδος}: \; T = (c+1)\times 10^{-1} \text{ s} \tag{16}$$

$$\text{γων. συχνότητα}: \; \omega = \frac{2\pi}{(c+1)\times 10^{-1}} \text{ rad/s} \tag{17}$$

$$\text{συχνότητα}: \; f = \frac{1}{T} = \frac{1}{(c+1)\times 10^{-1}} \text{ Hz} \tag{18}$$

$$\text{ταχύτητα}: \; u = \lambda f = \frac{10(b+1)}{c+1} \text{ m/s} \tag{19}$$

(γ΄) Για το ζεύγος $(x_0, t_0) = ((d+2)\times 10^{-1}, 0.5)$ θα έχουμε

$$y(x_0, t_0) = (a \times 10^{-2}) \sin\left(\frac{\pi(d+2)}{5(b+1)} + \frac{10\pi}{(c+1)}\right) \tag{20}$$

με το αποτέλεσμα να προκύπτει με χρήση αριθμομηχανής.

4. **Θέμα 4ο: Φαινόμενο Doppler - 25 μονάδες**

Οι υπέρηχοι έχουν πολλές σημαντικές εφαρμογές στην Ιατρική, μια εκ των οποίων είναι η παρακολούθησης της καρδιακής λειτουργίας ενός εμβρύου, στέλνοντας και λαμβάνοντας (ανακλώμενους) υπερήχους στη μήτρα.

(α΄) **(10 μ.)** Θεωρήστε ένα σώμα κινούμενο με ταχύτητα u_O προς ακίνητη πηγή, η οποία εκπέμπει ηχητικό κύμα συχνότητας f_0. Δείξτε ότι το ανακλώμενο ηχητικό κύμα (δηλ. η ηχώ) που επιστρέφει στην πηγή αφού ανακλαστεί στο κινούμενο σώμα δίνεται από τη σχέση

$$f_{echo} = \frac{u+u_O}{u-u_O} f_0 \tag{21}$$

με u την ταχύτητα του ήχου στο μέσο διάδοσης.
Hint: Βρείτε τη συχνότητα που λαμβάνει το κινούμενο σώμα και θεωρήστε ότι αυτό επανεκπέμπει - ως κινούμενο σώμα, πάντα! - αυτή τη συχνότητα πίσω στην ακίνητη πηγή.

(β΄) **(10 μ.)** Υποθέστε ότι $u_O \ll u$. Τότε $f_{echo} \approx f_0$ και ένα μικρόφωνο που έχει υψηλή ευαισθησία σε τέτοιες συχνότητες θα ανιχνεύσει ένα διακρότημα αν λάβει ταυτόχρονα τις δυο συχνότητες, f_0 και f_{echo}. Δείξτε ότι η συχνότητα του διακροτήματος δίνεται από τη σχέση

$$f_{beat} \approx 2 f_0 \frac{u_O}{u} \tag{22}$$

(γ΄) **(5 μ.)** Η εφαρμογή στους υπερήχους έχει ως εξής: η ανάκλαση ενός υπερήχου συχνότητας 2.4 MHz από την επιφάνεια της καρδιάς ενός εμβρύου συμβάλλει με το εκπεμπόμενο κύμα των 2.4 MHz και παράγει ένα διακρότημα με μέγιστη συχνότητα τα 65 Hz. Ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα της επιφάνειας της καρδιάς; Σας δίνεται ότι η ταχύτητα των υπερήχων στο σώμα μας είναι $u = 1540$ m/s.

Λύση:

(α΄) Η ακίνητη πηγή εκπέμπει ηχητικό κύμα συχνότητας f_0 και ο κινούμενος προς αυτήν παρατηρητής με ταχύτητα u_O λαμβάνει ηχητικό κύμα συχνότητας

$$f_{rec} = \frac{u+u_O}{u} f_0 \tag{23}$$

σύμφωνα με την εξίσωση Doppler. Αν θεωρήσουμε ότι η παραπάνω συχνότητα επανεκπέμπεται από κινούμενο παρατηρητή (που όμως πλέον είναι πηγή ηχητικού κύματος) προς την ακίνητη πηγή (που πλέον είναι ακίνητος παρατηρητής), τότε σύμφωνα με την εξίσωση Doppler η συχνότητα που λαμβάνει η πηγή θα είναι

$$f_{echo} = \frac{u}{u-u_O} f_{rec} = \frac{u}{u-u_O}\frac{u+u_O}{u} f_0 = \frac{u+u_O}{u-u_O} f_0 \tag{24}$$

(β΄) Η συχνότητα του διακροτήματος ξέρουμε ότι είναι

$$f_{beat} = |f_0 - f_{echo}| \tag{25}$$
$$= \left| f_0 - \frac{u+u_O}{u-u_O} f_0 \right| \tag{26}$$
$$= \left| \frac{(u-u_O)}{(u-u_O)} f_0 - \frac{u+u_O}{u-u_O} f_0 \right| \tag{27}$$
$$= \left| \frac{-2u_O}{u-u_O} f_0 \right| \tag{28}$$

