ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή τσέπης.

- **Αντιγράψτε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας, βάζοντας τα 4 ψηφία του ΑΜ σας κάτω από τις σταθερές** a, b, c, d:

a	b	c	d

- **Αντικαταστήστε πριν οποιαδήποτε λύση σας τις σταθερές** a, b, c, d **όπου εμφανίζονται στα παρακάτω θέματα (μόνο με μικρά γράμματα) με τα αντίστοιχα ψηφία του ΑΜ σας.**
- **Λύσεις χωρίς αντικατάσταση ή με λάθος αντικατάσταση ψηφίων ΔΕΝ είναι αποδεκτές και μηδενίζονται.**
- **Ώρα ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ: 18:45 ΑΥΣΤΗΡΑ στο kafentz@csd.uoc.gr.**
- **Υπολογίστε όλες τις απαντήσεις σας με ακρίβεια 3ου δεκαδικού ψηφίου.**
- **Απαγορεύεται η συνεργασία και η αντιγραφή από οποιαδήποτε πηγή. Ο διδάσκων διατηρεί το δικαίωμα να καλέσει σε προφορική εξέταση αν υπάρξουν υποψίες αντιγραφής.**

Θέμα 1ο: 30 μονάδες

Μια δημοφιλής σειρά ρομπότ υψηλής AI (τεχνητής νοημοσύνης) της Boston Dynamics φαίνεται στο Σχήμα 1. Θέλετε να ελέγξετε μια παρτίδα που παραλάβατε για εκπαιδευτικούς σκοπούς στο μάθημα της Φυσικής, στα πλαίσια επίδειξης της δύναμης τριβής. Παίρνετε τυχαία ένα ρομπότ που έχει μάζα ab kg[*], και το ενεργοποιείτε από την κορυφή κεκλιμένου γωνίας $10 \cdot a$[†] μοιρών, με ύψος 50 m. Ο κινητήρας του ρομπότ δίνει μια σταθερή δύναμη 300 N κατά την κατάβαση του. Η ταχύτητα του ρομπότ στο τέλος του κεκλιμένου είναι 40 m/s. Βρείτε το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του κεκλιμένου και του ρομπότ (θεωρήστε το ρομπότ ως “σώμα”). Θεωρήστε $g = 9.8$ m/s^2.

Σχήμα 1: *Ρομπότ της Boston Dynamics.*

[*] ab είναι ο αριθμός που σχηματίζεται αν ενώσετε τα ψηφία a, b του ΑΜ σας - ΔΕΝ είναι ο αριθμός a επί b!
[†] Δέκα επί a.

Λύση: Θεωρούμε ως σύστημα το ρομπότ, το κεκλιμένο, και τη Γη. Το σύστημα είναι μη-απομονωμένο και ισχύει η Α.Δ.Ε. Έστω Α η θέση στην κορυφή του κεκλιμένου και Β η θέση στο τέρμα του, κι έστω Δx η απόσταση που διανύει το ρομπότ, από την Α ως τη Β. Επιλέγουμε διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας η βάση του κεκλιμένου. Θα είναι

$$\Delta U + \Delta E_{int} + \Delta K = W_F \tag{1}$$
$$U_B - U_A + \Delta E_{int} + K_B - K_A = W_F \tag{2}$$
$$0 - mgh + f_k \Delta x + \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 = F \Delta x \tag{3}$$

Η απόσταση Δx θα είναι

$$\sin(10a) = \frac{h}{\Delta x} \Longrightarrow \Delta x = \frac{h}{\sin(10a)} \tag{4}$$

οπότε

$$-mgh + f_k \frac{h}{\sin(10a)} + \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 = F \frac{h}{\sin(10a)} \tag{5}$$

Λόγω ισορροπίας του σώματος στον κατακόρυφο άξονα κατά την κίνησή του, θα είναι

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Longleftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_{g_y} = 0 \Longrightarrow n = mg\cos(10a) \tag{6}$$

οπότε

$$-mgh + \mu_k n \frac{h}{\sin(10a)} + \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 = F \frac{h}{\sin(10a)} \tag{7}$$
$$-mgh + \mu_k mg\cos(10a) \frac{h}{\sin(10a)} + \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 = F \frac{h}{\sin(10a)} \tag{8}$$
$$\mu_k = \frac{\frac{Fh}{\sin(10a)} + mgh - \frac{1}{2} m u_B^2}{mgh \frac{\cos(10a)}{\sin(10a)}} \tag{9}$$

