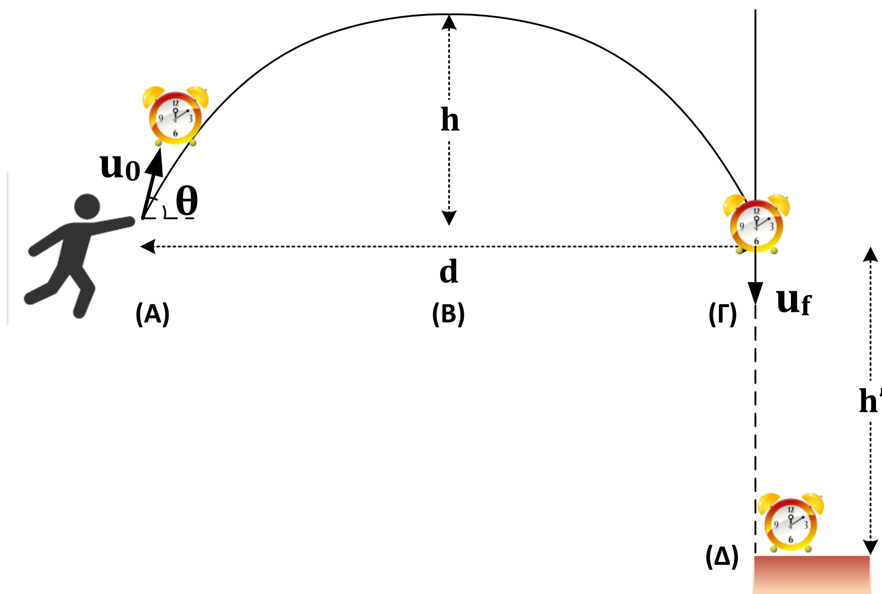
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2017-18
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τελική Εξέταση

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή τσέπης.

1. **Θέμα 1ο: Κλασική Μηχανική + Κυματική - 30 μονάδες**
Ένα πρωϊνό το ξυπνητήρι σας χτυπά κατά λάθος σε νωρίτερη ώρα απ' αυτή που θέλατε να ξυπνήσετε. Πάνω στα νεύρα σας, το πιάνετε και το πετάτε μακριά. Για κακή σας τύχη, αυτό πέφτει από το παράθυρό σας κάτω στο δρόμο. Θεωρήστε ότι το ύψος από το πάτωμα του δωματίου σας ως το χέρι σας είναι αμελητέο. Απαντήστε στα παρακάτω



Σχήμα 1: *Θέμα 1: διάγραμμα σεναρίου.*

ερωτήματα:

(α') **(2.5 μ.)** Αν η αρχική ταχύτητα ρίψης του ξυπνητηριού από το χέρι σας ήταν $u_0 = 10$ m/s και το ταβάνι σας έχει ύψος $h = 3$ m, τότε ποιά η γωνία ρίψης θ αν υποθέσετε ότι το ξυπνητήρι περνά "ξυστά" (χωρίς να ακουμπά) από το ταβάνι σας;

(β') **(2.5 μ.)** Πόσο χρόνο t χρειάζεται για να φτάσει στο ίδιο ύψος με το ύψος ρίψης σας;

(γ') **(2.5 μ.)** Πόση απόσταση d θα έχει διανύσει όταν φτάσει στο παραπάνω ύψος;

(δ') **(10 μ.)** Σε ποιές χρονικές στιγμες t_1, t_2 της πορείας του θα έχει δυναμική ενέργεια U υποδιπλάσια της κινητικής του K;

(ε') **(12.5 μ.)** Αν το ξυπνητήρι χτύπησε στο παράθυρό σας, χάνοντας έτσι την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του και πέφτοντας κατακόρυφα προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα u_f, τότε ποιά είναι η συχνότητα που ακούτε θλιμμένος/η από το παράθυρό σας λίγο πριν γίνει θρύψαλλα, αν η συχνότητα εκπομπής του ήταν $f = 1200$ Hz; Θεωρήστε ότι μένετε σε διαμέρισμα σε ύψος $h' = 15$ m από το δρόμο και ότι έξω έχει ηλιόλουστη μέρα με θερμοκρασία 20 C.