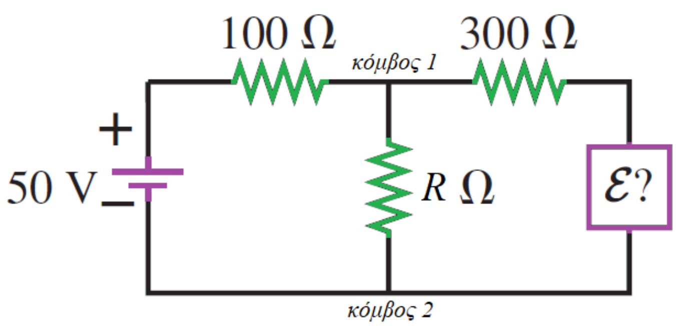
κι επειδή $u_O \ll u \Longrightarrow u - u_O \approx u$, θα είναι

$$f_{beat} \approx \left| \frac{-2u_O}{u} f_0 \right| = \frac{2u_O}{u} f_0 \tag{29}$$

(γ΄) Από το προηγ. ερώτημα έχουμε

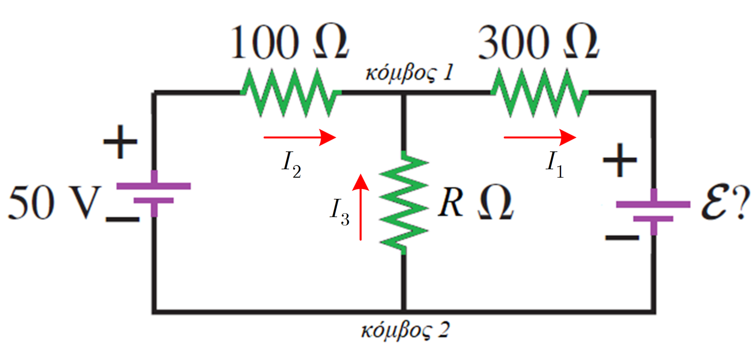
$$65 = \frac{2u_O}{1540} \times 2.4 \times 10^6 \Longrightarrow u_O = 0.0208 \text{ m/s} \tag{30}$$

5. **Θέμα 5ο: Ηλεκτρικά Κυκλώματα - 25 μονάδες**
Δείτε το κύκλωμα του Σχήματος 2. Υπάρχει τιμή της ΗΕΔ ε για την οποία ο αντιστάτης R λαμβάνει μηδενική ισχύ;



Σχήμα 2: *Σχήμα Θέματος 5.*

Λύση:
Για να έχει το κύκλωμα του Σχήματος 3 κάποια τιμή της ΗΕΔ ε στο δεξί μέρος του κυκλώματος για την οποία στον



Σχήμα 3: *Σχήμα Θέματος 5 - Λύση.*

αντιστάτη αντίστασης R Ω, με

$$R = (a+b) \times 10^2 \tag{31}$$

παραδίδεται μηδενική ισχύς, θα πρέπει να ισχύει

$$P_R = I_3^2 R = 0 \Longrightarrow I_3 = 0 \tag{32}$$

Αν στον κόμβο 1 ισχύει ο 1ος κανόνας του Kirchhoff ως

$$I_1 = I_2 + I_3 \Longleftrightarrow I_1 = I_2 \tag{33}$$

Έστω ότι η άγνωστη ΗΕΔ συνδέεται με το θετικό πόλο προς τα πάνω. Από το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο δεξί τμήμα του κυκλώματος, με φορά των δεικτών του ρολογιού, θα έχουμε

$$-300I_1 - \varepsilon = 0 \Longleftrightarrow \varepsilon = -300I_1 \tag{34}$$

Από τον 2ο κανόνα του Kirchhoff στο αριστερό τμήμα του κυκλώματος, με φορά των δεικτών του ρολογιού, θα έχουμε

$$50 - 100I_2 = 0 \Longleftrightarrow I_2 = 0.5 \text{ A} \tag{35}$$

και από τη Σχέση (33) ισχύει

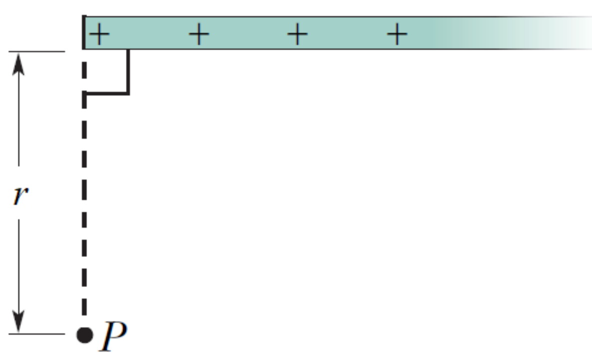
$$I_1 = 0.5 \text{ A} \tag{36}$$

Οπότε η Σχέση (34) δίνει

$$\varepsilon = -150 \text{ V} \tag{37}$$

Λόγω του προσήμου καταλαβαίνουμε ότι η πολικότητα που επιλέξαμε πρέπει να αλλάξει, και η άγνωστη πηγή πρέπει να συνδεθεί με το θετικό πόλο προς τα κάτω. Η τιμή της ΗΕΔ είναι λοιπόν 150 V.