Εναλλακτικά, το ρομπότ επιταχύνει στον άξονα $x'x$, ενώ ηρεμεί στον άξονα $y'y$. Από τους νόμους του Newton, έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Longleftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_{gy} = 0 \Longleftrightarrow \vec{n} + m\vec{g}\cos(\theta) \Longrightarrow n = mg\cos(\theta) \tag{10}$$
$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Longleftrightarrow \vec{F} + \vec{F}_{gx} + \vec{f}_k = m\vec{a}_x \Longrightarrow F + mg\sin(\theta) - \mu_k n = ma_x \tag{11}$$

Με αντικατάσταση

$$F + mg\sin(\theta) - \mu_k mg\cos(\theta) = ma_x \tag{12}$$
$$\mu_k = \frac{mg\sin(\theta) + F - ma_x}{mg\cos(\theta)} \tag{13}$$

με

$$u_B^2 = u_A^2 + 2a_x \Delta x \Longrightarrow a_x = \frac{u_B^2}{2\Delta x} \tag{14}$$

από τις εξισώσεις της κίνητικής. Οπότε τελικά

$$\mu_k = \frac{mg\sin(\theta) + F - m\frac{u_B^2}{2\Delta x}}{mg\cos(\theta)} \tag{15}$$
$$= \frac{mg\sin(10a) + F - m\frac{u_B^2 \sin(10a)}{2h}}{mg\cos(10a)} \tag{16}$$

Θέμα 2ο: 30 μονάδες

Ο μικρός αδερφός σας αγόρασε μια δωρο-σακούλα (lucky bag), η οποία - μεταξύ άλλων - περιέχει ένα μικρό πιστόλι ελατηρίου με μικρές μπάλες για παιδιά και σας ζητά να του εξηγήσετε πως λειτουργεί. Αφού του λέτε περί νόμου του Hooke κλπ., τοποθετείτε το όπλο κατακόρυφα και πυροβολείτε. Θεωρήστε αμελητέα την αντίσταση του αέρα και $g = 9.8$ m/s^2. Αν το ελατήριο συμπιέζεται πλήρως κατά $y_i = -0.12$ m πριν εκτοξέυσει τη μικρή μπάλα, η μάζα της τελευταίας ειναι $m = 2 \cdot \max\{a, b, c, d\}$ gr[‡], και το ύψος που φτάνει η μικρή μπάλα είναι $y_f = 3.0$ m, τότε

(αʹ) ποιά είναι η σταθερά k του ελατηρίου;

(βʹ) ποιά η ταχύτητα της μικρής μπάλας όταν περνά από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου (θέση φυσικού μήκους);

Λύση: Θεωρούμε θέση αναφοράς τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Θεωρούμε ως σύστημα το ελατήριο, την μπάλα, και τη Γη. Θεωρούμε διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Έστω A η θέση συμπίεσης και B η θέση μέγιστου ύψους της μπάλας. Το σύστημα είναι απομονωμένο και ισχύει η Α.Δ.Ε.

(αʹ) Είναι

$$\Delta U_g + \Delta U_s + \Delta K = 0 \tag{17}$$
$$U_{gB} - U_{gA} + U_{sB} - U_{sA} + K_B - K_A = 0 \tag{18}$$
$$mgy_f - mgy_i - 0 + 0 - \frac{1}{2}ky_i^2 + 0 - 0 = 0 \tag{19}$$
$$k = \frac{mg(y_f - y_i)}{\frac{1}{2}y_i^2} \tag{20}$$
$$= \frac{2mg(y_f - y_i)}{y_i^2} \tag{21}$$

(βʹ) Η ταχύτητα στη θέση ισορροπίας Γ βρίσκεται με επανεφαρμογή της Α.Δ.Ε. μεταξύ των σημείων Α και Γ:

$$\Delta U_g + \Delta U_s + \Delta K = 0 \tag{22}$$
$$U_{g\Gamma} - U_{gA} + U_{s\Gamma} - U_{sA} + K_\Gamma - K_A = 0 \tag{23}$$
$$0 - mgy_i + 0 - \frac{1}{2}ky_i^2 + \frac{1}{2}mu_\Gamma^2 - 0 = 0 \tag{24}$$
$$u_\Gamma^2 = \frac{ky_i^2}{m} + 2gy_i \tag{25}$$
$$u_\Gamma = \sqrt{\frac{ky_i^2}{m} + 2gy_i} \tag{26}$$

Θέμα 3ο: 30 μονάδες

Το καλοκαίρι στην παραλία, ο φίλος σας εξηγεί την εμπειρία που είχε οδηγώντας ένα υπερσύγχρονο σπόρ αυτοκίνητο σε μια πίστα δοκιμών αγωνιστικών αυτοκινήτων:

“Με το αμάξι έτρεχα ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα u_O, και όταν έφτασα στον τερματισμό ενεργοποίηθηκε μια νότα σταθερής συχνότητας f_0 από μια σειρήνα. Όταν *απομακρυνόμουν από τη σειρήνα*, άκουσα μια συχνότητα στα $\frac{a}{d+5}$ της τιμής που είχε *όταν πλησίαζα τη σειρήνα*, δηλ.

$$\frac{f_{\text{απομάκρυνσης}}}{f_{\text{προσέγγισης}}} = \frac{a}{d+5} \tag{27}$$

[‡] Δηλ. (δυο επί το μεγαλύτερο ψηφίο του ΑΜ σας) γραμμάρια.

Μετά έκανα άλλους δυο γύρους και σταμάτησα. Ήταν εκπληκτική εμπειρία!"

Θεωρήστε την ταχύτητα του ήχου στην πίστα ίση με $u = 350$ m/s. Επίσης ξέρετε ότι το γρηγορότερο αυτοκίνητο στη Γη[§] μπορεί να τρέξει με ταχύτητες ως 130 m/s. Έχει "καλό αυτί" ο φίλος σας;

Λύση: Από τη σχέση

$$\frac{f_{\text{απομάκρυνσης}}}{f_{\text{προσέγγισης}}} = \frac{a}{d+5} \tag{28}$$

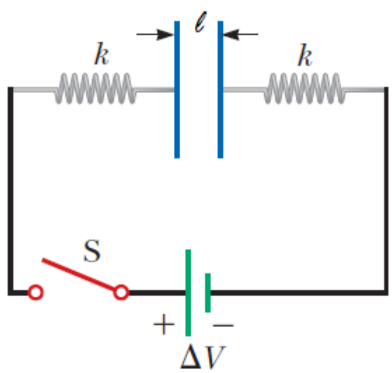
και τη γνώση του φαινομένου Doppler έχουμε ότι

$$\frac{\left(\frac{u-u_O}{u}\right)f_0}{\left(\frac{u+u_O}{u}\right)f_0} = \frac{a}{d+5} \Longleftrightarrow \frac{u-u_O}{u+u_O} = \frac{a}{d+5} \Longleftrightarrow (d+5)(u-u_O) = a(u+u_O) \Longleftrightarrow u_O = \frac{(d+5-a)u}{a+d+5} \tag{29}$$

Συγκρίνετε την τιμή αυτή - που αποτελεί την ταχύτητα του αυτοκινήτου του φίλου σας - με τη μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να πιάσει ένα αγωνιστικό (130 m/s) και αν είναι μικρότερη τότε ο φίλος σας μάλλον έχει καλό αυτί, αλλιώς σίγουρα πρέπει να κοιταχτεί σε έναν ΩΡΛ.

Θέμα 4ο: 30 μονάδες

Θέλετε να συνδυάσετε τις γνώσεις σας από ελατήρια και πυκνωτές και κατασκευάζετε το κύκλωμα του Σχήματος 2. Το κύκλωμα αποτελείται από δυο όμοιες παράλληλες μεταλλικές πλάκες (που σχηματίζουν προφανώς έναν *πυκνωτή παράλληλων πλακών*) συνδεδεμένες με όμοια μεταλλικά ελατήρια, τα οποία καταλήγουν σε μια πηγή $\Delta V = 100$ V, ελεγχόμενη από διακόπτη S. Όταν ο διακόπτης είναι ανοιχτός, οι πλάκες προφανώς είναι αφόρτιστες και απέχουν απόσταση $\ell = 0.08$ m, ενώ έχουν χωρητικότητα $C = 2.0$ μF. Όταν ο διακόπτης κλείσει, η απόσταση μεταξύ των πλακών μειώνεται κατά παράγοντα 0.5.



Σχήμα 2: *Κύκλωμα Θέματος 4.*

(α') Πόση είναι η νέα χωρητικότητα C' μετά το κλείσιμο του διακόπτη;

(β') Πόσο φορτίο Q καταλήγει να έχει κάθε πλάκα;

(γ') Αν υποθέσετε ότι κάθε πλάκα συνεισφέρει κατά το ήμισυ στο συνολικό ηλεκτρικό πεδίο E ανάμεσα στις πλάκες, ποιά είναι η σταθερά k καθενός ελατηρίου;

[§] Μια Bugatti Chiron Super Sport.

