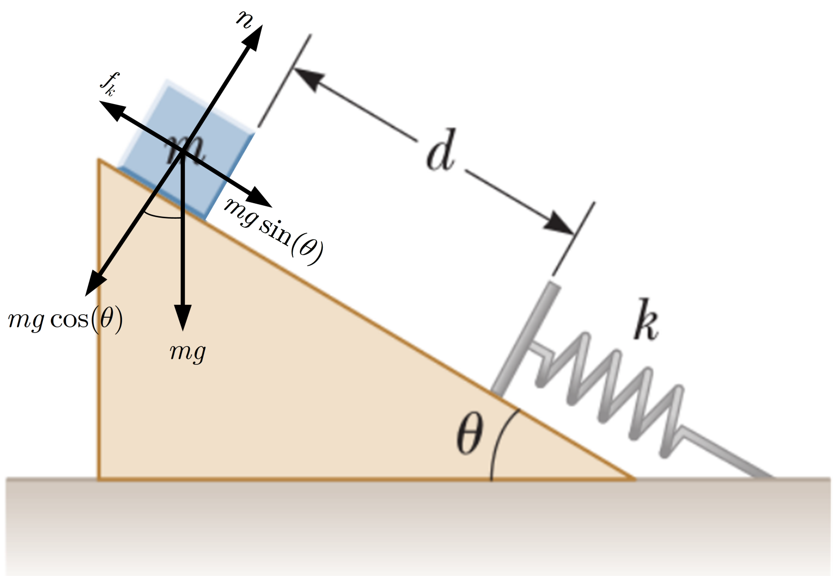
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-19
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τελική Εξέταση

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή τσέπης.

1. **Θέμα 1ο: Κλασική Μηχανική - 30 μονάδες**
Ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\theta = 45^o$ και συντελεστή τριβής ολισθήσεως $\mu_k = 0.6$ έχει ένα ελατήριο σταθεράς $k = 500$ N/m στερεωμένο στο κάτω μέρος του, όπως στο Σχήμα 1. Ένα κουτί μάζας $m = 2.5$ kg τοποθετείται



Σχήμα 1: *Θέμα 1ο: Σώμα σε κεκλιμένο.*

στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου σε απόσταση $d = 0.3$ m από το ελατήριο. Από τη θέση του αυτή, το κουτί επιταχύνεται προς το ελατήριο με αρχική ταχύτητα $u_0 = 0.75$ m/s και συμπιέζει το ελατήριο κατά x m από τη θέση ισορροπίας του, οπότε και το σώμα ηρεμεί στιγμιαία. Θεωρώντας το σώμα μάζας m ως σημειακό σωματίδιο:

(α΄) **(5 μ.)** Υπολογίστε το έργο της δύναμης του βάρους από την κορυφή του κεκλιμένου ως τη θέση που το σώμα ηρεμεί στιγμιαία.

(β΄) **(5 μ.)** Υπολογίστε το έργο της δύναμης του ελατηρίου από την κορυφή του κεκλιμένου ως τη θέση που το σώμα ηρεμεί στιγμιαία.

(γ΄) **(5 μ.)** Υπολογίστε το έργο της δύναμης τριβής ολισθήσεως από την κορυφή του κεκλιμένου ως τη θέση που το σώμα ηρεμεί στιγμιαία.

(δ΄) **(15 μ.)** Δείξτε ότι το ελατήριο συμπιέζεται κατά $x \simeq 0.12$ m.

<u>Λύση:</u>
Θεωρούμε ως σύστημα το σώμα, οπότε κάθε δύναμη που ασκείται πάνω του είναι εξωτερική στο σύστημα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στην κορυφή του κεκλιμένου φαίνονται στο σχήμα.

(α΄) Το έργο της δύναμης του βάρους από την κορυφή του κεκλιμένου ως τη θέση που το σώμα ηρεμεί στιγμιαία δίνεται μόνο από τη $x-$συνιστώσα του βάρους, αφού μόνο αυτή παράγει έργο στο σύστημα.

$$W_g = W_{g_x} = F_{g_x}\Delta r = mg\sin(\theta)\Delta r = mg(d+x)\sin(\theta) = mgd\sin(\theta) + mgx\sin(\theta) = 5.1973 + 17.324x \quad (1)$$

(β΄) Το έργο της δύναμης του ελατηρίου από την κορυφή του κεκλιμένου ως τη θέση που το σώμα ηρεμεί στιγμιαία δίνεται ως

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \int_{0}^{x_f} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx_f^2 = -\frac{1}{2}kx^2 = -250x^2 \quad (2)$$

αφού $x_f = x$ και αφού η δύναμη του ελατηρίου δεν ασκείται όταν το σώμα βρίσκεται στην κορυφή του κεκλιμένου.