Λύση:

(α΄) Η κίνηση του ξυπνητηριού από το χέρι μας ως το παράθυρο αποτελεί βολή. Αφού μας δίνεται το μέγιστο ύψος h, τότε από το γνωστό τύπο έχουμε

$$h = \frac{u_0^2 \sin^2(\theta)}{2g} \Longleftrightarrow 3 = \frac{10^2 \sin^2(\theta)}{19.6} \Longrightarrow \sin^2(\theta) = 0.588 \Longrightarrow \theta \approx 50^o \tag{1}$$

(β΄) Η κίνηση στον κατακόρυφο άξονα είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε από το σημείο Α ως το σημείο Γ έχουμε

$$y_\Gamma = y_\mathrm{A} + u_{y_A} t - \frac{1}{2} g t^2 \Longleftrightarrow 0 = u_0 \sin(50^o) t - 4.9 t^2 \Longleftrightarrow (4.9t - 7.66)t = 0 \Longrightarrow t = 0 \text{ ή } t = 1.56 \text{ s} \tag{2}$$

(γ΄) Η απόσταση d ισούται με το εύρος της βολής, για το οποίο γνωρίζουμε τον τύπο

$$d = \frac{u_0^2 \sin(2\theta)}{g} = \frac{100 \sin(100^o)}{9.8} \approx 10 \text{ m} \tag{3}$$

(δ΄) Έστω δυο σημεία A_1 και A_2 της πορείας του στα οποία ισχύει η ζητούμενη σχέση, δηλ.

$$K = 2U \Longleftrightarrow \frac{1}{2} m u^2 = 2mgy \Longleftrightarrow y = \frac{u^2}{4g} \tag{4}$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε Α.Δ.Μ.Ε αφού η μόνη δύναμη που ασκείται στο σύστημα σώματος-Γης είναι το βάρος, η οποία είναι συντηρητική δύναμη. Επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι το πάτωμα του δωματίου (που ταυτίζεται με το επίπεδο ρίψης του ξυπνητηριού). Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε στα σημεία Α και A_1 (ή A_2, δεν έχει σημασία). Έχουμε

$$K_A + U_A = K_{A_1} + U_{A_1} \tag{5}$$
$$\frac{1}{2} m u_A^2 + 0 = \frac{1}{2} m u_{A_1}^2 + m g y_{A_1} \tag{6}$$
$$\frac{1}{2} m u_A^2 + 0 = \frac{1}{2} m u_{A_1}^2 + m g \frac{u_{A_1}^2}{4g} \tag{7}$$
$$u_A^2 = u_{A_1}^2 + \frac{u_{A_1}^2}{2} \tag{8}$$
$$\frac{200}{3} = u_{A_1}^2 \tag{9}$$
$$u_{A_1} = 8.165 \text{ m/s} \tag{10}$$

Από την εξίσωση της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης που εκτελείται στον άξονα y, έχουμε μεταξύ των σημείων A και A_1

$$y_{A_1} = y_A + u_{y_A} t - \frac{1}{2} g t^2 \Longleftrightarrow \frac{u_{A_1}^2}{4g} = 0 + u_0 \sin(50^o) t - 4.9 t^2 \Longleftrightarrow 4.9 t^2 - 7.66 t + 1.7 = 0 \tag{11}$$

Το τριώνυμο δίνει λύσεις

$$t_1 \approx 1.3 \text{ s} \tag{12}$$
$$t_2 \approx 0.27 \text{ s} \tag{13}$$

που είναι και οι ζητούμενες χρονικές στιγμές.

