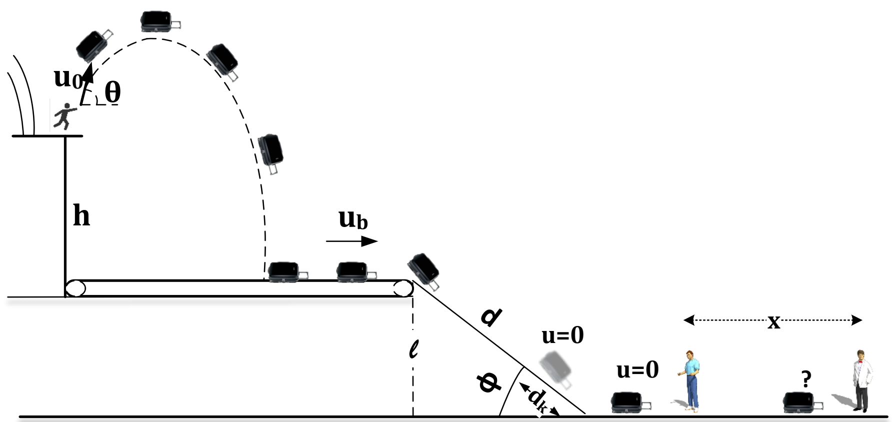
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τελική Εξέταση

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή τσέπης.

1. **Θέμα 1ο: Κλασική Μηχανική - 35 μονάδες**
Στο αεροδρόμιο Charles De Gaulle του Παρισίου, συνήθιζαν να πετούν τις αποσκευές από μεγάλο ύψος επάνω στους κυλιόμενους ιμάντες, με αποτέλεσμα πολλές φορές να υπάρχουν σοβαρές φθορές. Θεωρήστε το Σχήμα 1, όπου ένας υπάλληλος αεροδρομίου πετά τη αποσκευή σας από ύψος $h = 4$ m με αρχική ταχύτητα $u_0 = 5$ m/s και υπό γωνία $\theta = 60^o$ επάνω σε έναν κυλιόμενο ιμάντα.



Σχήμα 1: Θέμα 1ο: αποσκευή στο αεροδρόμιο

(α΄) **(2 μ.)** Ποιό είναι το μέγιστο ύψος που θα φτάσει η αποσκευή;

(β΄) **(2 μ.)** Σε πόσο χρόνο θα πέσει η αποσκευή σας επάνω στον κυλιόμενο ιμάντα;

(γ΄) **(5 μ.)** Σε ποιό ύψος h_{eq} η κινητική ενέργεια της αποσκευής σας γίνεται ίση με το μισό της βαρυτικής δυναμικής της ενέργειας, δηλ. σε ποιό ύψος $K = 0.5U_{grav}$; Θεωρήστε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο του υπαλλήλου.

Η αποσκευή σας προχωρά ακίνητη επάνω σε ιμάντα χωρίς τριβές και συναντά κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ με τριβές όπως στο Σχήμα. Η ταχύτητα του ιμάντα είναι $u_b = 4$ m/s, το μήκος του κεκλιμένου είναι $d = 5$ m, και το ύψος του είναι $l = 2.5$ m

(δ΄) **(15 μ.)** Ποιός ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ_k του κεκλιμένου αν η αποσκευή φτάνει με μηδενική ταχύτητα στη βάση του;

Υποθέστε ότι η αποσκευή φτάνει τελικά στη βάση του κεκλιμένου, όπου περιμένει ένας φίλος σας κι εσείς, όπως στο Σχήμα. Η μεταξύ σας απόσταση είναι $x = 4.5$ m. Ο φίλος σας βιάζεται πολύ, και δίνοντάς στην αποσκευή αρχική κινητική ενέργεια $K = 29.4$ J, προσπαθεί να σας τη μεταφέρει γρήγορα μέσω ολίσθησης, ενώ ο ίδιος φεύγει τρέχοντας να καλέσει ταξί.

