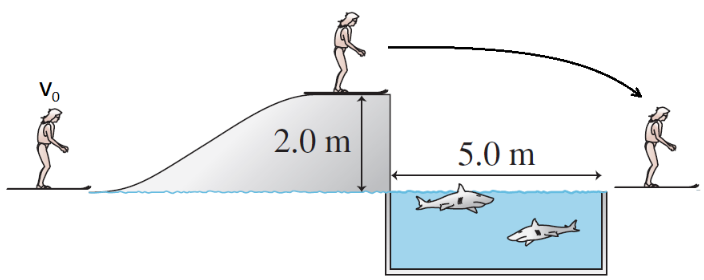
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τελική Εξέταση - Λύσεις

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή τσέπης.

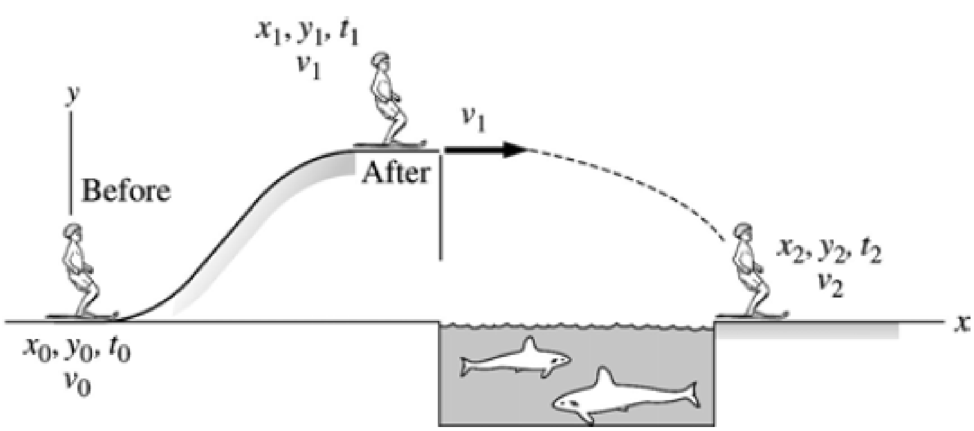
1. **Θέμα 1ο: Κλασική Μηχανική - 30 μονάδες**
Βρήκατε δουλειά σε ένα circus water park για να βγάλετε τα έξοδα των διακοπών σας για το καλοκαίρι που έρχεται. Σε ένα επικίνδυνο ακροβατικό, ένας ακροβάτης πρέπει να ολισθήσει πάνω σε μια ράμπα χωρίς τριβές, σε ύψος 2 μέτρων από το έδαφος, ώστε να περάσει με ταχύτητα πάνω από μια πισίνα μήκους 5 μέτρων, γεμάτη από πεινασμένους καρχαρίες, και να προσγειωθεί με ασφάλεια στην άκρη της πισίνας, όπως στο Σχήμα 1. Οι



Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 1.*

υπεύθυνοι του πάρκου σας ρωτούν με πόση ελάχιστη αρχική ταχύτητα v_0 πρέπει να ξεκινήσει ο ακροβάτης στη βάση της ράμπας, πριν κάνει το άλμα, ώστε να μην πέσει στην πισίνα με τους καρχαρίες. Τι απάντηση θα τους δώσετε;

<u>Λύση:</u>
Είναι βολικό να τοποθετήσουμε το σύστημα συντεταγμένων μας στην βάση της ράμπας. Ας βρούμε αρχικά τη



μικρότερη ταχύτητα u_1 που πρέπει να έχει ο ακροβάτης στην κορυφή της ράμπας ώστε να περάσει πάνω από τους καρχαρίες. Από την κατακόρυφη κίνηση του άλματος, εχουμε

$$y_2 = y_1 + u_{y_1} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \tag{1}$$

$$0 = 2 + 0 + \frac{1}{2} 9.8 t^2 \tag{2}$$

$$t = 0.639 \text{ s} \tag{3}$$

Από την οριζόντια κίνηση κατά το άλμα, έχουμε

$$x_2 = x_1 + u_{x_1} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \tag{4}$$
$$x_1 + 5 = x_1 + u_1 t + 0 \tag{5}$$
$$u_1 = 7.825 \text{ m/s} \tag{6}$$

