

Εικόνα: Isaac Newton: Θεωρείται πατέρας της Κλασικής Φυσικής, καθώς ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου αλλά και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης και τον περισπούδαστο «νόμο της βαρύτητας»

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Οι Νόμοι της Κίνησης



Εικόνα: Isaac Newton: Θεωρείται πατέρας της Κλασικής Φυσικής, καθώς ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου αλλά και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης και τον περισπούδαστο «νόμο της βαρύτητας»

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Οι Νόμοι της Κίνησης

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Ως τώρα, μελετήσαμε κινήσεις σωματιδίων
  - Ορίσαμε θέση, μετατόπιση, ταχύτητες, επιταχύνσεις…
  - …καθώς και **μοντέλα κίνησης** με τα οποία μπορούμε να περιγράψουμε πραγματικά φαινόμενα
    - Κίνηση υπό μηδενική ή μη-μηδενική, σταθερή, επιτάχυνση
  - Δεν μας ενδιέφερε η **αιτία** της κίνησης
- Καιρός να τη μελετήσουμε κι αυτή! ☺

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Ερωτήματα**
  - Γιατί μεταβάλλεται η κίνηση ενός αντικειμένου;
  - Τι προκαλεί την κίνηση ή την ακινησία του;
  - Γιατί είναι πιο εύκολο να κινήσουμε ένα “μικρό” από ένα “μεγάλο” αντικείμενο;

- «Κλειδιά» για τις απαντήσεις
  - **Δύναμη (Force – F)** που ασκείται στο αντικείμενο
  - **Μάζα (Mass – m)** του αντικειμένου

Οι Νόμοι της Κίνησης

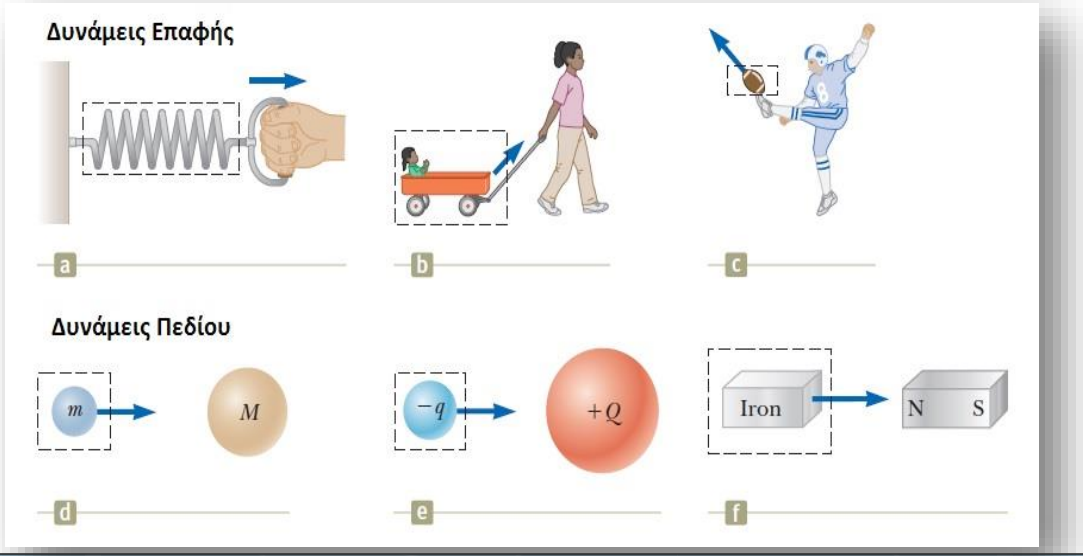
- **Δύναμη**
  - Καθημερινή εμπειρία
    - Πέταγμα μπάλας
    - Σπρώξιμο ντουλάπας
    - Τράβηγμα συρταριού
  - Αλληλεπίδραση με αντικείμενα μέσω μυϊκής δράσης, με αποτέλεσμα την αλλαγή της κινητικής τους κατάστασης
  - Δεν είναι όμως πάντα απαραίτητη η πρόκληση κίνησης
    - Βαριά μπάλα
    - Μεγάλη ντουλάπα
    - Κλειδωμένο συρτάρι

Οι Νόμοι της Κίνησης

- *“Οι Δυνάμεις είναι αυτές που αλλάζουν την ταχύτητα ενός σώματος”*

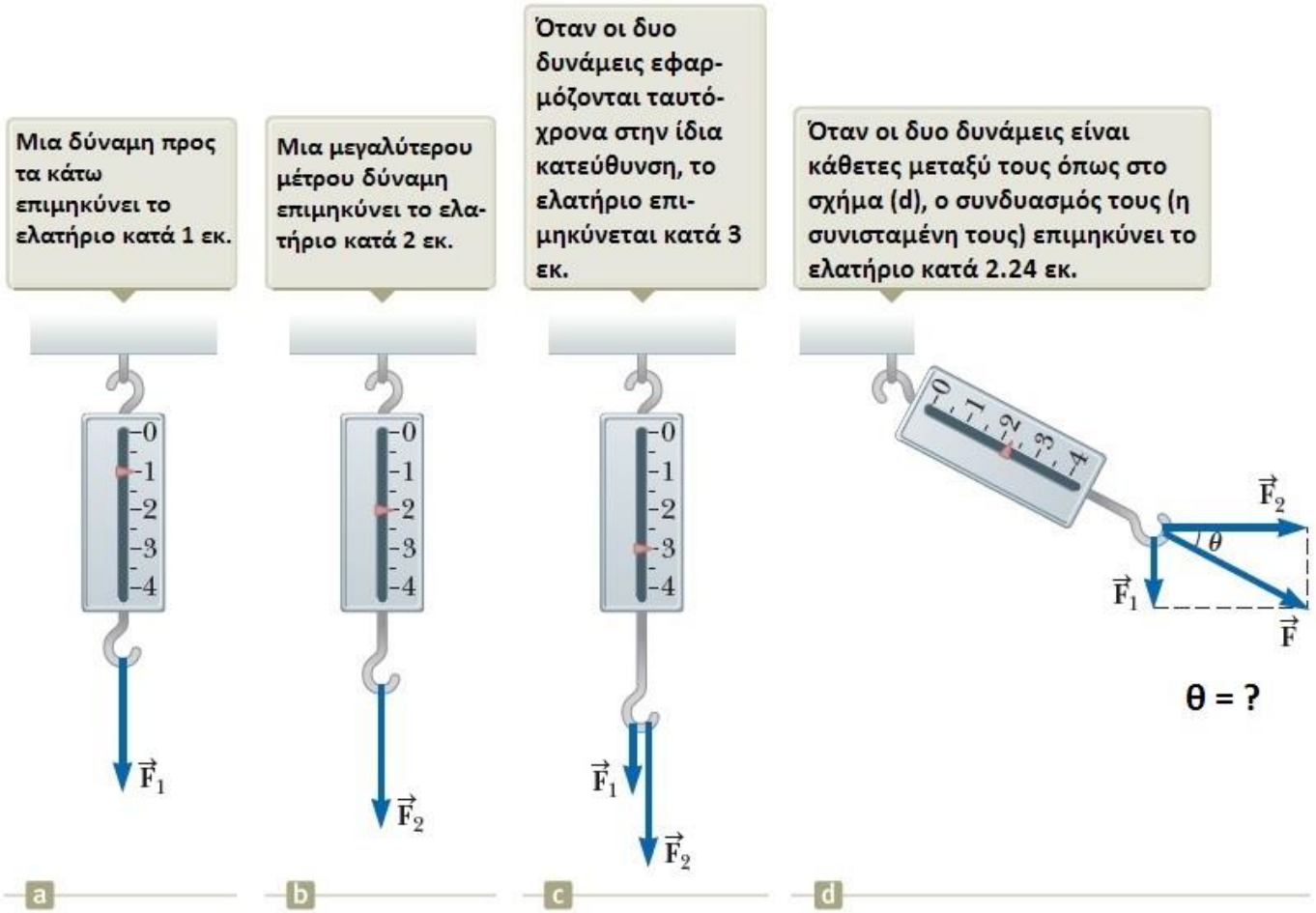
(I. Newton)

- Δυο κατηγορίες δυνάμεων (κλασική θεώρηση)
  - Δυνάμεις Επαφής
  - Δυνάμεις Πεδίου (ή δυνάμεις από απόσταση)



Οι Νόμοι της Κίνησης

- Η διανυσματική φύση της Δύναμης



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Συστήματα αναφοράς**
  - **Σύστημα αναφοράς** ονομάζουμε το φυσικό αντικείμενο στο οποίο προσαρτούμε το σύστημα συντεταγμένων μας (και το οποίο αντικείμενο θεωρούμε ότι δεν κινείται)
    - Π.χ. το έδαφος, όταν μετράμε την ταχύτητα ενός σώματος
  - Αν ένα σώμα **δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα,** μπορούμε να ορίσουμε ένα **σύστημα αναφοράς** στο οποίο το σώμα έχει **μηδενική επιτάχυνση: αδρανειακό σύστημα αναφοράς**
    - $\vec{a} = 0 \Rightarrow$ ακίνητο σώμα **Ή** κινούμενο με σταθερή ταχύτητα
  - **Όλα** τα συστήματα αναφοράς στο μάθημα θα (φροντίσουμε να) είναι αδρανειακά…
    - …οπότε ΔΕ θα αναφερόμαστε σε αυτή τους την ιδιότητα

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Πρώτος Νόμος του Newton**
  - Πάντα μπορούμε να βρούμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς
    - …και στη συνέχεια θα θεωρούμε κάθε σύστημα αναφοράς ως αδρανειακό, κι εκεί θα ισχύουν οι νόμοι που θα περιγράψουμε
  - **Απουσία εξωτερικών δυνάμεων και παρουσία αδρανειακού συστήματος αναφοράς**
    - **ένα σώμα σε ηρεμία παραμένει σε ηρεμία**
    - **ένα σώμα υπό σταθερή ταχύτητα παραμένει υπό σταθερή ταχύτητα**
  - Με άλλα λόγια
    - **Όταν δεν επιδρά καμιά δύναμη σε ένα σώμα, η ταχύτητά του (ως διάνυσμα) δεν μπορεί να αλλάξει**
      - **Κι άρα η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδενική**
- Η τάση ενός σώματος να αντιδρά σε οποιαδήποτε μεταβολή της κινητικής του κατάστασης λέγεται **αδράνεια** (και η **μάζα** του αποτελεί **«μέτρο»** της αδράνειάς του)

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Πρώτος Νόμος του Newton**
  - Όμως η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος
  - Μπορούν να ασκούνται δυνάμεις επάνω σε ένα σώμα αλλά η συνολική δύναμη (ή **συνισταμένη**) να είναι μηδέν!