(ε΄) **(11 μ.)** Αν η αποσκευή έχει βάρος $B = 117.6$ N, και το επίπεδο που κείται η αποσκευή έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_k = 0.25$, τότε η αποσκευή θα φτάσει (ή και προσπεράσει) σε εσάς ή θα μείνει κάπου ανάμεσα σε σας και την αρχική θέση του φίλου σας;

Λύση:

(α') **(2 μ.)** Από το επίπεδο του υπαλλήλου, το μέγιστο ύψος δίνεται από τη σχέση

$$h_{max} = \frac{u_i^2 \sin^2(\theta_i)}{2g} = 0.9566 \text{ m} \tag{1}$$

(β') **(2 μ.)** Θεωρώντας ως $y = 0$ την επιφάνεια του ιμάντα, η $y-$συνιστώσα της βαλίτσας περιγράφεται από τη σχέση

$$y_f = y_i + u_i \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \Longleftrightarrow 0 = 4 + 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2} \times 9.8t^2 \Longleftrightarrow 4.9t^2 - 4.33t - 4 = 0 \tag{2}$$

η οποία έχει ρίζες $t_1 = 1.4476$ s και $t_2 = -0.5639$ s, από τις οποίες η θετική είναι η αποδεκτή.

(γ') **(5 μ.)** Έστω A το σημείο εκκίνησης της βαλίτσας από τα χέρια του υπαλλήλου, και B το σημείο της τροχιάς όπου ισχύει η ζητούμενη σχέση. Εφαρμόντας Α.Δ.Μ.Ε στο σύστημα Γη-βαλίτσα, με επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο του υπαλλήλου, έχουμε

$$\begin{aligned}
E_{mech}^A &= E_{mech}^B && (3)\\
K^A + U_g^A &= K^B + U_g^B && (4)\\
\frac{1}{2}mu_A^2 + 0 &= K^B + U_g^B && (5)\\
\frac{1}{2}mu_A^2 + 0 &= U_g^B + \frac{1}{2}U_g^B && (6)\\
\frac{1}{2}mu_A^2 + 0 &= \frac{3}{2}U_g^B && (7)\\
\frac{1}{2}mu_A^2 + 0 &= \frac{3}{2}mgh_{eq} && (8)\\
u_A^2 &= 3gh_{eq} && (9)\\
h_{eq} &= \frac{u_A^2}{3g} && (10)\\
h_{eq} &= 0.85 \text{ m} && (11)
\end{aligned}$$

(δ') **(9 μ.)** Έστω A και B τα σημεία εκκίνησης και τερματισμού της βαλίτσας. Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Κ.Ε. στο σύστημα της βαλίτσας, έχουμε

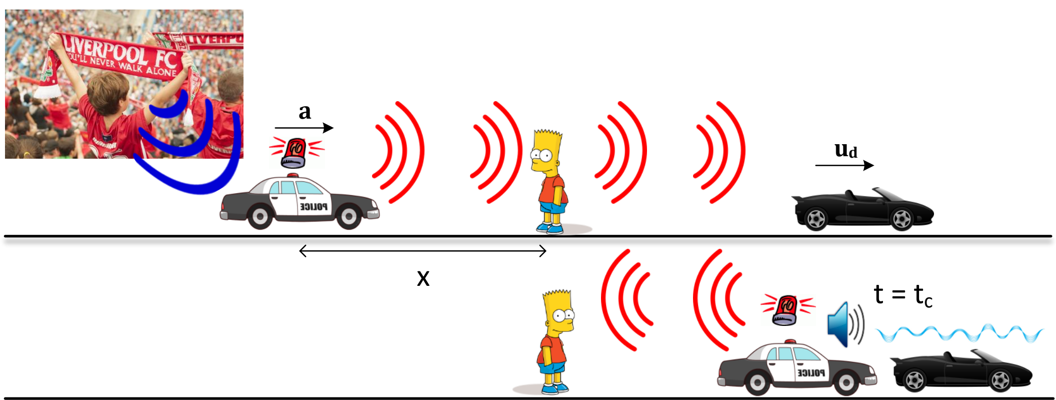
$$\begin{aligned}
\Delta K &= \sum W_{ext} && (12)\\
K_B - K_A &= W_T + W_B && (13)\\
0 - \frac{1}{2}mu_A^2 &= -f_k d + mg\sin(\phi)d && (14)\\
-\frac{1}{2}mu_A^2 &= -\mu_k n d + mg\sin(\phi)d && (15)\\
-\frac{1}{2}mu_A^2 &= -\mu_k mg\cos(\phi)d + mg\sin(\phi)d && (16)\\
-\frac{1}{2}u_A^2 &= -\mu_k g\cos(\phi)d + g\sin(\phi)d && (17)\\
\mu_k &= \frac{\frac{1}{2}u_A^2 + g\sin(\phi)d}{g\cos(\phi)d} = 0.7659 \approx 0.77 && (18)
\end{aligned}$$