(εʹ) Αρχικά πρέπει να βρούμε την ταχύτητα του ήχου, η οποία είναι

$$u_{sound} = 331\sqrt{1+\frac{T_c}{273}} = 331\sqrt{1+\frac{20}{273}} \approx 343 \text{ m/s} \tag{14}$$

Στο σημείο Γ υπάρχει μόνο η y-συνιστώσα της ταχύτητας η οποία είναι

$$u_f = u_{y_\Gamma} = u_\Gamma \sin(50^o) = u_0 \sin(50^o) = 7.66 \text{ m/s} \tag{15}$$

με φορά προς τα κάτω, αφού γνωρίζουμε ότι τα μέτρα των ταχυτήτων στα σημεία Α και Γ είναι τα ίδια, καθώς και η γωνία των συνιστωσών. Στο σύστημα σώμα-Γη, ισχύει η Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των σημείων Γ και Δ, αφού η μόνη συντηρητική δύναμη είναι το βάρος. Ορίζουμε επίπεδο αναφοράς μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος. Οπότε

$$K_\Gamma + U_\Gamma = K_\Delta + U_\Delta \tag{16}$$

$$\frac{1}{2}mu_\Gamma^2 + mgh' = \frac{1}{2}mu_\Delta^2 + 0 \tag{17}$$

$$u_\Gamma^2 + 2gh' = u_\Delta^2 \tag{18}$$

$$7.66^2 + 19.6h' = u_\Delta^2 \tag{19}$$

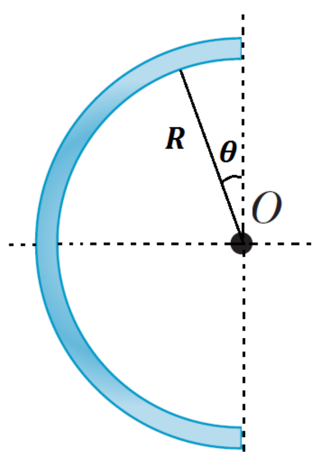
$$u_\Delta^2 = 352.68 \tag{20}$$

$$u_\Delta \approx 18.8 \text{ m/s} \tag{21}$$

Από τη σχέση του Doppler για πηγή που απομακρύνεται από τον παρατηρητή, έχουμε

$$f_\Delta = \frac{u_{sound}}{u_{sound}+u_\Delta} f = \frac{343}{343+11.5} 1200 = 1137 \text{ Hz} \tag{22}$$

2. **Θέμα 2ο: Ηλεκτρισμός - 30 μονάδες**
Λυγίζουμε μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδο μήκους L στο σχήμα που φαίνεται στο Σχήμα 2. Η ράβδος έχει



Σχήμα 2: *Θέμα 2: ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος.*

συνολικό φορτίο Q.

(αʹ) **(5 μ.)** Γράψτε το ηλεκτρικό δυναμικό V_O στο σημείο O στο κέντρο του ημικυκλίου συναρτήσει των Q, L, ως

$$V_O = k_e \frac{\pi Q}{L} \tag{23}$$

(βʹ) **(5 μ.)** Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο E στο σημείο O έχει μόνο $x-$συνιστώσα.

(γ΄) **(20 μ.)** Δείξτε αναλυτικά ότι το μέτρο της $x-$συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο O δίνεται από τη σχέση

$$E_x = 2k_e \frac{Q\pi}{L^2}$$

<u>Λύση:</u>

(α΄) Η συνεισφορά ενός τμήματος της ράβδου στο συνολικό δυναμικό στο σημείο είναι

$$dV = k_e \frac{dq}{R} \tag{24}$$

Όλα τα τμήματα ράβδου ισαπέχουν από το σημείο O σταθερή απόσταση $R = L/\pi$. Άρα

$$V = \int dV = k_e \int \frac{dq}{R} = k_e \frac{1}{R} \int dq = k_e \frac{Q}{R} = k_e \frac{Q\pi}{L} \tag{25}$$