- Άρα μια ορθότερη διατύπωση του 1ου νόμου του Newton θα είναι:

- **Αν η συνισταμένη (το διανυσματικό άθροισμα) των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι μηδενική, η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδενική**
  - **Αν το σώμα είναι ακίνητο, τότε παραμένει ακίνητο**
  - **Αν κινείται υπό σταθερή ταχύτητα, συνεχίζει και κινείται έτσι**

- Λέμε τότε ότι **το σώμα ισορροπεί**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Από τα προηγούμενα, μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι:

- **Ο 1ος νόμος του Newton γράφεται ως**

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

- **Αν σε ένα σώμα απουσιάζουν δυνάμεις ή η συνισταμένη τους είναι μηδέν, το σώμα ισορροπεί (δηλ. δεν επιταχύνει)!**
  - **Ένα σώμα που επιταχύνει πρέπει να υπόκειται σε κάποια (συνισταμένη, μη μηδενική) δύναμη**

- **Η δύναμη είναι το αίτιο της μεταβολής της κινητικής κατάστασης ενός σώματος**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Ο 1ος Νόμος του Newton μας εξηγεί τι συμβαίνει σε ένα σώμα όταν οι δυνάμεις που ασκούνται έχουν **συνισταμένη μηδέν**
- Ο 2ος Νόμος του Newton (που θα δούμε αμέσως) μας εξηγεί τι συμβαίνει όταν οι δυνάμεις που ασκούνται επάνω του **ΔΕΝ έχουν μηδενική συνισταμένη**
- Πριν τον δούμε, ας μιλήσουμε για την έννοια της **μάζας** ενός σώματος

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Η έννοια της μάζας**
- Διαφορετικά σώματα χρειάζονται διαφορετικό μέτρο δύναμης για να μεταβάλλουν την κατάσταση κίνησής τους
  - Με άλλα λόγια, αντιστέκονται περισσότερο ή λιγότερο στη μεταβολή της κίνησής τους
- Γιατί;
  - Γιατί έχουν διαφορετική **μάζα**
- Η **μάζα** είναι μια ιδιότητα ενός σώματος που **ορίζει «πόση» αντίσταση παρουσιάζει στην προσπάθεια μεταβολής της ταχύτητάς του**
- Στο Διεθνές Σύστημα (S.I) μετριέται σε **kg (κιλά)**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Δεύτερος Νόμος του Newton**
  - Σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η **επιτάχυνση** ενός σώματος είναι
    1. **ευθέως ανάλογη** της **συνολικής δύναμης**, $\sum \vec{\mathrm{F}}$, που ασκείται επάνω του και
    2. **αντιστρόφως ανάλογη** της **μάζας** του, m

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

και έτσι έχουμε τη γνωστή σχέση

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Φυσικά, μπορούμε – και σε πολλές περιπτώσεις **επιβάλλεται** – να αναλύσουμε το 2ο νόμο (όπως και τον 1ο) σε ***συνιστώσες παράλληλες με τους άξονες*** **του συστήματος αναφοράς μας**

$$\sum \vec{\mathrm{F}}_x = m\vec{a}_x, \qquad \sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y, \qquad \sum \vec{F}_z = m\vec{a}_z$$

- **Μπορούμε να μετατρέψουμε τις παραπάνω διανυσματικές εξισώσεις σε αλγεβρικές λαμβάνοντας υπ' όψη τη θετική φορά του εκάστοτε άξονα**
  - ….όπως θα δείξουμε στο επόμενο παράδειγμα

- Μονάδα μέτρησης δύναμης στο S.I.
  - Newton (N) ⇔ $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Δυο (στους τρεις ☺) Νόμοι του Newton**

1. **Ένα σώμα στο οποίο η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μηδενική, ισορροπεί (δηλ. δεν επιταχύνεται)**

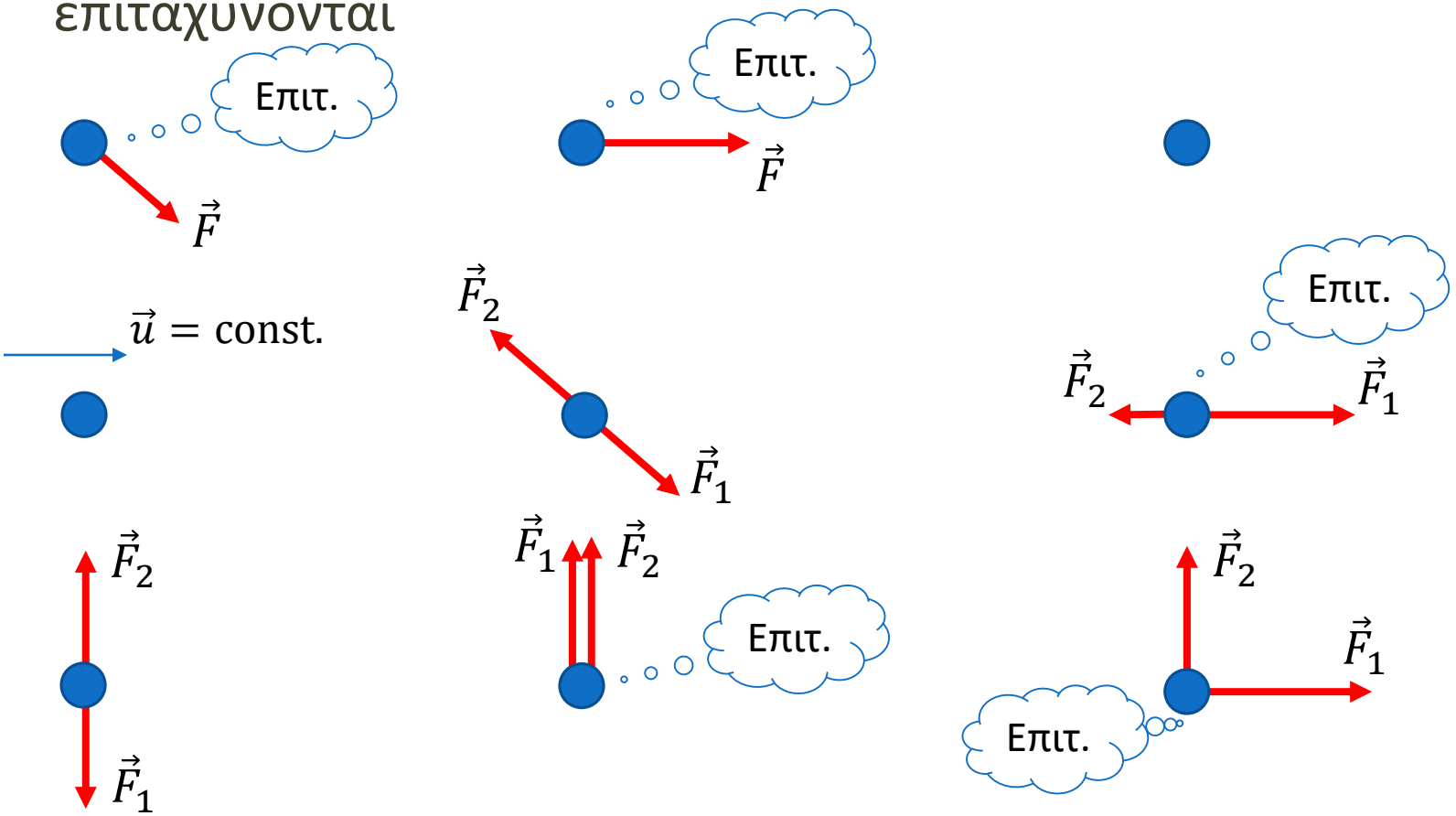
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

2. **Ένα σώμα στο οποίο η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μη μηδενική, επιταχύνεται**

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Quiz:**
- Βρείτε αν τα παρακάτω σώματα ισορροπούν ή επιταχύνονται



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα:**
  - Ένας δίσκος του hockey στον πάγο, μάζας 0.3 kg, ολισθαίνει ελεύθερα σε οριζόντια επιφάνεια πάγου. Δυο μπαστούνια τη χτυπούν ταυτόχρονα, με δυνάμεις και υπό γωνίες όπως στην Εικόνα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του δίσκου.

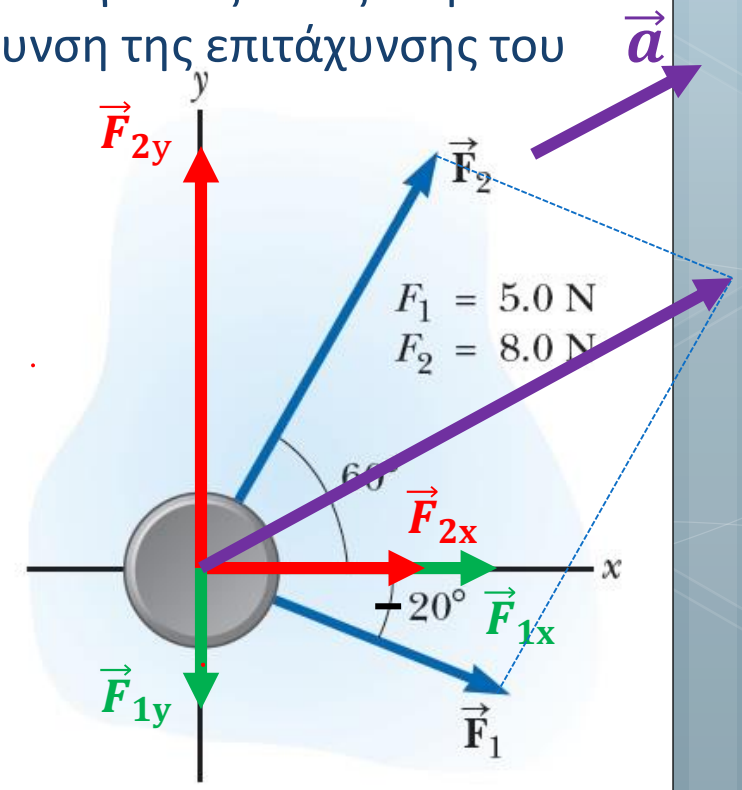
Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες!