(ε') **(11 μ.)** Έστω A και B τα σημεία εκκίνησης και τερματισμού της βαλίτσας, με x την απόσταση που διανύει από το Α στο Β. Εφαρμόζοντας ξανά Θ.Μ.Κ.Ε. στο σύστημα της βαλίτσας, έχουμε

$$\Delta K = \sum W_{ext} \tag{19}$$
$$K_B - K_A = W_T \tag{20}$$
$$0 - K_A = -f_k x \tag{21}$$
$$-K_A = -\mu_k n x \tag{22}$$
$$K_A = \mu_k m g x \tag{23}$$
$$x = \frac{K_A}{\mu_k m g} = \frac{K_A}{\mu_k B} = 1 \text{ m} \tag{24}$$

Άρα η βαλίτσα θα προχωρήσει μόλις ένα μέτρο και θα σταματήσει προτού φτάσει σε εμάς.

2. **Θέμα 2ο: Κυματική - 35 μονάδες**
Στο παραδοσιακό ποδοσφαιρικό ντέρμπι της Αγγλίας, η Λίβερπουλ ανοίγει το σκορ απέναντι στη Μάντσεστερ Γιουνάιτεντ. Ένας αστυνομικός εν υπηρεσία, φανατικός οπαδός της Λίβερπουλ, κάθεται σταθμευμένος στο περιπολικό, αγωνιόντας για το αποτέλεσμα.



Σχήμα 2: Θέμα 2ο: αστυνομικός σε καταδίωξη.

(αʹ) **(5 μ.)** Αν η απόσταση του περιπολικού από το γήπεδο είναι 1.2 km, και η θερμοκρασία είναι $T_c = 22^oC$, πόση ώρα μετά το γκολ θα ακούσει τις φωνές/πανηγυρισμούς των φιλάθλων από το γήπεδο;

Πάνω στη χαρά του, δεν προσέχει ότι δίπλα του περνά ένας οδηγός με υπερβολική ταχύτητα. Σύμφωνα με το ραντάρ του, η ταχύτητα του οδηγού είναι σταθερή και ίση με $u_d = 75.6$ km/h. Αφού περάσουν $t = 3$ s μέχρι να συνέλθει, επιταχύνει το περιπολικό για να τον φτάσει με σταθερή επιτάχυνση $a = 3$ m/s^2, βάζοντας ταυτόχρονα τη σειρήνα του σε λειτουργία.

(βʹ) **(7.5 μ.)** Η συχνότητα της σειρήνας του είναι $f_0 = 1050$ Hz. Ένας ακίνητος πεζός βρίσκεται σε απόσταση $x = 20$ m από το σημείο εκκίνησης του περιπολικού (όπως στο σχήμα). Ποιά συχνότητα ακούει *στιγμιαία* ο πεζός μετά από $t = 2$ s και ποιά μετά από $t = 6$ s;

(γʹ) **(2.5 μ.)** Αν η ένταση του ηχητικού κύματος είναι $I = 10^{-4}$ W/m^2, ποιά η ηχοστάθμη της σειρήνας σε decibel;

(δʹ) **(12.5 μ.)** Μετά από πόσα δευτερόλεπτα t_c θα βρίσκεται ακριβώς στην ίδια θέση με τον παραβάτη οδηγό;

Αφού τον φτάσει, τον προειδοποιεί από το μεγάφωνο του περιπολικού, και τον καλεί να κάνει στην άκρη.

(εʹ) **(7.5 μ.)** Τι είδους κύμα μεταδίδεται από το μεγάφωνο; Ποιό το μέσο διάδοσής του; Ποιό είναι το πλάτος πίεσης και το πλάτος μετατόπισης που αντιστοιχεί σε αυτό το κύμα, αν η πυκνότητα του αέρα είναι $\rho = 1.2$ kg/m^3, και η ηχοστάθμη του φωνητικού κύματος είναι κατά μέσο όρο ίση με 60 dB;[1]

[1]Χρησιμοποιήστε (αν και είναι πολύ προσεγγιστικό) το I_0 του τυπολογίου.

Λύση:

(α΄) **(5 μ.)** Η ταχύτητα του ηχητικού κύματος στον αέρα σε θερμοκρασία 22^oC είναι

$$u = 331\sqrt{1+\frac{22}{273}} = 344 \text{ m/s} \tag{25}$$

Άρα το κύμα χρειάζεται χρόνο

$$t = \frac{d}{u} = \frac{1200}{344} = 3.49 \text{ s} \tag{26}$$

για να φτάσει στα αυτιά του αστυνομικού.

