

Physics

$$\omega = 2\pi f$$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$V^2 = u^2 + 2as$$

$$PE = mgh$$

$$P = \frac{W}{t}$$

$$I = \frac{V}{R}$$

$$PE = m \times g \times h$$

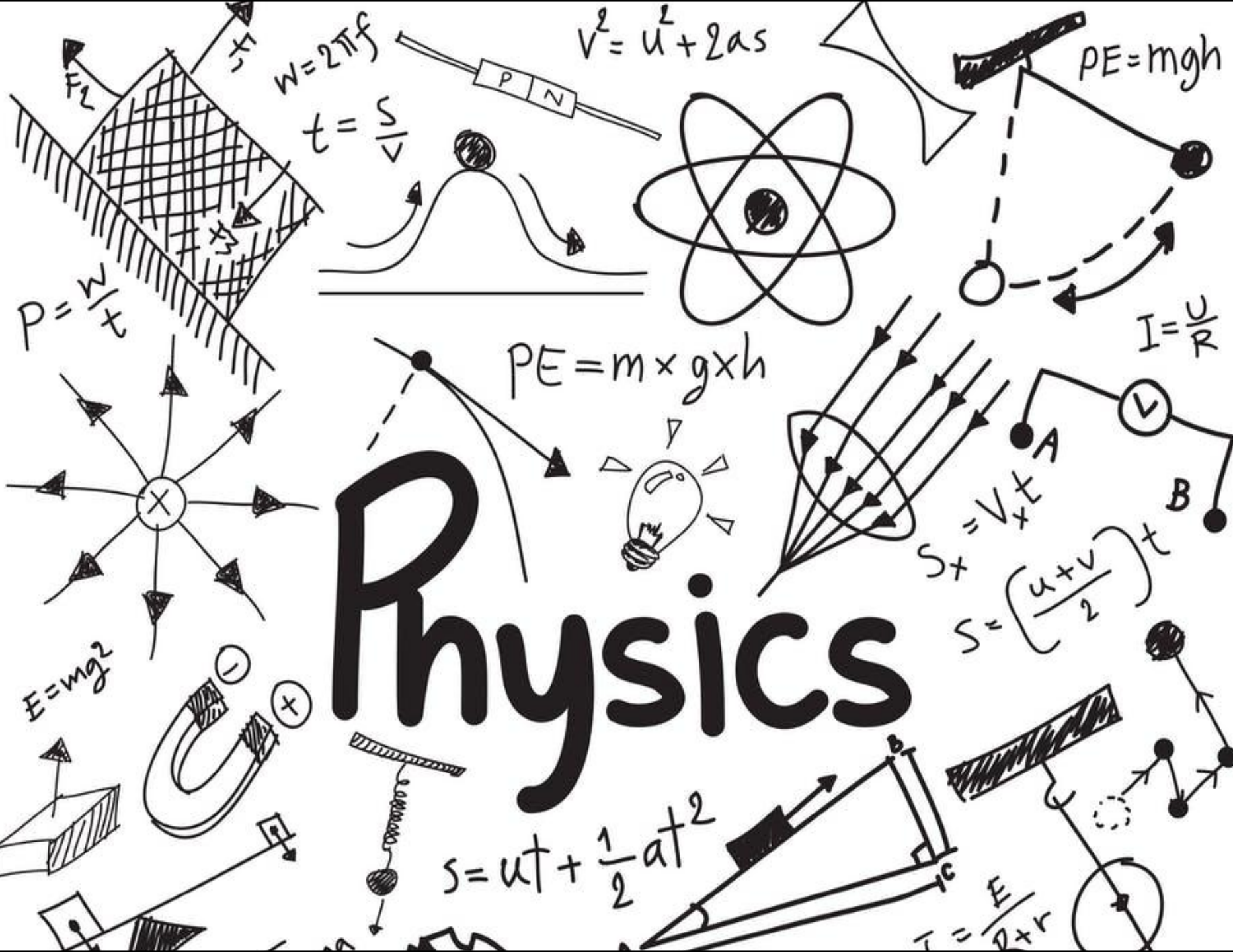
$$S_+ = V_+^X$$

$$S = \left(\frac{u+v}{2} \right) t$$

$$E = mg^2$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$T = \frac{E}{D + r}$$





Εικόνα: Η κίνηση μπορεί να είναι αναζωογονητική και όμορφη. Αυτά τα σκάφη ανταποκρίνονται σε δυνάμεις αέρα, νερού, και του βάρους του πληρώματος όσο προσπαθούν να ισορροπήσουν στην άκρη του.