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y} = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}$$

$$= F_1\cos(-20^\circ)\vec{i} + F_1\sin(-20^\circ)\vec{j}$$

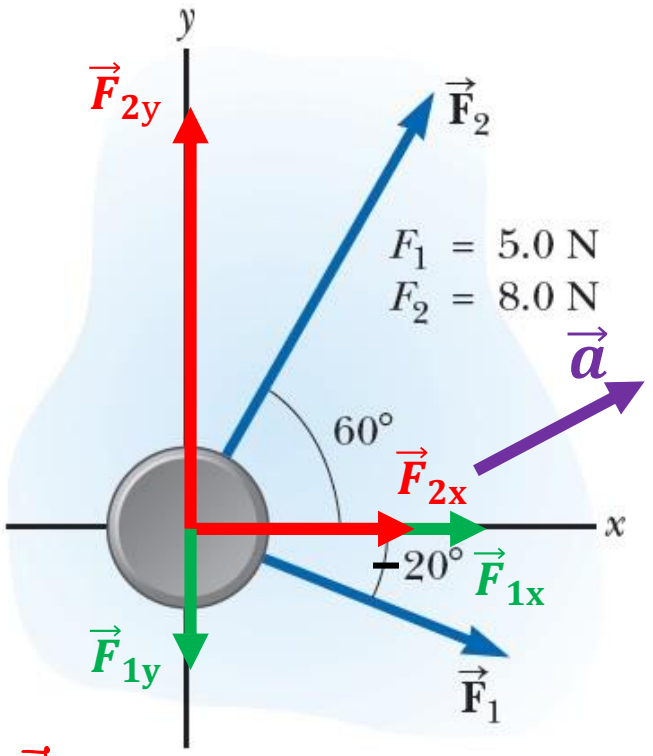
$$= 5\cos(-20^\circ)\vec{i} + 5\sin(-20^\circ)\cdot\vec{j}$$

$$= 5\cos(20^\circ)\vec{i} - 5\sin(20^\circ)\vec{j} \quad (1)$$



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Επίσης,

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y} = F_{2x}\,\vec{i} + F_{2y}\,\vec{j}$$

$$= F_2 \cos(60^\circ)\,\vec{i} + F_2 \sin(60^\circ)\,\vec{j}$$

$$= 8\cos(60^\circ)\,\vec{i} + 8\sin(60^\circ)\,\vec{j} \quad (2)$$

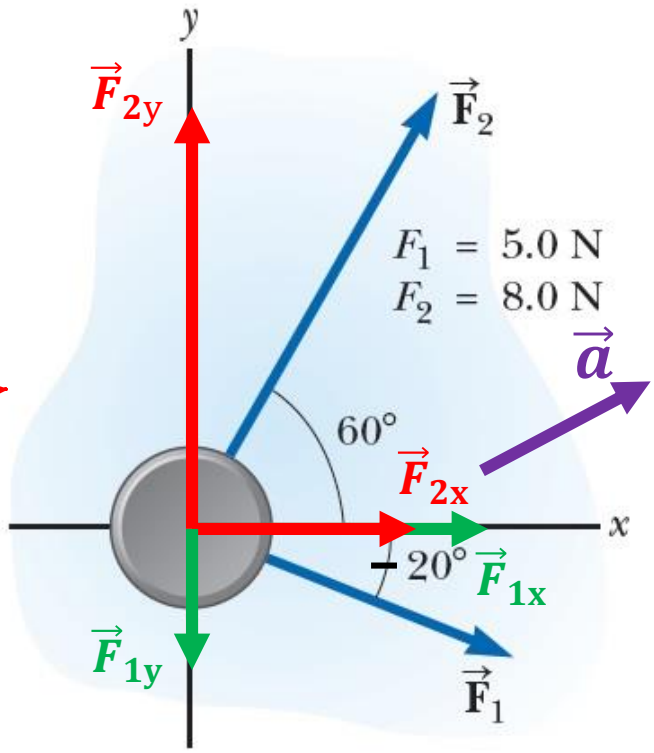
Ο δίσκος επιταχύνεται και στους δυο άξονες:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$$

Άρα θα δουλέψαμε με το 2ο Ν. Newton και στους δυο άξονες!

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



↘ Στον άξονα x'x :

$$\Sigma \vec{F_x} = m\vec{a_x} \Leftrightarrow \Sigma F_x \vec{i} = m a_x \vec{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F_x = m a_x \Leftrightarrow F_{1x} + F_{2x} = m a_x$$

Λόγω ①, ②

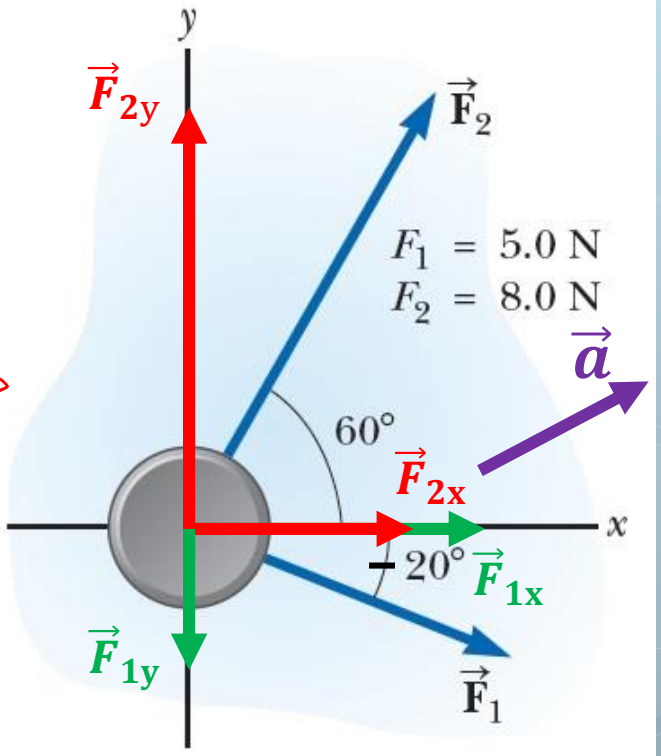
$$5\cos 20^\circ + 8\cos 60^\circ = m \cdot a_x$$

$$a_x = \frac{5\cos 20^\circ + 8\cos 60^\circ}{0.3} \simeq 29 \frac{m}{s^2}$$

Άρα $\vec{a_x} = a_x \vec{i} = \left(29 \frac{m}{s^2}\right)\vec{i}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



$\rightsquigarrow$ Στον άξονα y'y:

$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_y \Leftrightarrow \Sigma F_y \cdot \vec{j} = m a_y \cdot \vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F_y = m a_y \Leftrightarrow F_{1y} + F_{2y} = m a_y$$

Λόγω ①, ②

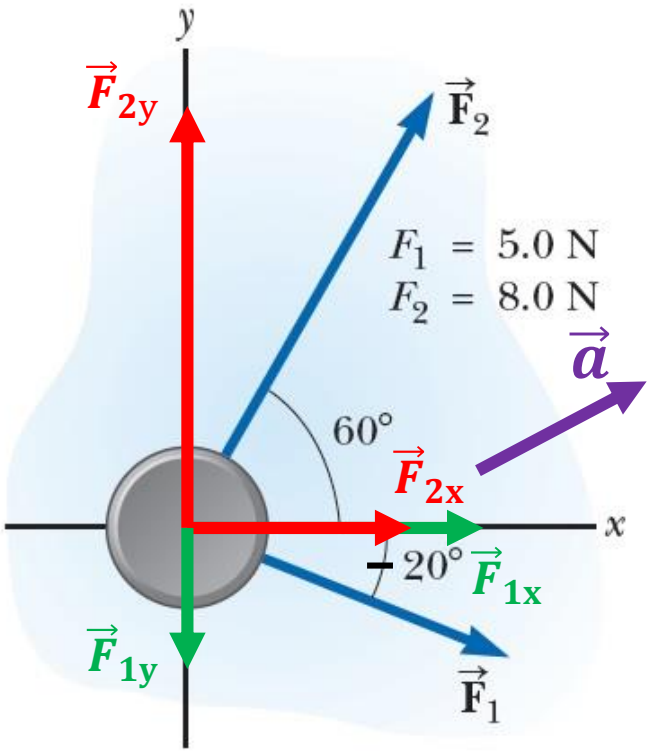
$$-5 \sin 20^\circ + 8 \sin 60^\circ = m a_y$$

$$a_y = \frac{8 \sin 60^\circ - 5 \sin 20^\circ}{0.3} \simeq 17 \ \frac{m}{s^2}$$

Άρα $\quad \vec{a}_y = a_y \cdot \vec{j} = \left(17 \frac{m}{s^2}\right) \vec{j}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Άρα τελικά

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$= \left(29 \frac{m}{s^2}\right)\vec{i} + \left(17 \frac{m}{s^2}\right)\vec{j}$$

οπότε

$$|\vec{a}| = \sqrt{29^2 + 17^2} \simeq 33.6 \frac{m}{s^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) \simeq 30^\circ$$

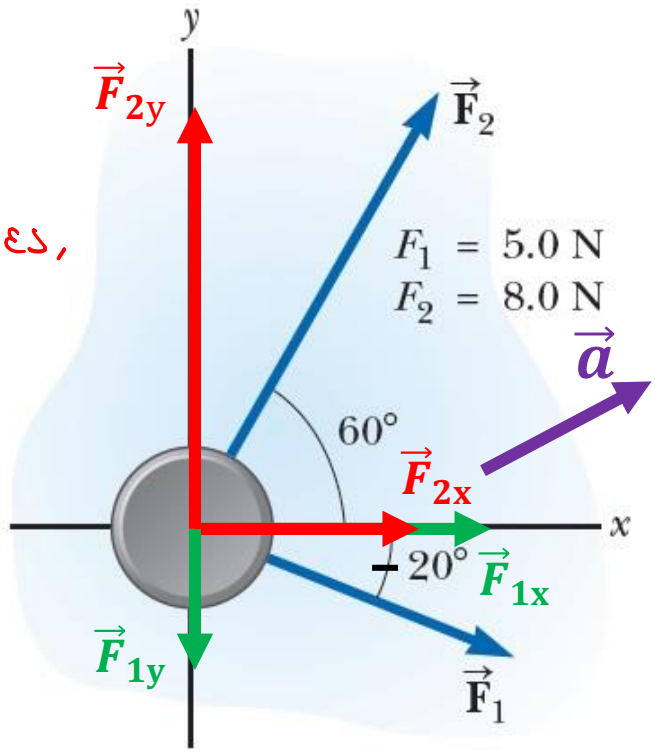
Οι Νόμοι της Κίνησης

- Τι μας έδειξε το προηγούμενο παράδειγμα?

- Ότι μπορούμε να:
  - Γράφουμε τους νόμους του Newton ανά άξονα...
    - ...στη διανυσματική μορφή τους
  - ...και στη συνέχεια, επιλέγοντας **θετική φορά** για τους δυο άξονες (συνήθως πάνω και δεξιά), να τους μετατρέπουμε σε αλγεβρικούς, χωρίς να κουβαλάμε τα μοναδιαία διανύσματα! Πως?
    - Δυνάμεις που «κοιτάζουν» προς τη **θετική φορά του** κάθε άξονα θα έχουν **θετικό πρόσημο** στις αλγεβρικές εξισώσεις
    - Δυνάμεις που «κοιτάζουν» **αντίθετα της θετικής φοράς** κάθε άξονα θα έχουν **αρνητικό πρόσημο** στις αλγεβρικές εξισώσεις
      - Πώς θα προκύπτουν αυτές?
      - Από την ανάλυση σε συνιστώσες κ' τις γωνίες του προβλήματος!