Αφού βρήκαμε την u_1 που απαιτείται για να περάσει ο ακροβάτης τους καρχαρίες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να βρούμε την ελάχιστη ταχύτητα u_0. Έχουμε

$$K_1 + U_{g_1} = K_0 + U_{g_0} \tag{7}$$
$$\frac{1}{2} m u_1^2 + m g y_1 = \frac{1}{2} m u_0^2 + m g y_0 \tag{8}$$
$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + 2g(y_1 - y_0)} \tag{9}$$
$$u_0 = 10 \text{ m/s} \tag{10}$$

2. **Θέμα 2ο: Κυματική - 20 μονάδες**
Δύο μικρά ηχεία εκπέμπουν ηχητικά κύματα διαφορετικών συχνοτήτων, κατά τον ίδιο τρόπο προς κάθε κατεύθυνση, όπως στο Σχήμα 2α΄. Το ηχείο A έχει μέση ισχύ 1.00×10^{-3} W και το ηχείο B έχει μέση ισχύ 1.50×10^{-3} W. Χρησιμοποιώντας ένταση αναφοράς $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, υπολογίστε την ηχοστάθμη στο σημείο C, σε dB,

(α΄) (**5 μ.**) αν μόνο το ηχείο A εκπέμπει ήχο

(β΄) (**5 μ.**) αν μόνο το ηχείο B εκπέμπει ήχο

(γ΄) (**10 μ.**) αν και τα δύο ηχεία εκπέμπουν ήχο

Λύση:
Καθώς τα ηχεία μεταδίδουν τον ήχο ομοίως προς κάθε κατεύθυνση η ένταση του ήχου είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή του ήχου.

(α) Είναι $r_{AC}^2 = 3^2 + 2^2 = 13$ m. Άρα

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1 \times 10^{-3}}{4\pi 13} = 6.12 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Οπότε

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{6.12 \times 10^{-6}}{10^{-12}} \right) = 10 \log_{10} \left(6.12 \times 10^{6} \right) = 67.86 \text{ dB}$$

(β) Είναι $r_{BC}^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ m. Άρα

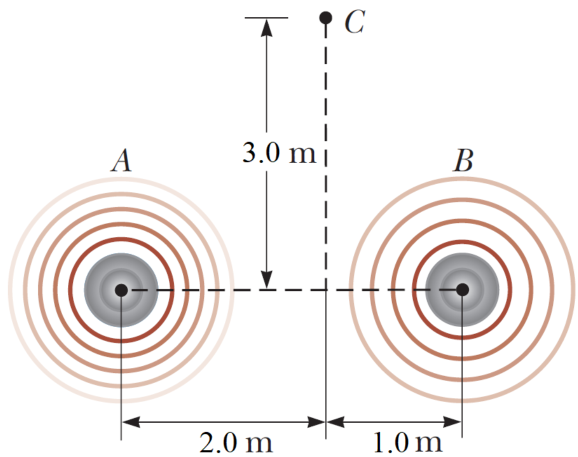
$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1.5 \times 10^{-3}}{4\pi 10} = 11.93 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Οπότε

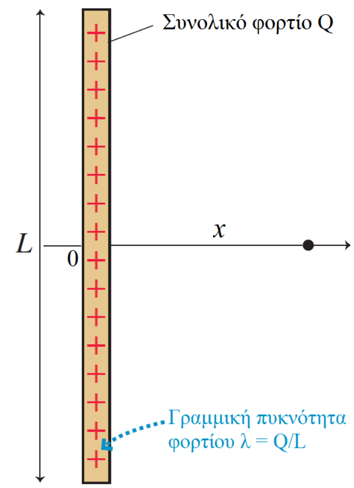
$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{11.93 \times 10^{-6}}{10^{-12}} \right) = 10 \log_{10} \left(11.93 \times 10^{6} \right) = 70.76 \text{ dB}$$

(γ) Είναι $I = 6.12 \times 10^{-6} + 11.93 \times 10^{-6} = 18.05 \times 10^{-6}$ W/m^2. Άρα

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{18.05 \times 10^{-6}}{10^{-12}} \right) = 10 \log_{10} \left(18.05 \times 10^{6} \right) = 72.56 \text{ dB}$$



(α΄) *Θέμα 2ο: Ηχητικά κύματα.*



(β΄) *Θέμα 3ο: Κατανομή φορτίου.*

Σχήμα 2: *Σχήματα Θεμάτων 2 και 3.*

3. **Θέμα 3ο: Ηλεκτρικό Πεδίο - 35 μονάδες**
Στο Σχήμα 2β΄ βλέπετε μια λεπτή, ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδο μήκους L και πυκνότητας φορτίου λ, με συνολικό φορτίο $+Q$.