(β΄) **(7.5 μ.)** Το περιπολικό εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, και σε $t = 2$ s θα έχει ταχύτητα $u_{t=2} = at = 6$ m/s, ενώ θα βρίσκεται σε θέση $x_f = x_i + u_i t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 = 6$ m, άρα θα πλησιάζει τον πεζό, οπότε η συχνότητα που ακούει αυτός στιγμιαία θα είναι

$$f' = \frac{u}{u-u_s}f = \frac{344}{344-6}1050 = 1068 \text{ Hz} \tag{27}$$

Σε $t = 6$ s, το περιπολικό θα έχει ταχύτητα $u_{t=6} = at = 18$ m/s, ενώ θα βρίσκεται σε θέση $x_f = x_i + u_i t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 = 54$ m, άρα θα απομακρύνεται από τον πεζό, οπότε η συχνότητα που ακούει αυτός στιγμιαία θα είναι

$$f' = \frac{u}{u+u_s}f = \frac{344}{344+18}1050 = 998 \text{ Hz} \tag{28}$$

(γ΄) **(2.5 μ.)** Η ηχοστάθμη της σειρήνας δίνεται από τη σχέση

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} \tag{29}$$

με I_0 το κατώφλι ακουστότητας στη συγκεκριμένη συχνότητα. Άρα

$$\beta = 10\log_{10}\frac{10^{-4}}{10^{-12}} = 10\log_{10}10^8 = 80 \text{ dB} \tag{30}$$

(δ΄) **(12.5 μ.)** Θεωρούμε $t = 0$ τη στιγμή που το περιπολικό ξεκινά την κίνησή του. Τότε, ο παραβάτης θα έχει ήδη προχωρήσει για χρόνο $t = 3$ s απόσταση

$$x_{i_{car}} = ut = \frac{75600}{3600}\times 3 = 21\times 3 = 63 \text{ m} \tag{31}$$

και άρα η κίνησή του περιγράφεται από τη σχέση

$$x_{car} = x_{i_{car}} + ut = 63 + 21t \tag{32}$$

ενώ το περιπολικό εκτελεί, όπως είπαμε, ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, και η θέση του δίνεται από τη σχέση

$$x_{police} = x_i + u_i t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{3}{2}t^2 \tag{33}$$

Θέλουμε να βρούμε για ποιό t έχουμε $x_{car} = x_{police}$. Άρα

$$\begin{aligned} x_{car} &= x_{police} && (34)\\ 63+21t &= \frac{3}{2}t^2 && (35)\\ \frac{3}{2}t^2 - 21t - 63 &= 0 && (36) \end{aligned}$$

το οποίο έχει ρίζες $t_1 = 16.5394$ s και $t_2 = -2.5394$. Προφανώς κρατάμε τη θετική ρίζα και άρα ο χρόνος t_c είναι $t_c \approx 16.5$ s.

(ε΄) **(7.5 μ.)** Το μεγάφωνο μεταδίδει διαμήκη κύματα, αφού πρόκειται για ηχητικά κύματα με μέσο διάδοσής τον αέρα. Το μέσο πλάτος πίεσης δίνεται από τη σχέση

$$\Delta P_{max} = \sqrt{2\rho u I} \tag{37}$$

με

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} \Longleftrightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{60/10} \Longleftrightarrow I = 10^6 \times 10^{-12} = 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2} \tag{38}$$

Οπότε

$$\Delta P_{max} = \sqrt{2 \times 1.2 \times 344 \times 10^{-6}} = 0.0287\ \mathrm{N/m^2} \tag{39}$$