(β΄) Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, αν επιλέξουμε ένα απειροστά μικρό τμήμα ράβδου $dx_1 = dx$ φορτίου dq ευρισκόμενο στο 2ο τεταρτημόριο υπό γωνία θ όπως στο σχήμα, κι ένα απειροστά μικρό τμήμα ράβδου $dx_2 = dx$ φορτίου dq ευρισκόμενο στο 3ο τεταρτημόριο υπό γωνία $\pi - \theta$, και σχεδιάσουμε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο O, τότε παρατηρούμε ότι οι $y-$συνιστώσες τους αλληλοακυρώνονται, αφού ισχύει

$$dE_1 = k_e \frac{dq}{R^2} = k_e \frac{\lambda dx_1}{R^2} \Longrightarrow dE_{1_y} = k_e \frac{\lambda dx}{R^2} \cos(\theta) \tag{26}$$

$$dE_2 = k_e \frac{dq}{R^2} = k_e \frac{\lambda dx_2}{R^2} \Longrightarrow dE_{2_y} = k_e \frac{\lambda dx}{R^2} \cos(\pi - \theta) = -k_e \frac{\lambda dx}{R^2} \cos(\theta) \tag{27}$$

(γ΄) Εφόσον για ένα απειροστά μικρό τμήμα ράβδου dx φορτίου dq, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο O έχει τιμή

$$dE_x = k_e \frac{dq}{R^2} \sin(\theta) \tag{28}$$

για όλη την κατανομή φορτίου θα είναι

$$E_x = \int dE_x = k_e \int \frac{dq}{R^2} \sin(\theta) \tag{29}$$

Όμως

$$dq = \lambda dx = \lambda R d\theta \tag{30}$$

οπότε

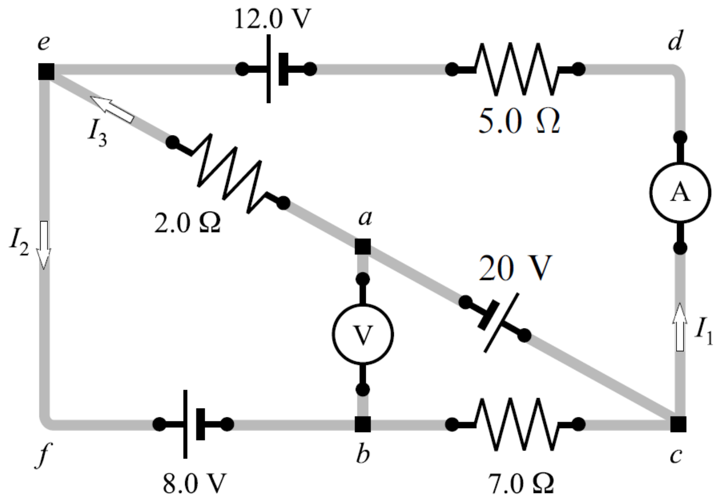
$$E_x = k_e \int \frac{dq}{R^2} \sin(\theta) = k_e \int \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \sin(\theta) = k_e \frac{\lambda}{R} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \tag{31}$$

$$= \frac{k_e \lambda}{R} (-\cos(\theta))\Big]_0^{\pi} = \frac{k_e \lambda}{R} (-\cos(\pi) + \cos(0)) = 2 \frac{k_e \lambda}{R} \tag{32}$$

$$= 2k_e \frac{Q}{L} \frac{\pi}{L} = 2k_e \frac{Q\pi}{L^2} \tag{33}$$

3. **Θέμα 3ο: Ηλεκτρικά Κυκλώματα - 30 μονάδες**

(α΄) **(20 μ.)** Ένα αμπερόμετρο (ammeter) μετρά την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που το διαπερνά, ενώ ένα βολτόμετρο (voltmeter) μετρά την τάση (διαφορά δυναμικού) που υπάρχει στα άκρα του. Για το ηλεκτρικό κύκλωμα του Σχήματος 3, βρείτε τις ενδείξεις του αμπερόμετρου και του βολτόμετρου. Υποθέστε ότι οι συσκευές αυτές είναι ιδανικές (το βολτόμετρο έχει άπειρη αντίσταση, άρα είναι σαν να μην υπάρχει στο κύκλωμα, ενώ το αμπερόμετρο μηδενική αντίσταση, άρα αφήνει το ρεύμα του κλάδου του να το διαπεράσει).