6. **Θέμα 6ο: Ηλεκτρικά Πεδία - 30 μονάδες**
Η ράβδος του Σχήματος 4 είναι θετικά φορτισμένη με ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου λ και έχει *άπειρο* μήκος προς το δεξί της μέρος. Βρείτε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P.



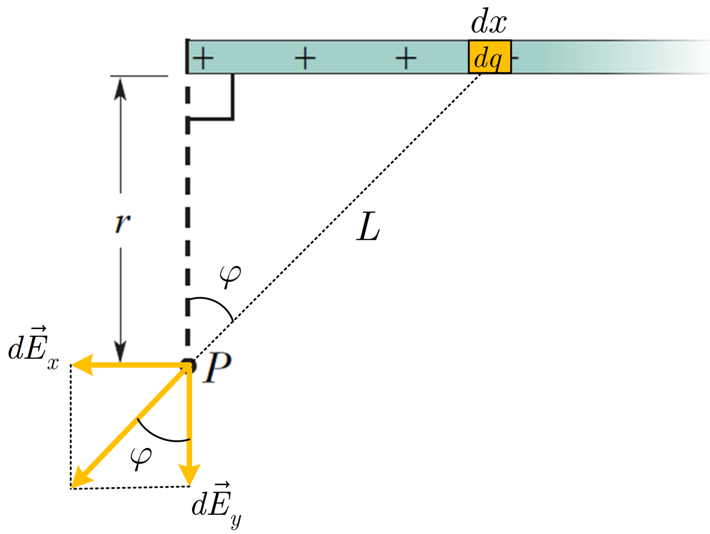
Σχήμα 4: *Σχήμα Θέματος 6.*

<u>Λύση</u>: Δείτε το Σχήμα 5. Αναλύοντας τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου από ένα σημειακό φορτίο της ράβδου dq, μήκους dx, σε απόσταση x από το αριστερό άκρο της ράβδου, μπορούμε να γράψουμε

$$d\vec{E}_P = d\vec{E}_{P_x} + d\vec{E}_{P_y} = dE_{P_x}\vec{i} + dE_{P_y}\vec{j} \tag{38}$$

Το σημειακό φορτίο dq συνεισφέρει στο σημείο P ηλεκτρικό πεδίο μέτρου

$$dE_P = k_e \frac{dq}{L^2} = k_e \frac{dq}{r^2 + x^2} \tag{39}$$



Σχήμα 5: *Σχήμα Θέματος 6 - Λύση.*

Οι επιμέρους συνιστώσες

$$dE_{P_x} = -dE_P \sin(\phi) = -k_e \frac{dq}{r^2+x^2} \sin(\phi) \tag{40}$$

$$dE_{P_y} = -dE_P \cos(\phi) = -k_e \frac{dq}{r^2+x^2} \cos(\phi) \tag{41}$$

Επειδή

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{dq}{dx} \Longrightarrow dq = \lambda dx \tag{42}$$

και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπάνω μπορούν να γραφούν ως

$$\sin(\phi) = \frac{x}{L} = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} \tag{43}$$

$$\cos(\phi) = \frac{r}{L} = \frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}} \tag{44}$$

θα έχουμε

$$dE_{P_x} = -dE_P \sin(\phi) = -k_e \lambda \frac{dx}{r^2+x^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} = -k_e \lambda \frac{xdx}{(r^2+x^2)^{3/2}} \tag{45}$$

$$dE_{P_y} = -dE_P \cos(\phi) = -k_e \lambda \frac{dx}{r^2+x^2} \frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}} = -k_e \lambda \frac{rdx}{(r^2+x^2)^{3/2}} \tag{46}$$

Η $x-$συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου για όλη τη ράβδο στο σημείο P θα είναι

$$E_{P_x} = \int dE_{P_x} = -k_e \lambda \int \frac{xdx}{(r^2+x^2)^{3/2}} \tag{47}$$

ενώ η $y-$συνιστώσα

$$E_{P_y} = \int dE_{P_y} = -k_e \lambda \int \frac{rdx}{(r^2+x^2)^{3/2}} \tag{48}$$

και έτσι

$$E_{P_x} = -k_e \lambda \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+r^2)^{3/2}} \tag{49}$$

$$E_{P_y} = -k_e \lambda r \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+r^2)^{3/2}} \tag{50}$$

Από το δοθέν ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+r^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{r} \tag{51}$$

και από το ολοκλήρωμα των διαλέξεων

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{x}{r^2\sqrt{x^2+r^2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{r^2} \tag{52}$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{r^2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{r^2}{x^2}}} = 1 \tag{53}$$

Οπότε τελικά

$$E_{P_x} = -\frac{k_e\lambda}{r} \tag{54}$$

$$E_{P_y} = -\frac{k_e\lambda}{r} \tag{55}$$

και τελικά

$$\vec{E}_P = E_{P_x}\vec{i} + E_{P_y}\vec{j} = -k_e\frac{\lambda}{r}(\vec{i}+\vec{j}) \tag{56}$$

Συνολικές μονάδες: 145

Άριστα: 110