(γ΄) Το έργο της δύναμης τριβής ολισθήσεως από την κορυφή του κεκλιμένου ως τη θέση που το σώμα ηρεμεί στιγμιαία δίνεται ως

$$W_{f_k} = f_k\Delta r\cos(\pi) = -f_k(d+x) \quad (3)$$

Όμως το σώμα ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα, άρα

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg\cos(\theta) \quad (4)$$

οπότε

$$W_{f_k} = -\mu_k mg\cos(\theta)(d+x) = -\mu_k mgd\cos(\theta) - \mu_k mgx\cos(\theta) = -3.118 - 10.394x \quad (5)$$

(δ΄) Από Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου στο σύστημα, και λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα αποτελέσματα, έχουμε

$$\Delta K = W_g + W_{f_k} + W_s \quad (6)$$

$$K_f - K_i = W_g + W_{f_k} + W_s \quad (7)$$

$$0 - \frac{1}{2}mu_0^2 = 5.1973 + 17.324x - 250x^2 - 3.118 - 10.394x \quad (8)$$

$$-0.703125 = 5.1973 + 17.324x - 250x^2 - 3.118 - 10.394x \quad (9)$$

$$250x^2 - 6.93x - 2.7824 = 0 \quad (10)$$

Έχουμε

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6.93^2 + 4\cdot 250\cdot 2.7824 = 2830.42 \quad (11)$$

και έτσι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{6.93 \pm 53.20}{500} \quad (12)$$

Κρατώντας τη θετική ρίζα

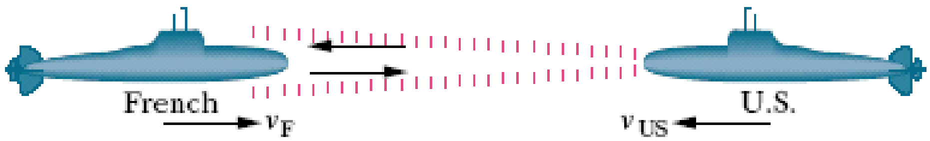
$$x = 0.12026 \approx 0.12 \text{ m} \quad (13)$$

2. **Θέμα 2ο: Ηχητικά Κύματα - 22.5 μονάδες**

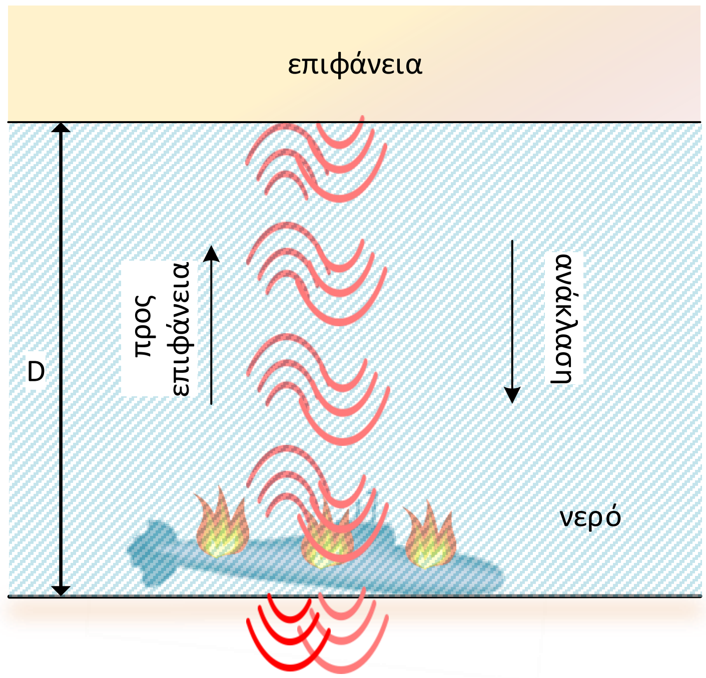
Στο Σχήμα 2, ένα Γαλλικό κι ένα Αμερικανικό υποβρύχιο (μη επανδρωμένα και τα δυο) κινούνται το ένα προς το άλλο κατά τη διάρκεια εμπλοκής σε ακίνητα νερά στο Βόρειο Ατλαντικό. Το Γαλλικό υποβρύχιο κινείται με ταχύτητα $u_F = 50.0$ km/h και το αμερικανικό με ταχύτητα $u_{US} = 70.0$ km/h. Το Γαλλικό υποβρύχιο στέλνει ένα σήμα σόναρ (sonar) (ηχητικό κύμα στο νερό) συχνότητας $f = 10^3$ Hz. Τα κύματα σόναρ διαδίδονται με ταχύτητα $u_{sonar} = 5470$ km/h.