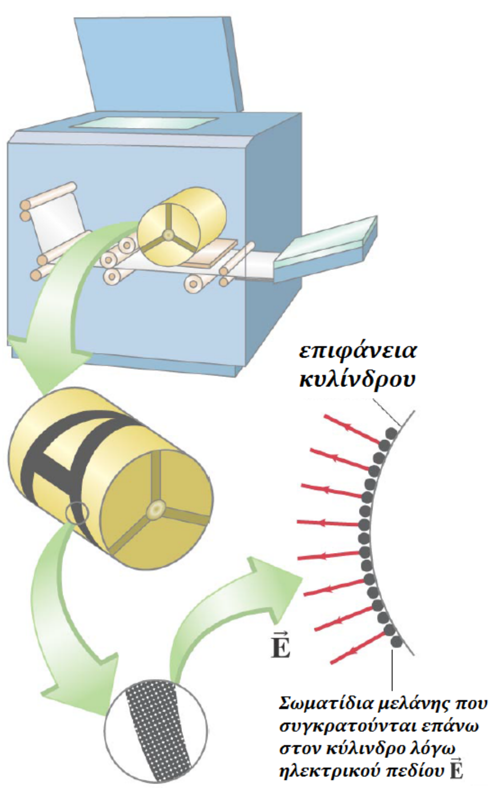
και

$$I = \frac{1}{2}\rho u \omega^2 s_{max}^2 \Longleftrightarrow s_{max} = \sqrt{\frac{2I}{\rho u \omega^2}} = 0.0048 \times 10^{-3} \times \omega^{-1} = 48 \times 10^{-7} \times \omega^{-1}\ \mathrm{m} \tag{40}$$

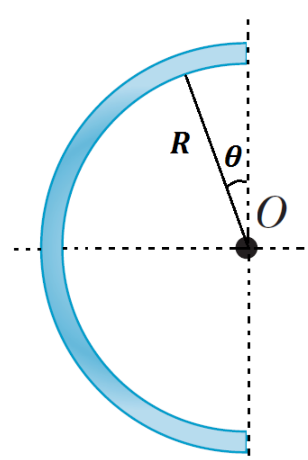
3. **Θέμα 3ο: Ηλεκτρισμός - 40 μονάδες**

(α΄) **(10 μ.)** *Φωτοτυπικό μηχάνημα*: Η λειτουργία του φωτοτυπικού βασίζεται στην διαρρύθμιση και "τακτοποίηση" θετικών φορτίων επάνω στην επιφάνεια ενός κυλίνδρου, ανάλογα με το σχέδιο που θέλουμε να φωτοτυπήσουμε, τα οποία έλκουν σταγονίδια μελάνης που είναι αρνητικά φορτισμένα. Τα σταγονίδια αυτά, όταν προσκολληθούν επάνω στον κύλινδρο, "λιώνονται" επάνω στο χαρτί, όπως στο Σχήμα (3). Υποθέστε ότι κάθε σταγονίδιο μελάνης έχει μάζα $m = 9 \times 10^{-16}$ kg και ότι είναι φορτισμένο αρνητικά με 20 ηλεκτρόνια. Αν η ηλεκτρική δύναμη F_e επάνω στο σταγονίδιο πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια του βάρους του, βρείτε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που απαιτείται κοντά στην επιφάνεια του κυλίνδρου ώστε το σταγονίδιο να συγκρατείται επάνω στον κύλινδρο.

(β΄) **(25 μ.)** *Ηλεκτρικό Πεδίο και Δυναμικό*: Λυγίζουμε μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδο μήκους L στο σχήμα που φαίνεται στο Σχήμα (4). Η ράβδος έχει συνολικό φορτίο Q.



Σχήμα 3: Θέμα 3α: φωτοτυπικό μηχάνημα.



Σχήμα 4: Θέμα 3β: ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος.

i. **(5 μ.)** Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό V_O στο σημείο O, στο κέντρο του ημικυκλίου συναρτήσει των Q, L.

ii. **(5 μ.)** Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο E στο σημείο O έχει μόνο $x-$συνιστώσα.

iii. **(15 μ.)** Δείξτε αναλυτικά ότι το μέτρο της $x-$συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο O δίνεται από τη σχέση

$$E_x = 2k_e \frac{Q\pi}{L^2}$$

(γ΄) **(5 μ.)** *Αντιστάσεις*: Ένας τεχνικός έρχεται σπίτι σας για να ελέγξει ένα κύκλωμα που περιέχει έναν αντιστάτη αντίστασης R. Προτείνει ένα καλύτερο σχέδιο κυκλώματος που θα περιλαμβάνει έναν αντιστάτη αντίστασης $R' = \frac{7}{3}R$. Κουβαλάει μαζί του τρεις αντιστάτες, καθένας με αντίσταση R. Συνδυάζοντας αυτούς τους τρεις αντιστάτες με κάποιο τρόπο, και βάζοντάς τους σε σειρά με τον αρχικό αντιστάτη αντίστασης R, πιστεύει ότι θα πετύχει την επιθυμητή αντίσταση R'. Πιστεύετε ότι μπορεί να το κάνει; Αιτιολογήστε επαρκώς την απάντησή σας.