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση (ΞΑΝΑ):**



Το σώμα επιταχύνεται και στους δυο άξονες, άρα ισχύει ο 2ος νόμος του Newton:

$\rightsquigarrow$ Στον x'x: $\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x$

$$\vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} = m\vec{a}_x$$

(τα $\vec{F}_{1x}, \vec{F}_{2x}$ κοιτάζουν δεξιά, άρα +|.|)

$$+|\vec{F}_{1x}| + |\vec{F}_{2x}| = ma_x$$

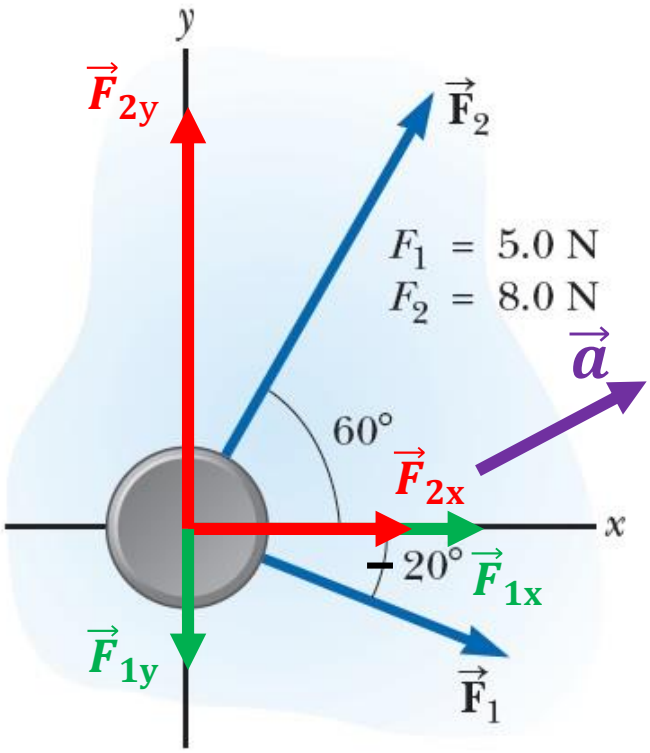
$$+F_1 \cdot \cos(20^\circ) + F_2 \cdot \cos(60^\circ) = ma_x$$

$$a_x = \frac{F_1 \cdot \cos(20^\circ) + F_2 \cdot \cos(60^\circ)}{m} \simeq 29 \ \frac{m}{s^2}$$

Άρα $\vec{a}_x = a_x \vec{i} = \left(29 \ \frac{m}{s^2}\right)\vec{i}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση (ΞΑΝΑ):**



~ Στον $y'y$: $\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y$

$$\vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} = m\vec{a}_y$$

($\vec{F}_{1y}$ κατεύθυνση κάτω, άρα $-|\vec{F}_{1y}|$)

$$-|\vec{F}_{1y}| + |\vec{F}_{2y}| = ma_y$$

$$-F_1 \cdot \sin(20^\circ) + F_2 \sin(60^\circ) = ma_y$$

$$a_y = \frac{F_2 \sin 60^\circ - F_1 \sin 20^\circ}{m} \simeq 17 \frac{m}{s^2}$$

Άρα $\vec{a}_y = a_y \vec{j} = \left(17 \frac{m}{s^2}\right)\vec{j}$

Συνολικά, $\vec{a} = \left(29 \frac{m}{s^2}\right)\vec{i} + \left(17 \frac{m}{s^2}\right)\vec{j}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Δύναμη του βάρους**
  - Όλα τα σώματα έλκονται από τη Γη
  - Με άλλα λόγια, η Γη ασκεί δύναμη επάνω τους
  - Την περίφημη **<u>δύναμη του βάρους</u>** $\vec{F}_g$
  - Άρα, τα επιταχύνει προς το κέντρο της!

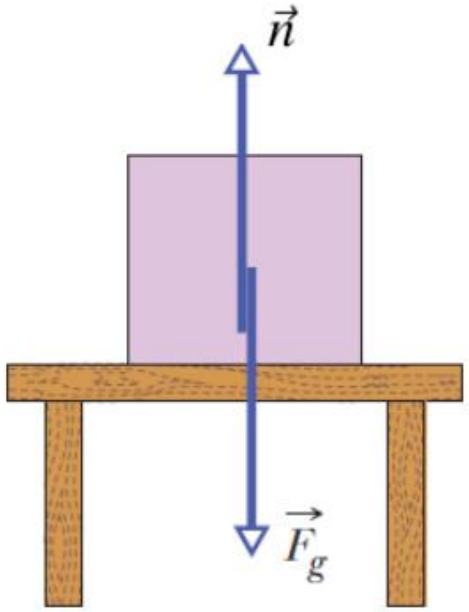
- **Βαρυτική επιτάχυνση** $\vec{g} = \left(-9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\vec{j}$



- 2ος Νόμος του Newton για αντικείμενο που **πέφτει ελεύθερα**, θετική φορά ↑

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{F}_g = m\vec{g} \Rightarrow F_g = -mg$$

Οι Νόμοι της Κίνησης



- **Κάθετη δύναμη** από επιφάνεια
  - Το σώμα ισορροπεί στο τραπέζι
  - Πρέπει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0}$$

  - Αν $\vec{n}$ η δύναμη που ασκεί το τραπέζι πάνω στο σώμα, τότε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0} \Rightarrow n - \vec{F}_g = 0 \Rightarrow n = F_g$$

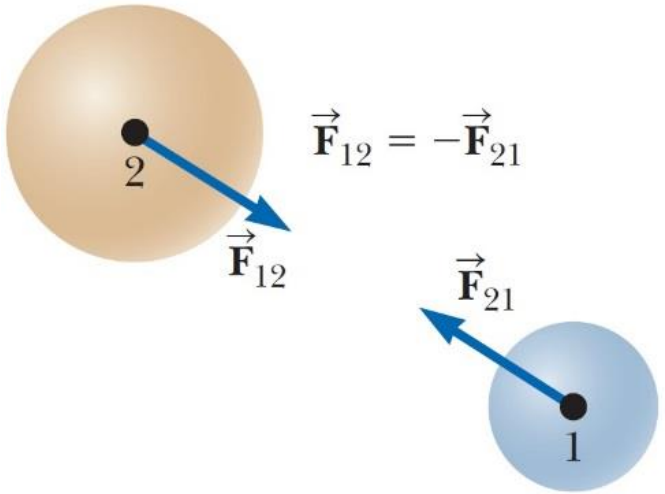
  - Άρα η κάθετη δύναμη από το τραπέζι στο σώμα είναι

$$n = F_g = mg$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Τρίτος Νόμος του Newton**
  - *Σε κάθε δράση, υπάρχει μια αντίδραση!*
  - Πιο τυπικά… ☺
    - ***Αν δυο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκείται από το σώμα 1 στο σώμα 2 είναι ίση σε μέτρο και αντίθετη σε κατεύθυνση στη δύναμη $\vec{F}_{21}$, που ασκείται από το σώμα 2 στο σώμα 1:***

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Οι δυνάμεις του 3ου νόμου Newton ασκούνται σε διαφορετικά σώματα!!!

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Τρεις Νόμοι του Newton**

1. **Ένα σώμα στο οποίο η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μηδενική, ισορροπεί (δηλ. δεν επιταχύνεται)**

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

2. **Ένα σώμα στο οποίο η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μη μηδενική, επιταχύνεται**

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

3. **Αν δυο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκείται από το σώμα 1 στο σώμα 2 είναι ίση σε μέτρο και αντίθετη σε κατεύθυνση στη δύναμη $\vec{F}_{21}$, που ασκείται από το σώμα 2 στο σώμα 1**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Ανάλυση** με βάση τους Τρεις Νόμους
  - Δυο **νέα** μοντέλα
  - Α) Όταν τα σώματα βρίσκονται σε **ισορροπία** $(\vec{a} = \mathbf{0})$**,** και η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω τους είναι μηδενική
  - Β) Όταν σώματα **επιταχύνουν** υπό την άσκηση εξωτερικών δυνάμεων $(\vec{a} \neq \mathbf{0})$ και η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω τους είναι μη μηδενική

Θυμηθείτε τα μοντέλα της Κινητικής!!

A. **Κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα**
B. **Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Τέσσερα μοντέλα ανάλυσης της κίνησης**

Σώμα σε ακινησία

Κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα (διαδρομή Α→Β)

$$x_B = x_A + u_x t$$

Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση (διαδρομή Α→Β)

1. $u_{x_B} = u_{x_A} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_A} + u_{x_B}}{2}$
3. $x_B = x_A + u_{x,avg} t$
4. $x_B = x_A + u_{x_A} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_B}^2 = u_{x_A}^2 + 2a_x (x_B - x_A)$

Σώμα σε ισορροπία

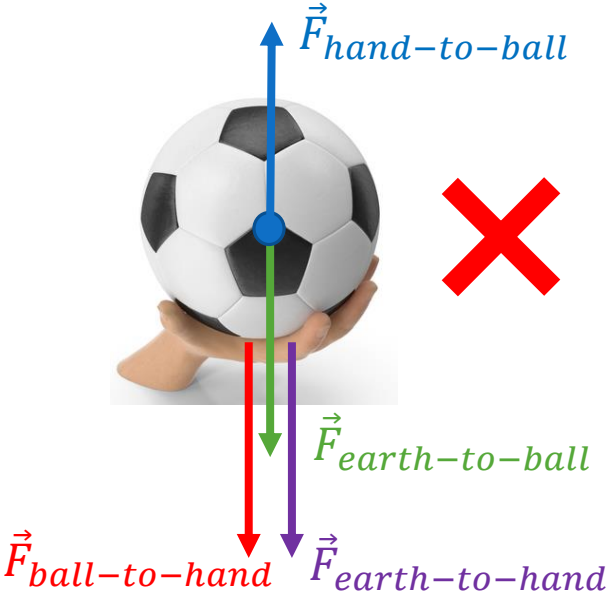
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

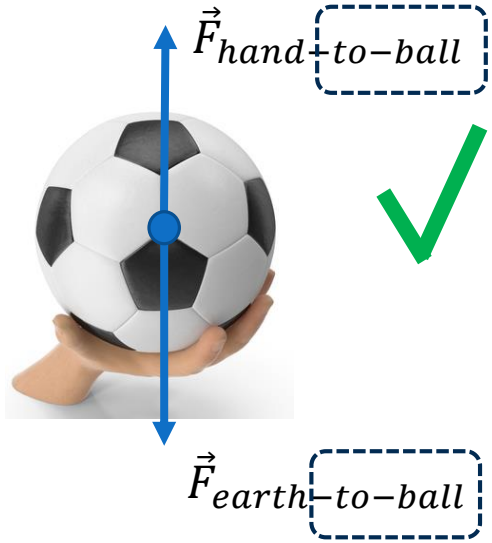
Σώμα σε επιτάχυνση

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Πώς βρίσκουμε/σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα?**
  - Κατ'αρχάς πρέπει να καταλαβαίνουμε **ΠΟΙΕΣ** είναι αυτές οι δυνάμεις
    - …να τις διακρίνουμε δηλαδή από όποιες άλλες…
    - …και να τις σχεδιάσουμε **πάνω στο σώμα**, θεωρώντας ότι όλες ξεκινούν από το **κέντρο του** (σαν να ήταν σωματίδιο)