(α΄) **(5 μ.)** Πόση είναι η συχνότητα που ανιχνεύεται από το Αμερικανικό υποβρύχιο;

(β΄) **(7.5 μ.)** Πόση είναι η συχνότητα που ανιχνεύεται από το Γαλλικό υποβρύχιο στο σήμα που επιστρέφει αφού ανακλασθεί από το Αμερικανικό υποβρύχιο;



Σχήμα 2: *Θέμα 2ο: υποβρύχια σε αντιπαράθεση.*



Σχήμα 3: *Θέμα 2ο: υποβρύχιο στον πυθμένα.*

(γ΄) **(10 μ.)** Το ένα από τα δυο υποβρύχια ρίχνει μια τορπίλη και βυθίζει το άλλο υποβρύχιο. Το υποβρύχιο που χτυπήθηκε βυθίζεται στον πυθμένα της θάλασσας όπου και εκρήγνυται (Σχήμα 3). Η έκρηξη μεταδίδει έναν παλμό προς την επιφάνεια του νερού κι έναν προς τον πυθμένα. Ο παλμός που ταξίδεψε προς την επιφάνεια, ανακλάστηκε και επέστρεψε πίσω στον πυθμένα. Αυτή η διαδρομή του παλμού συνέβη αρκετές φορές. Κάθε φορά που χτυπούσε στον πυθμένα, ένας σεισμογράφος κατέγραφε τη δόνηση του εδάφους λόγω του παλμού. Οι διαδοχικές καταγραφές των παλμών στο σεισμογράφο απείχαν χρονικά $\Delta t = 0.11$ s. Σε πόσο βάθος D βυθίστηκε το υποβρύχιο; Θεωρήστε ότι οι παλμοί αυτοί διαδίδονται στο θαλασσινό νερό με ταχύτητα $u_p = 1500$ m/s.

<u>Λύση:</u>

(α΄) Έχουμε κινούμενη πηγή προς κινούμενο παρατηρητή (και οι δυο πλησιάζουν μεταξύ τους). Η συχνότητα που ανιχνεύει το αμερικανικό υποβρύχιο είναι

$$f_{us} = \frac{u + u_o}{u - u_s} f = \frac{5470 + 70}{5470 - 50} 1000 = \frac{5540}{5420} 1000 = 1022 \text{ Hz} \tag{14}$$

Μπορούμε να αφήσουμε τις ταχύτητας ως km/h χωρίς να κάνουμε μετατροπές, αφού ο λόγος ταχυτήτων είναι καθαρός αριθμός, αρκεί τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής να εκφράζονται σε km/h.

(β΄) Η συχνότητα που ανιχνεύει το γαλλικό υποβρύχιο είναι

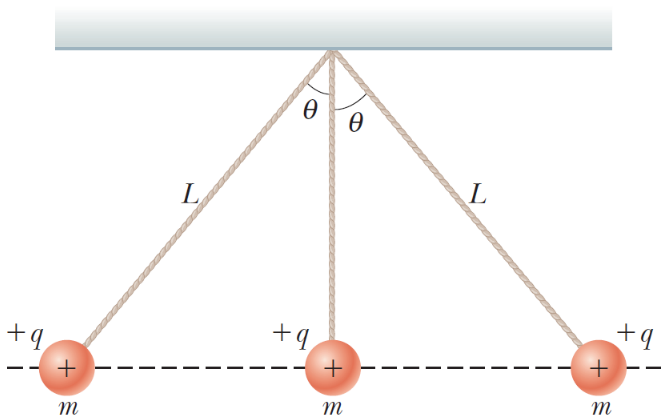
$$f_{fr} = \frac{u + u_o}{u - u_s} f_{us} = \frac{5470 + 50}{5470 - 70} 1022 = 1044 \text{ Hz} \tag{15}$$