Σχήμα 3: *Θέμα 3: ηλεκτρικό κύκλωμα.*

(β΄) (**10 μ.**) *Πυκνωτές*: Ένας τεχνικός έρχεται σπίτι σας για να επισκευάσει το στερεοφωνικό ενισχυτή σας. Στην προσπάθειά του αυτή, χρειάζεται έναν πυκνωτή χωρητικότητας 100 μF ικανό να αντέξει διαφορά δυναμικού $\Delta V = 90$ V ανάμεσα στις πλάκες του. Μαζί του κουβαλάει ένα κουτί με πέντε (5) πυκνωτές των 100 μF, που όμως ο καθένας αντέχει $\Delta V = 50$ V. Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τους πυκνωτές αυτούς για να επιτύχετε τα ζητούμενα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά; Χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν και οι πέντε πυκνωτές; Εξηγήστε.

Λύση:

(α΄) Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο $cdefc$:

$$-5I_1 + 12 - 8 - 7I_2 = 0 \Longleftrightarrow 5I_1 + 7I_2 = 4 \tag{34}$$

Όμοια για το βρόχο $cdeac$:

$$-5I_1 + 12 + 2I_3 + 20 = 0 \Longleftrightarrow 5I_1 - 2I_3 = 32 \tag{35}$$

Στον κόμβο e ισχύει ο 1ος κανόνας του Kirchhoff, δηλ.

$$I_1 + I_3 = I_2 \tag{36}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στη σχέση (34) έχουμε

$$5I_1 + 7I_1 + 7I_3 = 4 \Longrightarrow I_3 = \frac{4 - 12I_1}{7} \tag{37}$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (35), παίρνουμε

$$5I_1 - 2\frac{4 - 12I_1}{7} = 32 \Longrightarrow I_1 = 3.9 \text{ A} \tag{38}$$

που είναι και η ένδειξη του αμπερόμετρου. Κατά συνέπεια, $I_2 = -2.2$ A. Για να βρούμε την ένδειξη του βολτόμετρου, δηλ. το V_{ab}, γράφουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο $abca$:

$$V_{ab} - 7I_2 - 20 = 0 \Longrightarrow V_{ab} = 4.3 \text{ V} \tag{39}$$

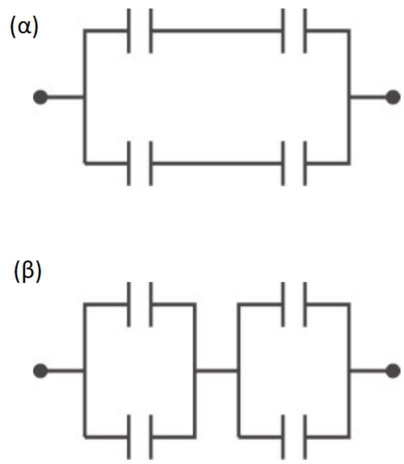
(β΄) Αν τοποθετήσει δυο πυκνωτές σε σειρά, η συνολική διαφορά δυναμικού θα υποδιπλασιαστεί για τον καθένα, δίνοντας έτσι διαφορά δυναμικού ίση με 45 V στον καθένα. Όμως η συνολική χωρητικότητα θα είναι η μισή απ'οση χρειάζεται. Για να διπλασιάσουμε τη χωρητικότητα, άλλο ένα ζεύγος πυκνωτών σε σειρά πρέπει να προστεθεί παράλληλα με το πρώτο ζεύγος. Η συνολική χωρητικότητα τότε θα είναι

$$\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)^{-1} = 100 \text{ μ}F \tag{40}$$