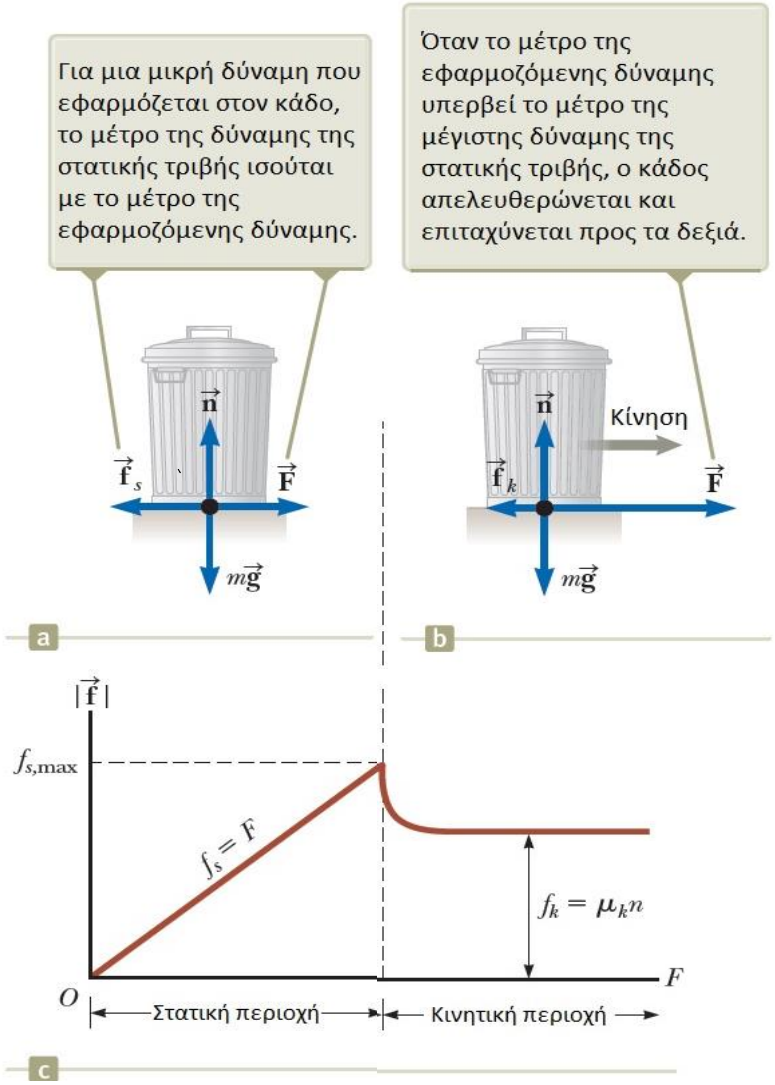


Διάγραμμα ελευθέρου σώματος

Οι Νόμοι της Κίνησης

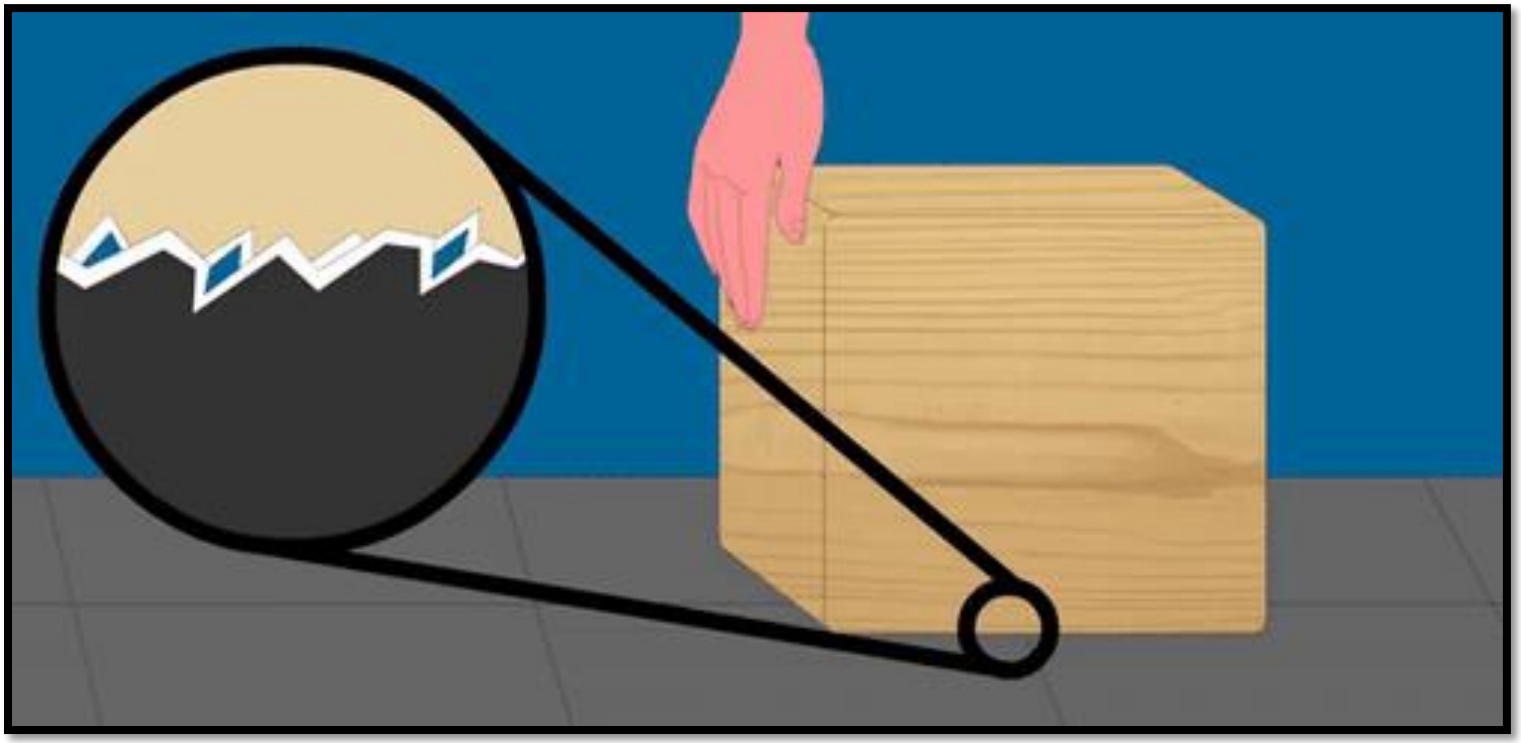
- **Δυνάμεις Τριβής**
  - Ως τώρα, τις αγνοήσαμε
  - Πολύ σημαντικές (είναι ο λόγος που περπατάμε, που τα αυτοκίνητα κινούνται, που μπορούμε να κρατήσουμε ένα μολύβι, που μπορούμε να δέσουμε τα κορδόνια μας κλπ)
  - **Τριβή ονομάζουμε τη δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση ενός σώματος όταν αυτό εφάπτεται σε μια επιφάνεια**
  - Πολλά είδη τριβής
    - Στατική τριβή, τριβή ολίσθησης, τριβή ρευστών, κ.α.
  - Στη Κίνηση Σωμάτων, μας ενδιαφέρουν μόνο:
    - **Στατική τριβή**
    - **Τριβή ολισθήσεως**

Οι Νόμοι της Κίνησης



- **Στατική Τριβή**
  - Δύναμη $\vec{f}_s$ που αντιστέκεται στην κίνηση και στη δύναμη που την προκαλεί **σε ένα ακίνητο αντικείμενο**
- **Τριβή Ολίσθησης**
  - Δύναμη $\vec{f}_k$ που αντιστέκεται στην κίνηση για ένα αντικείμενο **που βρίσκεται σε κίνηση**

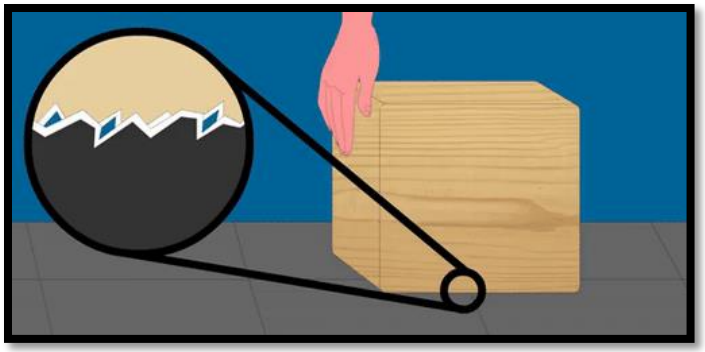
Οι Νόμοι της Κίνησης



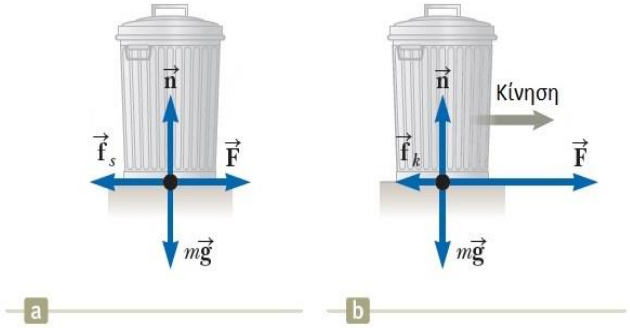
Οι Νόμοι της Κίνησης

- Οι δυνάμεις τριβής είναι **διαμοριακές** δυνάμεις: δρουν μεταξύ των μορίων δύο επιφανειών σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή

- Σε μικροσκοπική κλίμακα, οι περισσότερες επιφάνειες είναι τραχιές
  - Ακόμη και οι επιφάνειες που φαίνονται απόλυτα λείες με γυμνό μάτι…
  - … εμφανίζουν πολλές «προεξοχές» και «βαθουλώματα» στο μικροσκόπιο



Οι Νόμοι της Κίνησης



- **Παρατηρήσεις**
  - Το μέτρο της δύναμης της **στατικής** τριβής f_s ανάμεσα σε δυο επιφάνειες σε επαφή μπορεί να πάρει τιμές

$$f_s \leq \mu_s n \Rightarrow f_{s,max} = \mu_s n$$

όπου η σταθερά μ_s λέγεται **συντελεστής στατικής τριβής**, και n είναι το μέτρο της δύναμης που ασκείται από την ακίνητη επιφάνεια στην προς κίνηση επιφάνεια (από το έδαφος στον κάδο)