(γ') Η διαδρομή του παλμού από τη στιγμή που ξεκινά για την επιφάνεια ως ότου χτυπήσει στον πυθμένα και καταγραφεί από το σεισμογράφο είναι $2D$. Τη διαδρομή αυτή τη διανύει σε $\Delta t = 0.11$ s. Αφού η ταχύτητα διάδοσης είναι $u = 1500$ m/s, τότε

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2D}{\Delta t} \Longrightarrow 2D = u\Delta t = 1500 \cdot 0.11 \Longrightarrow D = 82.5 \text{ m} \tag{16}$$

Άρα το υποβρύχιο βυθίστηκε στα 82.5 m.

3. **Θέμα 3ο: Ηλεκτρισμός - 20 μονάδες**
Τρια όμοια σημειακά φορτία φορτίου $+q$ και μάζας m το καθένα, κρέμονται από τρια νήματα ισορροπώντας όπως στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: *Θέμα 3ο: ηλεκτρικά φορτία.*

Αν τα μήκη των νημάτων αριστερά και δεξιά είναι L, τότε δείξτε ότι το φορτίο q ισούται με

$$q = \sqrt{\frac{4L^2 mg \sin^2(\theta)\tan(\theta)}{5k_e}}$$

Λύση:
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο τελευταίο φορτίο φαίνονται στο Σχήμα 5. Θετικές φορές θεωρούνται οι συμβατικές (πάνω και δεξιά). Η τάση του νήματος $\vec{T}$ αναλύεται σε δυο συνιστώσες, $\vec{T}_x$ και $\vec{T}_y$. Λόγω του ότι τα φορτία ισορροπούν, από τον 1ο νόμο του Newton έχουμε ότι

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{T}_y + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow T_y - mg = 0 \Longleftrightarrow T\cos(\theta) = mg \Longleftrightarrow T = \frac{mg}{\cos(\theta)} \tag{17}$$

και

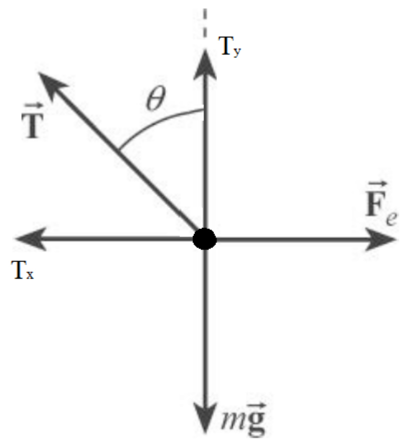
$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{T}_x + \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow -T_x + F_e = 0 \Longleftrightarrow F_e = T\sin(\theta) = \frac{mg}{\cos(\theta)}\sin(\theta) = mg\tan(\theta) \tag{18}$$

Όμως στο τελευταίο φορτίο ασκούνται δυο απωστικές ηλεκτρικές δυνάμεις από τα άλλα δυο φορτία, οπότε

$$F_e = k_e\frac{q^2}{r_1^2} + k_e\frac{q^2}{r_2^2} = \frac{k_e q^2}{(L\sin(\theta))^2} + \frac{k_e q^2}{(2L\sin(\theta))^2} = \frac{5k_e q^2}{4L^2\sin^2(\theta)} \tag{19}$$

αφού οι αποστάσεις r_1, r_2 δίνονται από τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζουν τα νήματα με τον οριζόντιο άξονα ως