(α΄) (**15 μ.**) Δείξτε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό σε απόσταση x από το κέντρο της ράβδου δίνεται ως

$$V = k_e \lambda \ \ln\left[\frac{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + x^2} + \frac{L}{2}}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + x^2} - \frac{L}{2}}\right] \tag{11}$$

(β΄) (**20 μ.**) Δείξτε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση x από το κέντρο της ράβδου δίνεται ως

$$E = k_e \frac{Q}{x\sqrt{x^2 + (L/2)^2}} \tag{12}$$

Λύση:

(α΄) Έστω ένα τυχαίο μικρό τμήμα ράβδου μήκους dy και φορτίου dq, σε απόσταση y από τη συμβολή των αξόνων, όπως στο Σχήμα 3. Το τμήμα αυτό συνεισφέρει δυναμικό dV στο ζητούμενο σημείο ίσο με

$$dV = k_e \frac{dq}{s} = k_e \frac{dq}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{13}$$

Από την ομοιόμορφη κατανομή φορτίου ισχύει ότι

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{dq}{dy} \Longrightarrow dq = \lambda dy \tag{14}$$

οπότε

$$dV = k_e \frac{dq}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k_e \lambda \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{15}$$

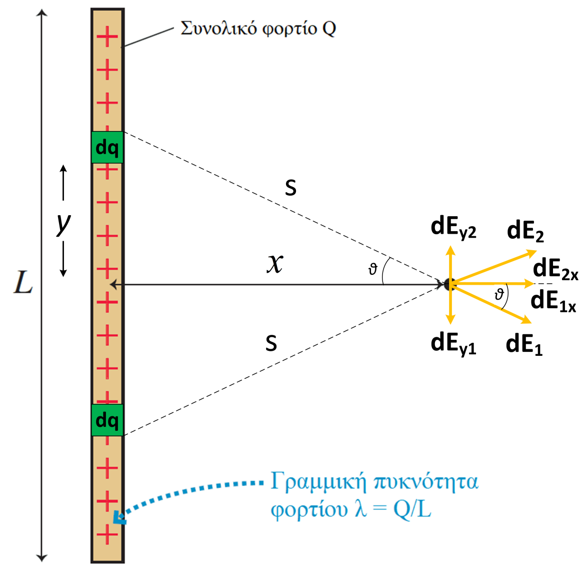
Το συνολικό δυναμικό στο σημείο αυτό θα είναι

$$V = \int dV = k_e \lambda \int \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k_e \lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{16}$$

και από τυπολόγιο

$$V = k_e\lambda\Big[\ln\Big(\sqrt{\Big(\frac{L}{2}\Big)^2 + x^2} + \frac{L}{2}\Big) - \ln\Big(\sqrt{\Big(\frac{L}{2}\Big)^2 + x^2} - \frac{L}{2}\Big)\Big] = k_e\lambda\ \ln\left[\frac{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + x^2} + \frac{L}{2}}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + x^2} - \frac{L}{2}}\right] \tag{17}$$

(β΄) Έστω ένα μικρό τμήμα ράβδου μήκους dy και φορτίου dq, στο επάνω και στο κάτω μέρος της ράβδου, στην ίδια θέση σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα, όπως στο Σχήμα 3. Από την ομοιόμορφη κατανομή φορτίου ισχύει ότι



Σχήμα 3: *Λύση θέματος 3.*

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{dq}{dy} \Longrightarrow dq = \lambda dy \tag{18}$$

Λόγω συμμετρίας της κατανομής, τα ηλεκτρικά πεδία των δυο τμημάτων αλληλοακυρώνονται ως προς την y συνιστώσα τους, και η μόνη συνεισφορά τους βρίσκεται στον $x-$άξονα. Το τμήμα ράβδου dq συνεισφέρει στο ηλεκτρικό πεδίο ως

$$dE_x = k_e\frac{dq}{s^2}\cos(\theta) = k_e\frac{dq}{x^2+y^2}\cos(\theta) = k_e\frac{\lambda dy}{x^2+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = k_e\frac{\lambda x dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{19}$$

αφού

$$\cos(\theta) = \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{20}$$

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο δεδομένο σημείο θα έχει μόνο $x-$συνιστώσα, για τους ίδιους λόγους με πριν, και θα δίνεται ως

$$E_x = \int dE_x = \int k_e\frac{\lambda x dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = k_e\lambda\int_{-L/2}^{L/2}\frac{x dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{21}$$