  - Το μέτρο της δύναμης της τριβής **ολίσθησης** ανάμεσα σε δυο επιφάνειες ισούται με

$$f_k = \mu_k n$$

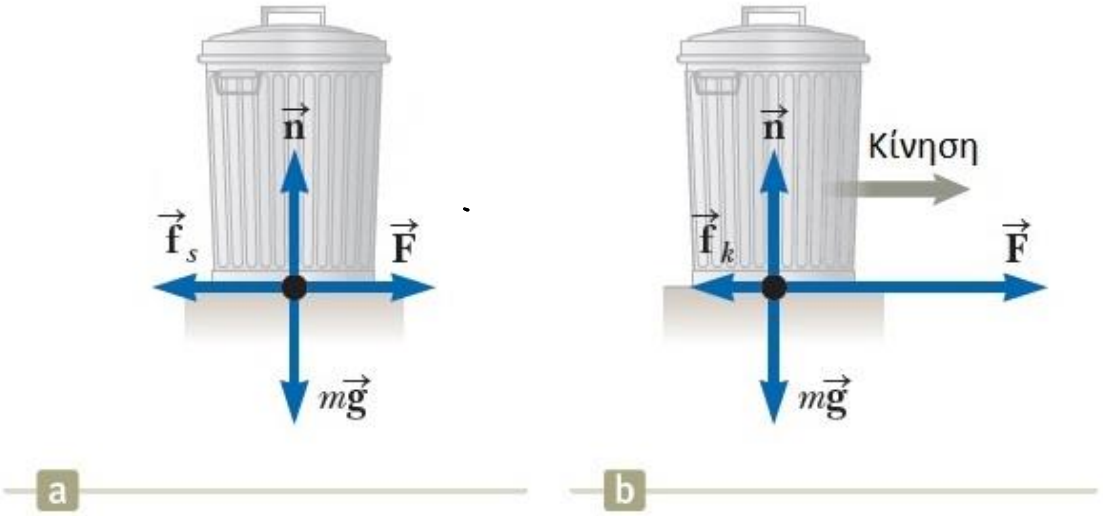
Οι εξισώσεις αυτές ΔΕΝ είναι διανυσματικές!!

όπου η σταθερά μ_k λέγεται **συντελεστής τριβής ολίσθησης**.

  - Οι συντελεστές αυτοί θα θεωρούνται σταθεροί

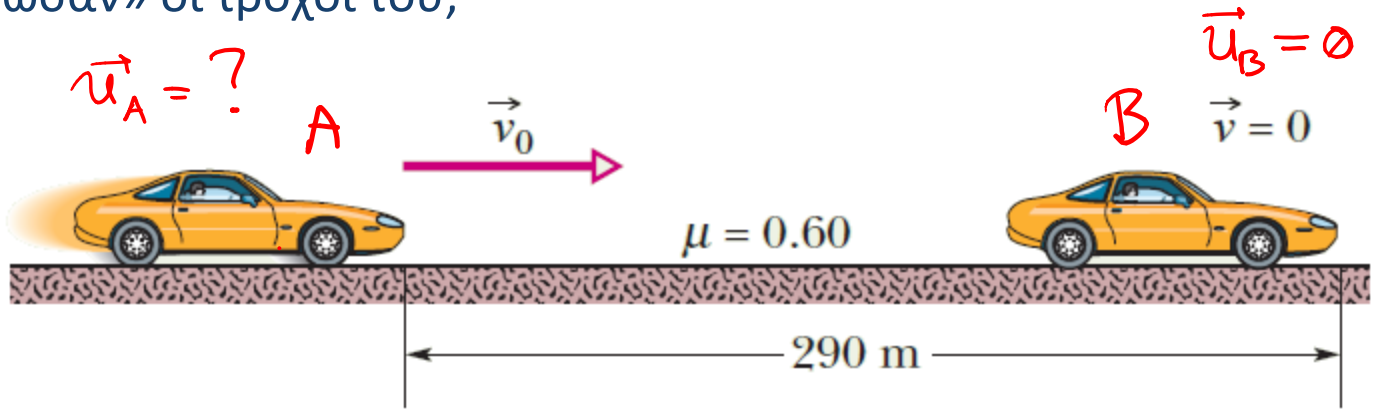
Οι Νόμοι της Κίνησης

- Οι τιμές των συντελεστών εξαρτώνται από το είδος της επιφάνειας
- Η **διεύθυνση** της δύναμης τριβής είναι πάντα **παράλληλη με την επιφάνεια** στην οποία εφάπτεται το σώμα, και η **φορά** της πάντα **αντίθετη** στην κίνηση (ή στην προσπάθεια κίνησης) σε σχέση με την επιφάνεια



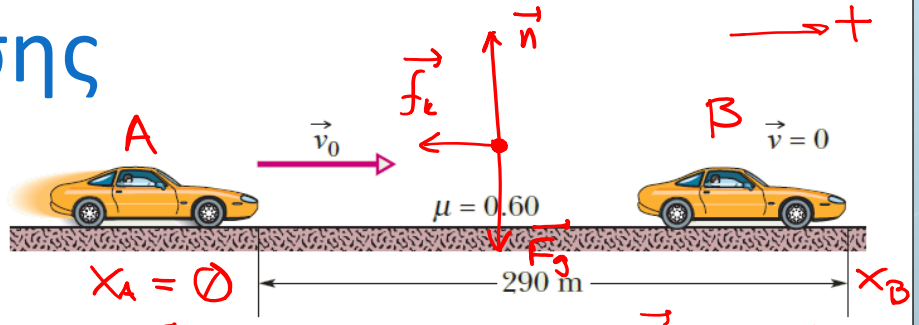
Οι Νόμοι της Κίνησης

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Όταν οι τροχοί ενός αυτοκινήτου «κλειδώνουν» (σταματούν να γυρίζουν) εξ' αιτίας ενός απότομου φρεναρίσματος, το αυτοκίνητο ολισθαίνει στο δρόμο και «αποτυπώνει» στο οδόστρωμα ίχνη από τα ελαστικά του. Το ρεκόρ για τα μεγαλύτερα σε μήκος ίχνη ελαστικών σε δημόσιο δρόμο έγινε το 1960 στην Αγγλία – το μήκος του ίχνους ήταν 290 μέτρα! Υποθέτοντας ότι $\mu_k = 0.6$ μεταξύ οδοστρώματος και ελαστικών, και ότι το αυτοκίνητο επιταχυνόταν σταθερά κατά το φρενάρισμα, πόσο γρήγορα έτρεχε το αυτοκίνητο ακριβώς όταν «κλείδωσαν» οι τροχοί του;



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στον άξονα x'x, ενώ στον άξονα y'y ισορροπεί, καθώς είναι ακίνητο. Δαλειάμε στη διαδρομή Α→Β.

Ισχύει ο 2ος Ν. Newton στον άξονα x'x:

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x$$

$$\vec{f}_k = m\vec{a}_x$$

$$-f_k = ma_x$$

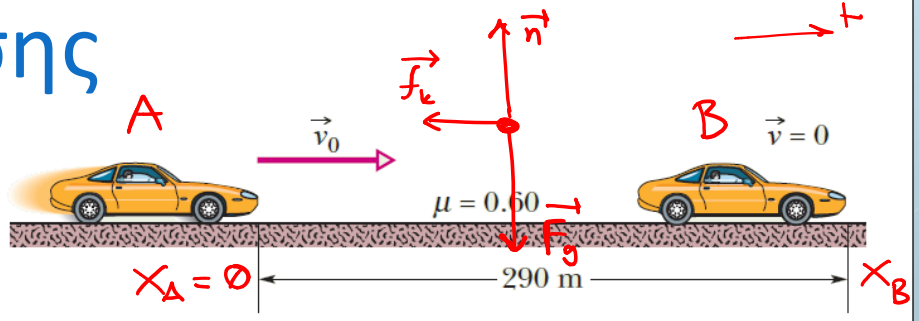
$$a_x = -\frac{f_k}{m} \quad (1)$$

Επίσης, ισχύει ο 1ος Ν. Newton στον άξονα y'y:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



$$\vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0}$$

$$n - F_g = 0$$

$$n = F_g = mg \quad (2)$$

Γνωρίζαμε ότι $f_k = \mu_k n \overset{(2)}{=} \mu_k mg$ (3). Η (1) λόγω (3) δίνει

$$a_x = -\frac{f_k}{m} = -\frac{\mu_k mg}{m} = -\mu_k g$$ (αρνητική, όπως αναμενόταν)

Από τις εξισώσεις της επιταχυνόμενης κίνησης στη διαδρομή A→B:

$$v_B^2 = v_A^2 + 2a_x \Delta x$$

$$0 \overset{(1)}{=} v_A^2 - 2\mu_k g \Delta x$$

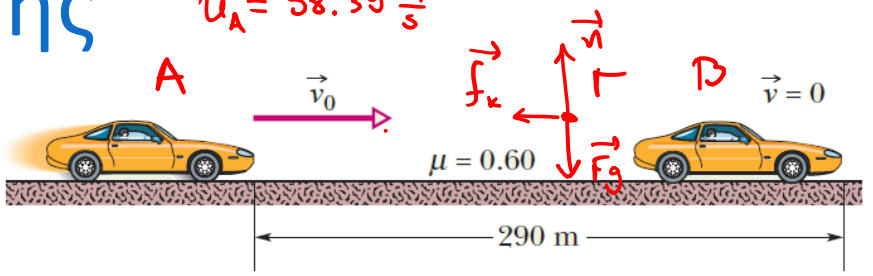
$$v_A^2 = 2\mu_k g \Delta x$$

$$v_A = +\sqrt{2\mu_k g \Delta x}$$ (διάνυσμα προς τα δεξιά) $\simeq 58.39 \frac{m}{s}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$u_A = 58.39 \frac{m}{s}$



Η ταχύτητα αυτή ισούται με περίπου 210 km/h, που είναι ένας λογικός αριθμός για ένα τέτοιο αγώνισμα.