Εναλλακτικά, μπορεί να συνδέσει δυο παράλληλους πυκνωτές σε σειρά με άλλους δυο παράλληλους πυκνωτές. Η συνολική διαφορά δυναμικού σε κάθε παράλληλη διάταξη θα είναι 45 V. Η ισοδύναμη χωρητικότητα θα είναι

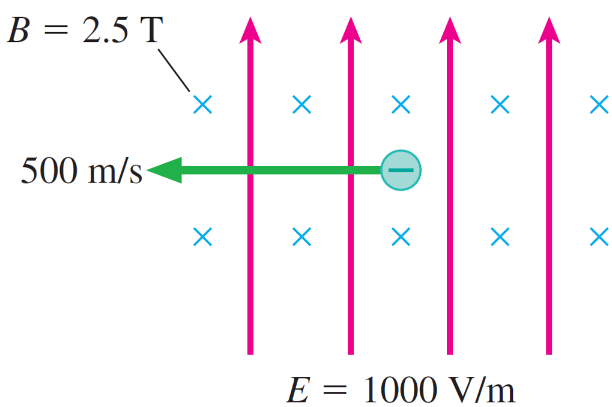
$$\frac{1}{(100+100)^{-1}+(100+100)^{-1}} = 100\ \mu F \tag{41}$$

Σε κάθε περίπτωση, ένας πυκνωτής περισσεύει. Οι διατάξεις απεικονίζονται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: *Διατάξεις πυκνωτών.*

4. **Θέμα 4ο: Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία - 20 μονάδες**
Είστε μηχανικός στο CERN και παρατηρείτε ένα πείραμα στον επιταχυντή LHC. Ένα ηλεκτρόνιο κινείται υπό την επίδραση ομογενούς ηλεκτρικού **και** μαγνητικού πεδίου όπως στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: *Σχήμα Θέματος 4.*

(α΄) **(10 μ.)** Ποιό είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της *επιτάχυνσης* του ηλεκτρονίου στο στιγμιότυπο που βλέπετε;

(β΄) **(10 μ.)** Για την επαναληπτική δοκιμή του πειράματος, σας ζητούν να ρυθμίσετε το ηλεκτρικό πεδίο E, ώστε η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου στο παραπάνω στιγμιότυπο να είναι μηδενική. Τι κάνετε; Εξηγήστε αναλυτικά.

<u>Λύση:</u>

(α΄) Από τον κανόνα του δεξιού χεριού, βρίσκουμε ότι η μαγνητική δύναμη έχει φορά κατακόρυφα προς τα πάνω (προσέξτε ότι πρόκειται για ηλεκτρόνιο, άρα η μαγνητική δύναμη θα είναι αντίθετης φοράς από τη φορά του αντίχειρα στη χρήση του κανόνα), παράλληλα με τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές. Η ηλεκτρική δύναμη, αντίθετα, έχει φορά κατακόρυφα προς τα κάτω, παράλληλα με τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές. Από το 2ο Νόμο του Newton και υποθέτοντας θετική φορά προς τα πάνω, ισχύει

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \sum F = ma \Longleftrightarrow F_B - F_E = m_e a \Longrightarrow a = \frac{F_B - F_E}{m_e} \tag{42}$$

$$= \frac{2 \times 10^{-16} - 1.6 \times 10^{-16}}{9 \times 10^{-31}} \tag{43}$$

$$= \frac{0.4 \times 10^{-16}}{9 \times 10^{-31}} \tag{44}$$

$$= \frac{4}{9} \times 10^{14}\ \mathrm{m/s^2} \tag{45}$$

με φορά προς τα πάνω, αφού η μαγνητική δύναμη έχει μεγαλύτερο μέτρο από την ηλεκτρική.

(β΄) Για να υπάρχει μηδενική επιτάχυνση, πρέπει

$$\sum F = 0 \Longleftrightarrow F_B = F_E \Longleftrightarrow F_B = qE \Longrightarrow E = \frac{F_B}{q} = 1250\ \mathrm{N/C} \tag{46}$$

Συνολικές μονάδες: 110
Άριστα: 100

Καλή Επιτυχία!