Λύση:

(α΄) Αρχικά, η χωρητικότητα του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{\ell} \tag{30}$$

Με το κλείσιμο του διακόπτη η απόσταση γίνεται $\hat{\ell} = \ell/2$, οπότε

$$\hat{C} = \frac{\epsilon_0 A}{\hat{\ell}} = 2C \tag{31}$$

(β΄) Κάθε πλάκα έχει φορτίο

$$Q = \hat{C}\Delta V = 2C\Delta V = 400\ \mu\text{C} \tag{32}$$

(γ΄) Αν κάθε πλάκα συνεισφέρει κατά το ήμισυ στο συνολικό ηλεκτρικό πεδίο E ανάμεσα στις πλάκες, τότε

$$\frac{E}{2} = \frac{Q}{2\epsilon_0 A} \tag{33}$$

Η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται από κάθε πλάκα στα φορτία της απέναντί της είναι

$$F = Q\frac{E}{2} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} = \frac{(2C\Delta V)^2}{2\epsilon_0 A} \tag{34}$$

$$= \frac{2C^2(\Delta V)^2}{\epsilon_0 A d/d} = \frac{2C^2(\Delta V)^2}{Cd} \tag{35}$$

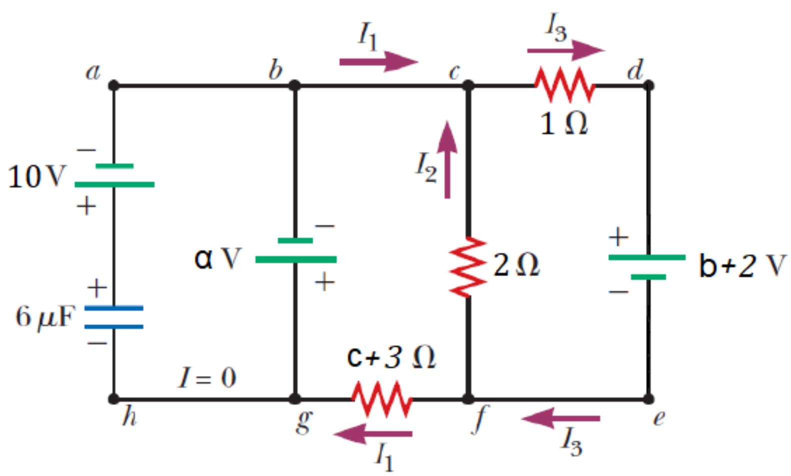
$$= \frac{2C(\Delta V)^2}{d} \tag{36}$$

και αυτή η δύναμη εξισορροπείται από τη δύναμη του ελατηρίου που είναι $F = kx$ σε κάθε πλάκα. Τα δυο ελατήρια μετακινούνται εξ ίσου, οπότε το καθένα εκτείνεται κατά $x = d/4$. Άρα

$$\frac{2C(\Delta V)^2}{d} = k\frac{d}{4} \Longleftrightarrow k = \frac{8C(\Delta V)^2}{d^2} = 250\ \text{N/m} \tag{37}$$

Θέμα 5ο: 20 μονάδες

Το κύκλωμα ενός τμήματος του ραδιοτηλεσκοπίου του Arecibo στην Αμερική φαίνεται στο Σχήμα 3 (του οποίου κάποια από τα ηλεκτρικά στοιχεία έχουν τιμές που εξαρτώνται από το ΑΜ σας) έχει συνδεθεί για πολλή ώρα, τόση ώστε ο πυκνωτής να έχει φορτιστεί.



Σχήμα 3: *Ηλεκτρικό κύκλωμα Θέματος 5.*

Βρείτε

(α΄) τα ρεύματα στο κύκλωμα

(β΄) το φορτίο Q στον πυκνωτή

Λύση:

(α΄) Στον κόμβο c, ισχύει ο 1ος κανόνας του Kirchhoff:

$$I_1 + I_2 = I_3 \Longleftrightarrow I_1 + I_2 - I_3 = 0 \tag{38}$$

Στο βρόχο $bcfgb$, εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff:

$$2I2 - (C+3)I_3 - a = 0 \tag{39}$$

Στο βρόχο $cdefc$, εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff:

$$-I_3 - (b+2) - 2I_2 = 0 \tag{40}$$

Λύνετε το σύστημα και έχετε τα ρεύματα.

(β΄) Στο βρόχο $abgha$ δεν υπάρχει ρεύμα γιατί ο πυκνωτής έχει φορτιστεί. Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff:

$$a + \frac{Q}{C} - 10 = 0 \Longleftrightarrow Q = (10-a)C = 6(10-a)10^{-6}\ \mathrm{C} \tag{41}$$

Σύνολο μονάδων: 140
Άριστα: 100

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!