$$\sin(\theta) = \frac{r_1}{L} \Rightarrow r_1 = L\sin(\theta) \tag{20}$$



Σχήμα 5: *Λύση θέματος 3.*

Οπότε

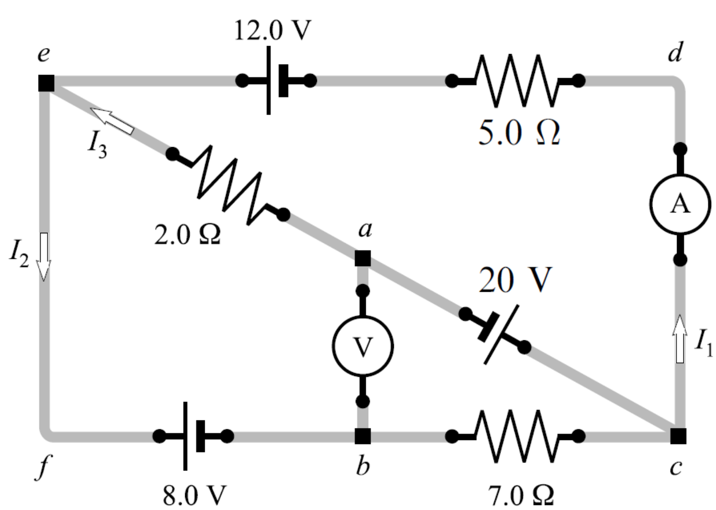
$$\frac{5k_e q^2}{4L^2 \sin^2(\theta)} = mg\tan(\theta) \Longleftrightarrow q = \sqrt{\frac{4L^2 mg \sin^2(\theta)\tan(\theta)}{5k_e}} \tag{21}$$

4. **Θέμα 4ο: Ηλεκτρικά Κυκλώματα - 20 μονάδες**

Ένα αμπερόμετρο (ammeter) μετρά την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που το διαπερνά, ενώ ένα βολτόμετρο (voltmeter) μετρά την τάση (διαφορά δυναμικού) που υπάρχει στα άκρα του. Για το ηλεκτρικό κύκλωμα του Σχήματος 6, δείξτε ότι οι ενδείξεις του αμπερόμετρου και του βολτόμετρου είναι

$$I_{\text{αμπερόμετρου}} = 3.93\ A \qquad V_{\text{βολτόμετρου}} = 4.3\ V \tag{22}$$

Υποθέστε ότι οι συσκευές αυτές είναι ιδανικές (το βολτόμετρο έχει άπειρη αντίσταση, άρα είναι σαν να μην υπάρχει στο κύκλωμα, ενώ το αμπερόμετρο μηδενική αντίσταση, άρα αφήνει το ρεύμα του κλάδου του να το διαπεράσει).



Σχήμα 6: *Θέμα 4ο: ηλεκτρικό κύκλωμα.*

<u>Λύση:</u>

Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο $cdefc$:

$$-5I_1 + 12 - 8 - 7I_2 = 0 \Longleftrightarrow 5I_1 + 7I_2 = 4 \tag{23}$$

Όμοια για το βρόχο $cdeac$:

$$-5I_1 + 12 + 2I_3 + 20 = 0 \Longleftrightarrow 5I_1 - 2I_3 = 32 \tag{24}$$

Στον κόμβο e ισχύει ο 1ος κανόνας του Kirchhoff, δηλ.

$$I_1 + I_3 = I_2 \tag{25}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στη σχέση (23) έχουμε

$$5I_1 + 7I_1 + 7I_3 = 4 \Longrightarrow I_3 = \frac{4 - 12I_1}{7} \tag{26}$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (24), παίρνουμε

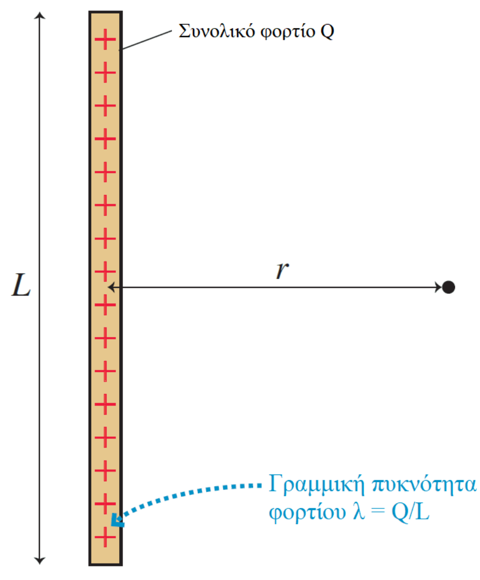
$$5I_1 - 2\frac{4 - 12I_1}{7} = 32 \Longrightarrow I_1 = 3.93 \text{ A} \tag{27}$$

που είναι και η ένδειξη του αμπερόμετρου. Κατά συνέπεια, $I_2 = -2.2$ A. Για να βρούμε την ένδειξη του βολτόμετρου, δηλ. το V_{ab}, γράφουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο $abca$:

$$V_{ab} - 7I_2 - 20 = 0 \Longrightarrow V_{ab} = 4.3 \text{ V} \tag{28}$$

5. **Θέμα 5ο: Ηλεκτρικό Πεδίο - 20 μονάδες**

Στο Σχήμα 7 βλέπετε μια λεπτή, ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδο μήκους L με συνολικό φορτίο Q.