και από το τυπολόγιο

$$E_x = k_e\lambda\int_{-L/2}^{L/2}\frac{x dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = k_e\lambda\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{-L/2}^{L/2} = k_e\lambda\frac{L}{x\sqrt{x^2+(L/2)^2}} \tag{22}$$

Όμως $\lambda = \frac{Q}{L} \Longrightarrow Q = \lambda L$, οπότε

$$E = E_x = k_e\frac{Q}{x\sqrt{x^2+(L/2)^2}} \tag{23}$$

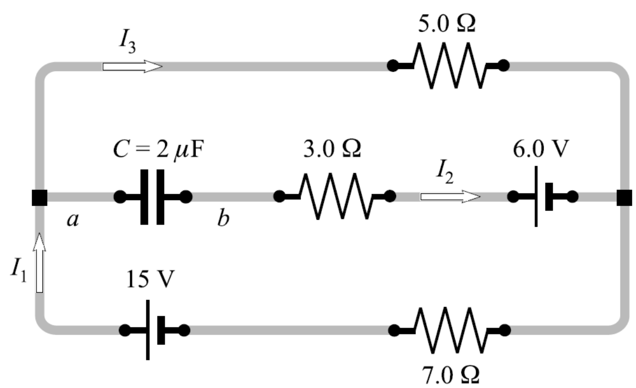
Σημείωση: Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να υπολογιστεί και από το ερώτημα (α) από τη σχέση

$$E = -\frac{dV}{dx} \tag{24}$$

ακριβώς επειδή το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο $x-$συνιστώσα.

4. **Θέμα 4ο: Ηλεκτρικά Κυκλώματα - 25 μονάδες**

Έστω το κύκλωμα του Σχήματος 4.



Σχήμα 4: *Σχήμα Θέματος 4.*

Το κύκλωμα βρίσκεται σε λειτουργία για πολλή ώρα και τα ρεύματα είναι σταθερά.

(α΄) (**15 μ.**) Βρείτε τα ρεύματα I_1, I_2, I_3.

(β΄) (**10 μ.**) Δείξτε ότι το φορτίο του πυκνωτή είναι $Q = 0.5\ \mu$C.

Λύση:

(α΄) Αφού το κύκλωμα λειτουργεί για πολλή ώρα, ο πυκνωτής έχει φορτιστεί και άρα το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο του είναι μηδέν. Οπότε $I_2 = 0$ και άρα $I_1 = I_3$. Στο υπόλοιπο κύκλωμα, εφαρμόζοντας το 2ο κανόνα του Kirchhoff, έχουμε

$$-I_1 \times 5 - I_1 \times 7 + 15 = 0 \Longleftrightarrow 12I_1 = 15 \Longleftrightarrow I_1 = I_3 = \frac{15}{12} = 1.25\ \text{A} \tag{25}$$

Οπότε τελικά

- $I_1 = 1.25$ A
- $I_2 = 0.0$ A
- $I_3 = 1.25$ A

(β΄) Ξεκινώντας από το σημείο b και επιστρέφοντας σε αυτό από το επάνω τμήμα του κυκλώματος, έχουμε

$$-5 \times I_3 + 6 + 3I_2 + \Delta V_{ba} = 0 \Longleftrightarrow \Delta V_{ba} = 0.25\ \text{V} \tag{26}$$

οπότε

$$Q = CV_{ba} = 2 \times 10^{-6} \times 0.25 = 0.5 \times 10^{-6}\ \text{C} = 0.5\ \mu\text{C} \tag{27}$$

5. **Θέμα 5ο: Ταλαντώσεις - 20 μονάδες**
Αν η φάση μετατόπισης για ένα σύστημα ελατηρίου-σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι $\phi = \pi/4$ rad και η θέση του σώματος δίνεται ως
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{28}$$
τότε δείξτε ότι ο λόγος της κινητικής προς την ελαστική δυναμική ενέργεια του συστήματος όταν $t = 0$ ισούται με 1.

Λύση:
Εχουμε ότι
$$K = \frac{1}{2}mu(t)^2\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\pi/4) \tag{29}$$
και
$$U = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\pi/4) \tag{30}$$
Οπότε
$$\frac{K}{U} = \frac{m\omega^2 \sin^2(\pi/4)}{k\cos^2(\pi/4)} = \frac{m}{k}\omega^2 \tan^2(\pi/4) \tag{31}$$
κι επειδή
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{32}$$
είναι
$$\frac{K}{U} = \tan^2(\pi/4) = 1 \tag{33}$$

Συνολικές μονάδες: 130
Άριστα: 100