Οπότε μπορούμε να γράψουμε

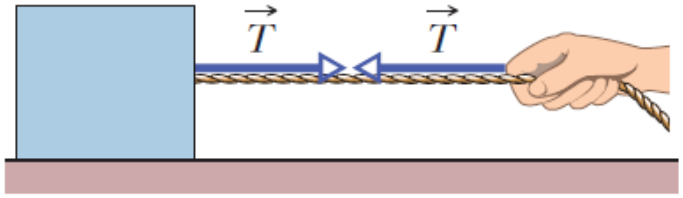
$$\vec{u_A} = \left(58.39 \frac{m}{s}\right)\vec{i}$$

Ερώτηση: Πως πιστεύετε θα άλλαζε το αποτέλεσμα αν:

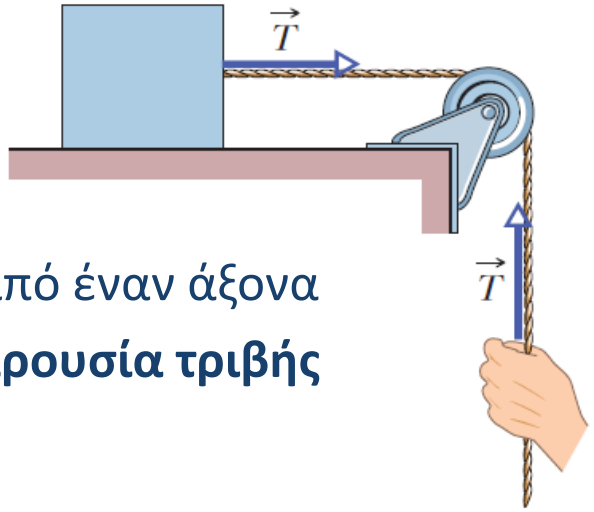
α) $\mu_k \uparrow$

β) $\mu_k \downarrow$

Οι Νόμοι της Κίνησης



- **Τάση νήματος και τροχαλίες**
- Έστω ένα **τεντωμένο νήμα** (ή καλώδιο ή σχοινί ή άλλο παρόμοιο) που δένεται σε ένα σώμα
- Σχεδόν πάντα το νήμα θεωρείται **αβαρές** και **ανελαστικό** (χωρίς βάρος και χωρίς ικανότητα «τεντώματος» ή «συμπίεσης»)
- Αν τραβήξουμε το σώμα μέσω του νήματος, το νήμα τραβά το σώμα (και το χέρι) με δύναμη $\vec{T}$ με κατεύθυνση μακριά από (προς) το σώμα και κατά μήκος του νήματος
- Η δύναμη συχνά ονομάζεται ***τάση νήματος***



- Μια **τροχαλία** αποτελείται από ένα κυλινδρικό μέρος που περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα
- Θεωρούνται και αυτές **αβαρείς** και **χωρίς παρουσία τριβής** κατά την κύλισή τους

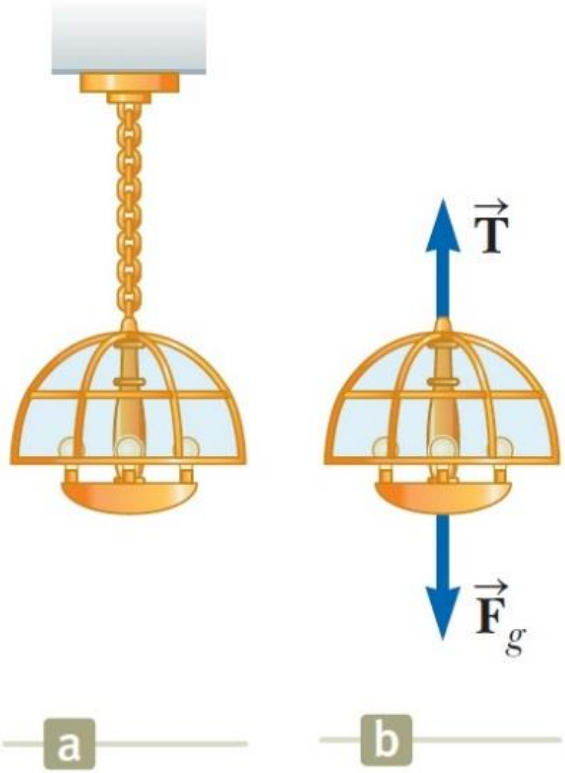
Οι Νόμοι της Κίνησης

- Α) Όταν τα αντικείμενα βρίσκονται σε **ισορροπία**

$$(\vec{a} = \mathbf{0})$$

τότε

$$\sum \vec{F} = 0 \ !$$



- **Παράδειγμα**
  - Ο πολυέλαιος κρέμεται σταθερά από το ταβάνι. Ποιες δυνάμεις ασκούνται επάνω του?

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Β) Όταν τα σώματα επιταχύνουν υπό την επίδραση δύναμης ($\vec{a} \neq \mathbf{0}$)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- **Παράδειγμα**
  - Βρείτε την επιτάχυνση στην οποία υπόκειται το κιβώτιο (λείο επίπεδο)
  - Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο επάνω στο κιβώτιο

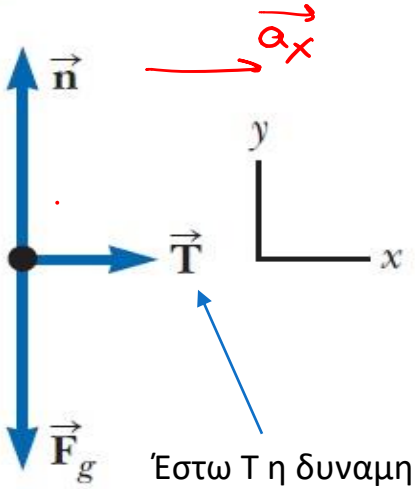


Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα**
  - Α. Βρείτε την επιτάχυνση στην οποία υπόκειται το κιβώτιο

Διάγραμμα ελεύθερου σώματος





Έστω Τ η δυναμη από το νήμα στο κιβώτιο

Το κιβώτιο επιταχύνεται μόνο στον άξονα $x'x$ (στον $y'y$ ισορροπεί). Άρα

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + \cancel{a_y\vec{j}}^{\,0} = a_x\vec{i}$$

Στο κιβώτιο ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος. Ισχύει ο 2ος νόμος Newton στον άξονα $x'x$:

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{a}_x \Leftrightarrow \vec{T} = m\vec{a}_x \Rightarrow T = ma_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{T}{m}, \text{ δηλ. } \vec{a} = \left(\frac{T}{m}\right)\vec{i}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα**
  - Β. Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο επάνω στο κιβώτιο

Διάγραμμα ελεύθερου σώματος



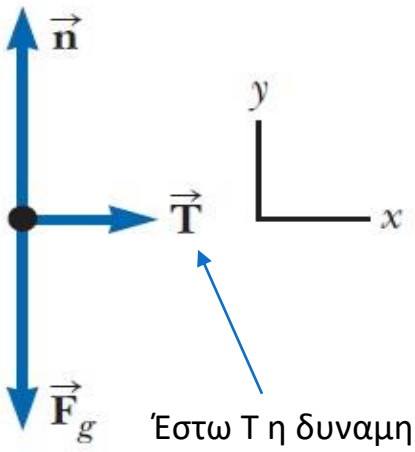
a

Το κιβώτιο είναι ακίνητο στον άξονα y'y, δηλ. ισορροπεί. Ισχύει ο 1ος νόμος Newton:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0}$$

$$n - F_g = 0 \Leftrightarrow \boxed{n = F_g = mg}$$

Άρα $\vec{n} = (mg)\vec{j}$



Έστω Τ η δυναμη από το νήμα στο κιβώτιο

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Δυο σημεία** που πρέπει να προσέξετε

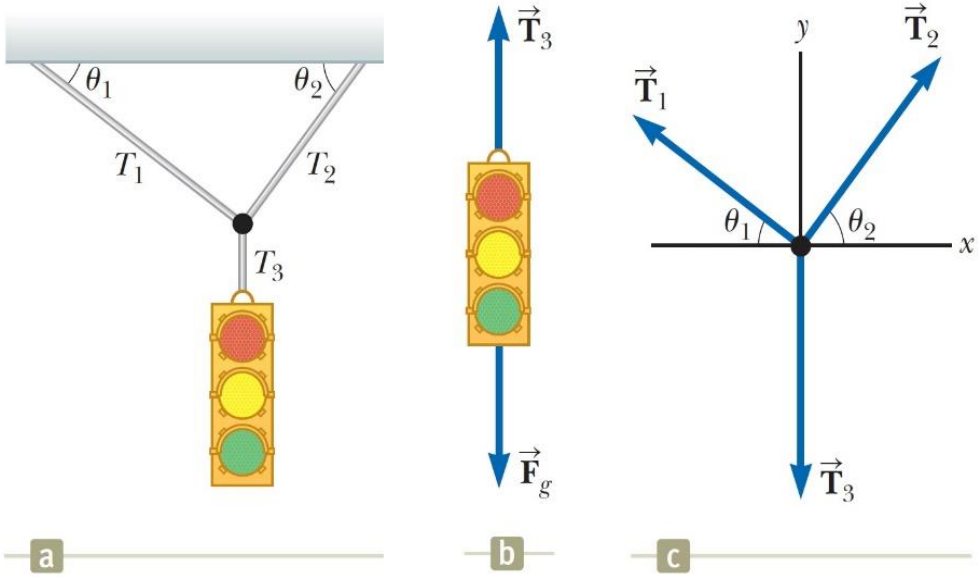
- **1) Είναι δυνατόν να έχετε διαφορετικά μοντέλα ανάλυσης σε διαφορετικές κατευθύνσεις (άξονες)**
  - Προηγούμενο παράδειγμα
    - Ισορροπία στον άξονα y
    - Επιτάχυνση στον άξονα x

- **2) Είναι δυνατόν να έχετε πολλαπλά μοντέλα ανάλυσης στην ίδια κατεύθυνση (άξονα)**
  - Προηγούμενο παράδειγμα
    - Σώμα υπό επίδραση μη μηδενικής συνισταμένης δύναμης στον άξονα x
    - Σώμα υπό επίδραση σταθερής επιτάχυνσης στον άξονα x

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα**

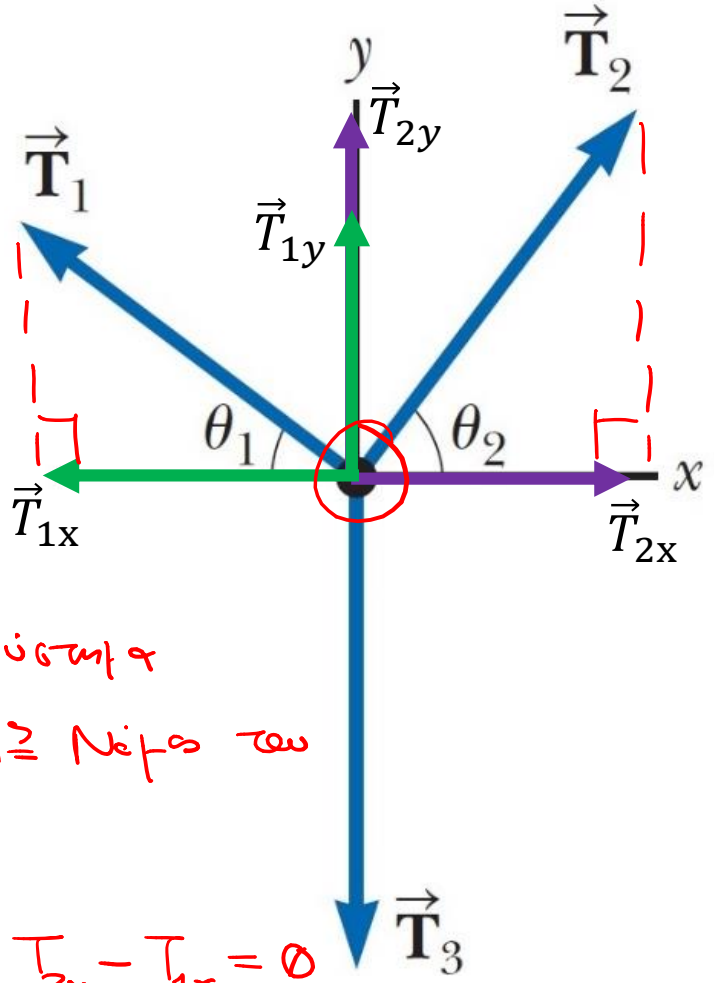
Ένα φανάρι με βάρος 122 N κρέμεται από ένα καλώδιο, που κρέμεται από άλλα δυο καλώδια, όπως στο Σχήμα, μέσω ζεύξης. Οι γωνίες θ_1, θ_2 είναι ίσες με 37 και 53 μοίρες, αντίστοιχα. Τα άνω καλώδια σπάνε αν δεχθούν (το καθένα) δύναμη μεγαλύτερη από 100 N. Μπορεί να συμβεί αυτό;



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$\cos(\theta_1) = 0.8, \sin(\theta_1) = 0.6$$
$$\cos(\theta_2) = 0.6, \sin(\theta_2) = 0.8$$



Θα μελετήσουμε τη ζεύξη των τριών καλωδίων. Οι άξονες x, y φαίνονται στο σχήμα. Προβάλλουμε τις δυνάμεις $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ επάνω στους άξονες. Το όλο σύστημα σημειακό ισορροπεί. Άρα ισχύει ο 1ος Νόμος του Newton και στους δυο άξονες.