Λύση:

(α΄) **(10 μ.)** *Φωτοτυπικό μηχάνημα*: Η ηλεκτρική δύναμη επάνω σε ένα σταγονίδιο μελάνης φορτίου $q = 20e$ έχει μέτρο $F_e = qE$. Αυτή η δύναμη πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια του βάρους του σωματιδίου. Άρα

$$qE \geq 2mg \Longleftrightarrow E \geq \frac{2mg}{q} = \frac{2(9\times10^{-16})9.8}{20\times1.6\times10^{-19}} = 5.5125\times10^3 \text{ N/C}$$

(β΄) **(25 μ.)** *Ηλεκτρικό Πεδίο και Δυναμικό*:

i. **(5 μ.)** Ένα απειροστά μικρό τμήμα ράβδου με φορτίο dq συνεισφέρει δυναμικό

$$dV = k_e \frac{dq}{R} \tag{41}$$

Όμως όλα τα απειροστά μικρά τμήματα ισαπέχουν από το σημείο Ο απόσταση $R = L/\pi$, άρα

$$V = \int dV = \int k_e \frac{dq}{R} = k_e \frac{1}{R}\int dq = k_e \frac{Q}{R} = k_e \frac{Q}{\frac{L}{\pi}} = k_e \frac{\pi Q}{L} \tag{42}$$

ii. **(5 μ.)** Επιλέγουμε δυο συμμετρικά ως προς τον άξονα xx' απειροστά μικρά τμήματα ράβδου. Καθένα συνεισφέρει ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}$, το οποίο έχει φορά προς μακριά από το τμήμα ράβδου που το προκαλεί. Αναλύοντας το διάνυσμα του ηλ. πεδίου σε δυο κάθετες συνιστώσες, παρατηρούμε ότι οι $y-$συνιστώσες αλληλοακυρώνονται, καθώς έχουν ίδιο μέτρο (τα τμήματα ράβδου είναι συμμετρικά - έχουν ίδιο φορτίο και ισαπέχουν από το σημείο Ο), και αντίθετη κατεύθυνση, αφήνοντας μόνο τις $x-$συνιστώσες. Άρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο $x-$συνιστώσα στο σημείο Ο.

iii. **(15 μ.)** Η $x-$συνιστώσα του ηλ. πεδίου δίνεται από τη σχέση

$$E_x = \int dE_x = \int dE\sin(\theta) = k_e \int \frac{dq\sin(\theta)}{R^2} \tag{43}$$

Όμως $dq = \lambda ds = \lambda R d\theta$, με ds το απειροστά μικρό τόξο που αντιστοιχεί σε ένα τμήμα ράβδου που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα y, και λ τη γραμμική πυκνότητα φορτίου, $\lambda = Q/L$. Οπότε

$$\begin{aligned}
E_x &= k_e \int \frac{\lambda R d\theta \sin(\theta)}{R^2} && (44)\\
&= \frac{k_e\lambda}{R^2}\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta && (45)\\
&= \frac{k_e\lambda}{R}\left(-\cos(\theta)\right)\Big]_0^\pi && (46)\\
&= 2k_e\frac{\lambda}{R} = 2k_e\frac{\frac{Q}{L}}{\frac{L}{\pi}} = 2k_e\frac{Q\pi}{L^2} && (47)
\end{aligned}$$

(γ΄) **(5 μ.)** *Αντιστάσεις:* Υπάρχουν τέσσερις πιθανοί τρόποι να συνδυαστούν οι τρεις αντιστάτες με τον τέταρτο.

i. ένας σε σειρά με τρεις παράλληλους: συνολική αντίσταση $R_{eq} = \frac{4}{3}R$.
ii. όλοι σε σειρά: συνολική αντίσταση $R_{eq} = 4R$.
iii. δυο σε σειρά με δυο παράλληλους: $R_{eq} = \frac{5}{2}R$.
iv. ένας σε σειρά με τρεις, οι οποίοι είναι ένας παράλληλα με δυο: $R_{eq} = \frac{5}{3}R$

Άρα ο τεχνικός δεν μπορεί να κάνει αυτό που ισχυρίζεται.

Συνολικές μονάδες: 110
Άριστα: 100

Καλή Επιτυχία!