1^η Ενότητα

Κλασική Μηχανική



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Κίνηση σε μια Διάσταση

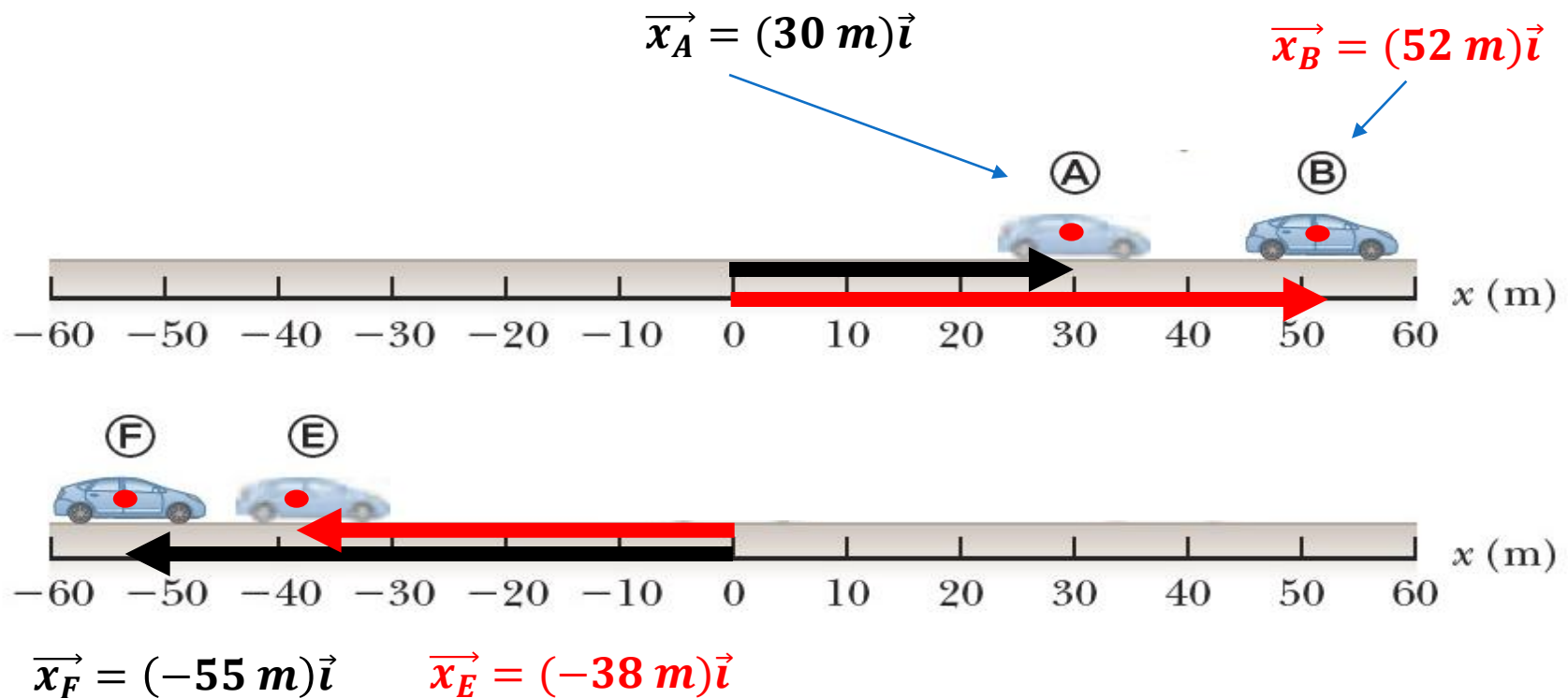
- Κίνηση σε έναν οριζόντιο/κατακόρυφο άξονα
 - Σώμα == σωματίδιο
 - Θεωρούμε απειροστά μικρό το μέγεθός του
 - Αδιαφορούμε **πλήρως** για τις διαστάσεις του
 - Θα γνωρίσουμε τους βασικούς ορισμούς της κινητικής...
 - ...αρχικά σε μια διάσταση και αργότερα σε δυο διαστάσεις
 - Αυτοί είναι:
 - **Η Θέση**
 - **Η Ταχύτητα**
 - **Η Επιτάχυνση**
- ενός σώματος