- $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} = \vec{0} \Rightarrow T_{2x} - T_{1x} = 0$

Άρα $T_{1x} = T_{2x} \Leftrightarrow T_1 \cos\theta_1 = T_2 \cos\theta_2 \Leftrightarrow \boxed{T_1 = \frac{3}{4} T_2}$ (1)

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$\cos(\theta_1) = 0.8, \sin(\theta_1) = 0.6$$
$$\cos(\theta_2) = 0.6, \sin(\theta_2) = 0.8$$



- $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{T}_3 + \vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_{1y} + T_{2y} - T_3 = 0 \Leftrightarrow T_{1y} + T_{2y} = T_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{T_1 \sin\vartheta_1 + T_2 \sin\vartheta_2 = T_3}$ ②

Το φανάρι ισορροπεί, άρα ισχύει ο 1ος νόμος Newton:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{T}_3 + \vec{F}_g = \vec{0}$$

$$T_3 - F_g = 0 \Leftrightarrow \boxed{T_3 = F_g = 122\ N}$$ ③

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$\cos(\theta_1) = 0.8, \sin(\theta_1) = 0.6$$
$$\cos(\theta_2) = 0.6, \sin(\theta_2) = 0.8$$

Λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \frac{3}{4} T_2 \\ T_1 \cdot 0.6 + T_2 \cdot 0.8 = 122 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 \simeq 73.2 \text{ N}$$

$$T_2 \simeq 97.6 \text{ N}$$

Άρα οι τέλειες σχοινιά δε θα σπάσουν!

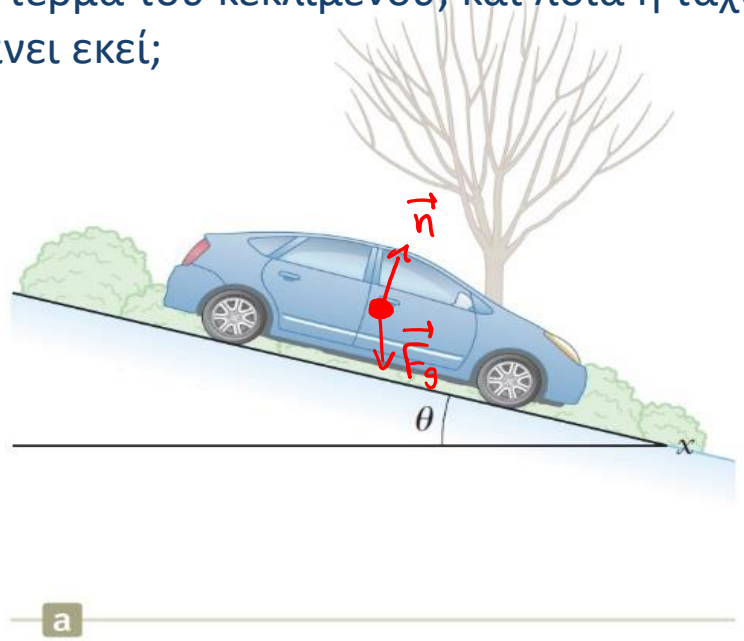
Οι Νόμοι της Κίνησης

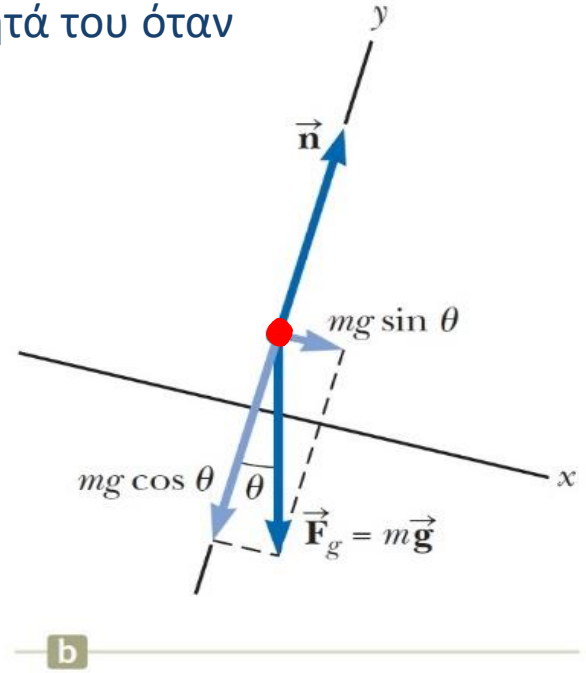
- **Παράδειγμα:**

Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές προς τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ. **Με ποια μοντέλα μπορείτε να περιγράψετε την κίνησή του?**

Α) Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

Β) Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου, που απέχει απόσταση d από το τέρμα του κεκλιμένου, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα του κεκλιμένου, και ποια η ταχύτητά του όταν φτάνει εκεί;



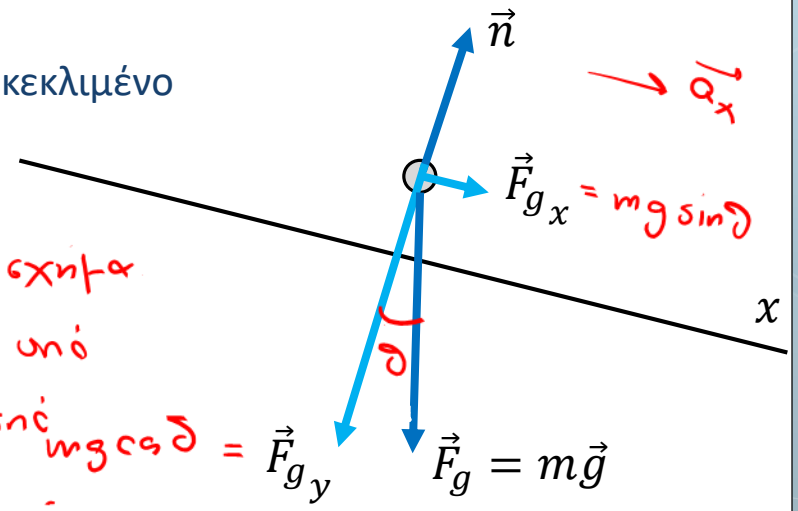


Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**

  Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ.

  Α) Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.



Θέτουμε τους άξονες x,y όπως στο σχήμα

Το αμάξι μετατοπίζεται ως προς υπό συνθήκη επιτάχυνση και ως προς υπό συνθήκη δύναμη ($\vec{F}_{g_x}$) στον άξονα x'x.

Οι δυνάμεις $\vec{n}$, $\vec{F}_g$ φαίνονται στο σχήμα. Ισχύει ο 2ος νόμος Newton στον άξονα x'x:

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Leftrightarrow \vec{F}_{gx} = m\vec{a}_x$$

δηλ. $mg\sin\theta = ma_x \Leftrightarrow \boxed{a_x = g\sin\theta}$

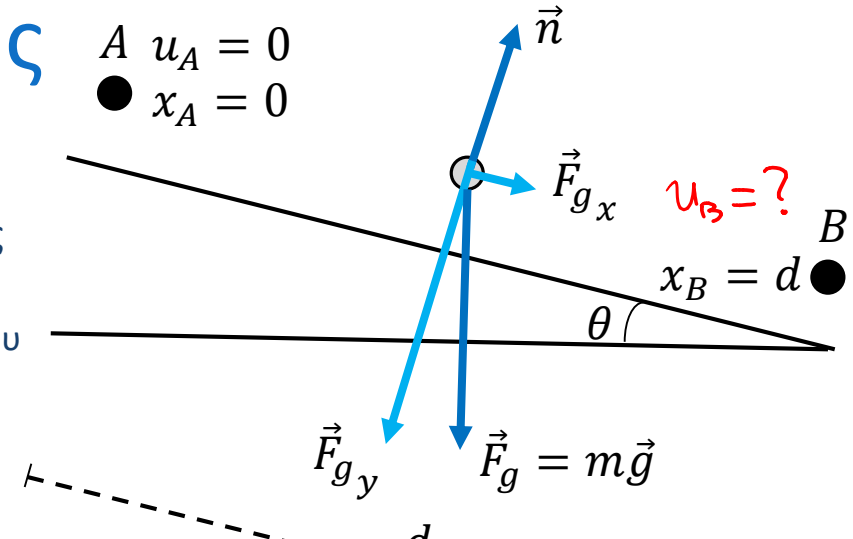
Άρα $\vec{a} = a_x\vec{i} = (g\sin\theta)\vec{i}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**

  Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ.

  Β) Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου, που απέχει απόσταση d από το τέρμα του κεκλιμένου, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα του κεκλιμένου, και ποια η ταχύτητά του όταν φτάνει εκεί;



Έστω η διαδρομή Α→Β όπου το α-άμ επιταχύνεται με $x_A = 0$, $x_B = d$. Ισχύουν οι εξισώσεις κινηματικής:

$$x_B = x_A + u_{x_A} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \Leftrightarrow d = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} g \sin\theta \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2d}{g\sin\theta} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}}$$. Για την ταχύτητα u_B έχαμε

$$u_{B_x} = u_{A_x} + a_x \cdot t = 0 + g\sin\theta \sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}} = \sqrt{2gd\sin\theta}$$. Εξίσου καλά

δουλεύει και η σχέση $u_{B_x}^2 = u_{A_x}^2 + 2a_x \Delta x$.

Τέλος Διάλεξης