Σχήμα 7: *Θέμα 5ο: Κατανομή φορτίου.*

(α') **(15 μ.)** Δείξτε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση r από το κέντρο της ράβδου δίνεται ως

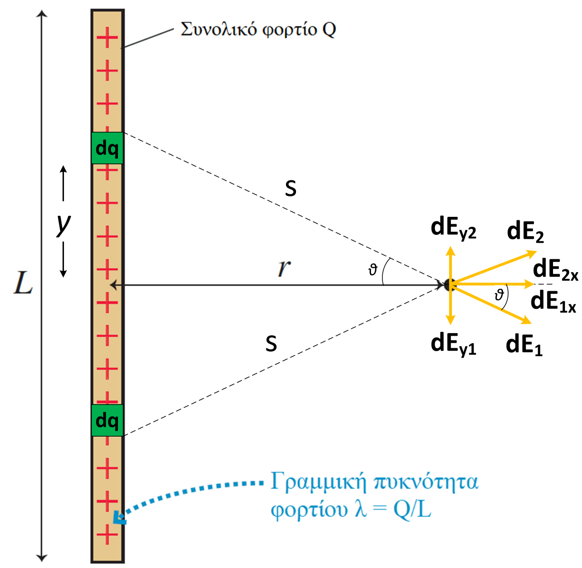
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|Q|}{r\sqrt{r^2 + (L/2)^2}} \tag{29}$$

(β') **(5 μ.)** Πώς συμπεριφέρεται η ράβδος σε σχέση με το ηλεκτρικό πεδίο της στο ίδιο σημείο όταν $r \gg L$;

Δίνεται ότι $\displaystyle\int \frac{a\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a\sqrt{x^2 + a^2}}$

Λύση:

(α΄) Έστω ένα μικρό τμήμα ράβδου μήκους dy και φορτίου dq, στο επάνω και στο κάτω μέρος της ράβδου, στην ίδια θέση σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα, όπως στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8: *Λύση θέματος 5.*

Από την ομοιόμορφη κατανομή φορτίου ισχύει ότι

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{dq}{dy} \Longrightarrow dq = \lambda dy \tag{30}$$

Λόγω συμμετρίας της κατανομής, τα ηλεκτρικά πεδία των δυο τμημάτων αλληλοακυρώνονται ως προς την y συνιστώσα τους, και η μόνη συνεισφορά τους βρίσκεται στον $x-$άξονα. Το τμήμα ράβδου dq συνεισφέρει στο ηλεκτρικό πεδίο ως

$$dE_x = k_e \frac{dq}{s^2}\cos(\theta) = k_e \frac{dq}{r^2+y^2}\cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dy}{r^2+y^2}\frac{r}{\sqrt{r^2+y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda r dy}{(r^2+y^2)^{3/2}} \tag{31}$$

αφού

$$\cos(\theta) = \frac{r}{s} = \frac{r}{\sqrt{r^2+y^2}} \tag{32}$$

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο δεδομένο σημείο θα έχει μόνο $x-$συνιστώσα, για τους ίδιους λόγους με πριν, και θα δίνεται ως

$$E_x = \int dE_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda r dy}{(r^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{r dy}{(r^2+y^2)^{3/2}} \tag{33}$$

και από το δοσμένο τύπο

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{r dy}{(r^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{y}{r\sqrt{r^2+y^2}}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{r\sqrt{r^2+(L/2)^2}} \tag{34}$$

Όμως $\lambda = \frac{Q}{L} \Longrightarrow Q = \lambda L$, οπότε

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|Q|}{r\sqrt{r^2+(L/2)^2}} \tag{35}$$

(β΄) Όταν $r \gg L$, τότε ο όρος $r^2 + (L/2)^2 \approx r^2$, οπότε

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r\sqrt{r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} = k_e\frac{Q}{r^2} \tag{36}$$

που είναι η σχέση ηλεκτρικού πεδίου για σημειακό φορτίο. Άρα όταν απομακρυνθούμε πολύ από τη ράβδο, το ηλεκτρικό πεδίο προσεγγίζει αυτό το σημειακού φορτίου, δηλ. οι διαστάσεις της ράβδου δεν έχουν πια σημασία.

Συνολικές μονάδες: 112.5
Άριστα: 100