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Θέση $\vec{x}$** : διάνυσμα που ορίζει την τοποθεσία του σώματος σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς (όπως το 0)
- **Διανυσματικό μέγεθος**
 - Θα θεωρήσουμε έναν βαθμονομημένο άξονα στον οποίο γίνεται η κίνηση – το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το $\vec{i}$ (οριζόντια κίνηση) ή το $\vec{j}$ (κατακόρυφη κίνηση)
 - Το **πρόσημο** μας δηλώνει τη φορά του διανύσματος
 - $\vec{x}_1 = +3\vec{i}$, $\vec{x}_2 = -12\vec{i}$
- Το πρόσημο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό – ως πρόσημο τιμής στο βαθμονομημένο άξονα
 - **Θετικό πρόσημο** : το διάνυσμα ξεκινά από ένα σημείο αναφοράς (το 0) και καταλήγει σε κάποια θετική τιμή του άξονα
 - Αντίθετα για αρνητική τιμή

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα:



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ (displacement):** η μεταβολή στη θέση ενός σωματιδίου
- Ορισμός:

$$\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_{\text{τελ}} - \vec{x}_{\text{αρχ}}$$

- με $\vec{x}_{\text{τελ}}$, $\vec{x}_{\text{αρχ}}$ την τελική και την αρχική θέση του σωματιδίου
- Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό: $\vec{x}_{\text{τελ}} \rightarrow \vec{x}_f$, $\vec{x}_{\text{αρχ}} \rightarrow \vec{x}_i$
- Προσοχή: **απόσταση $d \neq$ μέτρο μετατόπισης $|\Delta\vec{x}|$!**
- Παράδειγμα:

Η απόσταση που διανύει ένας αθλητής μπάσκετ, αν απλουστευμένα υποθέσουμε ότι κινείται σε ευθεία γραμμή, είναι μερικά χιλιόμετρα, αλλά η μετατόπιση από την αρχική θέση του (κέντρο γηπέδου) ως την τελική (ξανά στην ίδια περίπου θέση) είναι πολύ μικρότερη (ως μέτρο)!



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$:**

- Διανυσματικό μέγεθος!
- Έχει μέτρο, διεύθυνση, φορά

- Αν $\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = (x_f - x_i)\vec{l} = \Delta x \vec{l}$:

- $\Delta x = x_f - x_i > 0 \iff$ κίνηση προς τα δεξιά

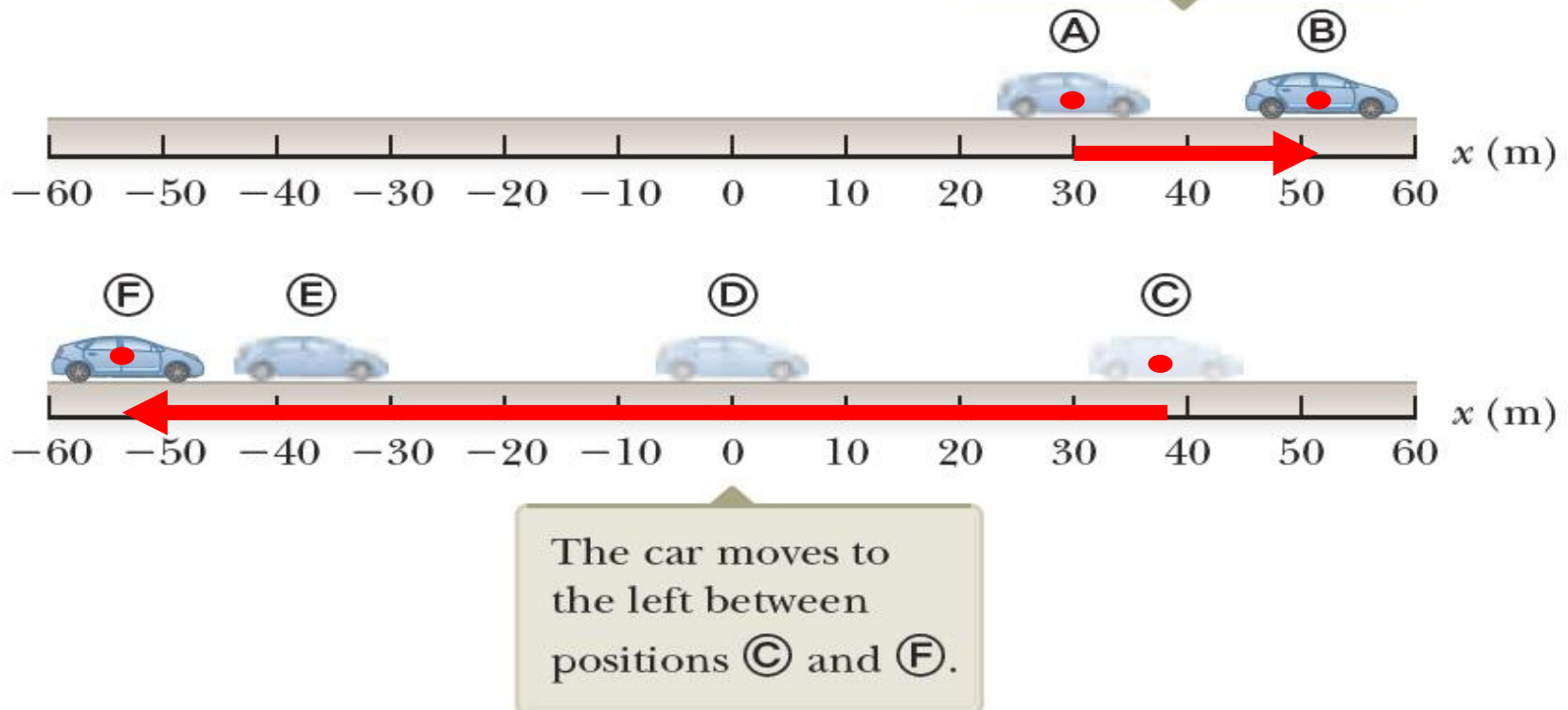
- $\Delta x = x_f - x_i < 0 \iff$ κίνηση προς τα αριστερά

- Στο Διεθνές Σύστημα, μονάδα μέτρησης της μετατόπισης (όπως και της θέσης) είναι το

1 μέτρο (m)

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα:



$$\Delta \vec{x}_{A \rightarrow B} = \vec{x}_B - \vec{x}_A = 52\vec{i} - 30\vec{i} = (22 \text{ m}) \vec{i}$$

$$\Delta \vec{x}_{C \rightarrow F} = \vec{x}_F - \vec{x}_C = -55\vec{i} - 38\vec{i} = (-93 \text{ m}) \vec{i}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Hint:

- Μπορούμε να κάνουμε **αλγεβρικές** πράξεις με τις ποσότητες των θέσεων και μετατοπίσεων
- Στο τέλος μπορούμε να προσθέσουμε την πληροφορία της κατεύθυνσης...
 - ...με χρήση του διανύσματος $\vec{i}$ (ή του $\vec{j}$ στην περίπτωση της κατακόρυφης κίνησης)

- **Παράδειγμα:**

- Για ένα σώμα που κινείται από τη θέση $\vec{x}_A = 3\vec{i}$ στη θέση $\vec{x}_B = -8\vec{i}$, βρείτε τη μετατόπισή του.

$$\begin{aligned}\Delta\vec{x} &= \vec{x}_B - \vec{x}_A = (x_B - x_A)\vec{i} \\ \Delta x &= x_B - x_A = -8 - 3 = -11 \text{ m}\end{aligned}$$

- Άρα

$$\Delta\vec{x} = (-11 \text{ m})\vec{i}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Μέση ταχύτητα (average velocity):

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

- Διάνυσμα: έχει επίσης μέτρο, διεύθυνση και φορά!
- Απαιτούνται δυο σημεία (αρχικό & τελικό)
- Ίδιο πρόσημο με $\Delta \vec{x}$ – γιατί?

• Μέση αριθμητική ταχύτητα (average speed):

- $s_{avg} \equiv \frac{d}{\Delta t}$, όπου d η απόσταση
- Βαθμωτό μέγεθος – όχι διάνυσμα !

- Προσοχή στη διαφορά τους!

Μονάδα
μέτρησης:

$$\frac{m}{s}$$

(μέτρο
ανά
δευτ/το)

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα (instantaneous velocity)**

- Διάνυσμα: έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά
- Το διάνυσμα της ταχύτητας για κάθε χρονική στιγμή t !
- Αλλιώς: η μέση ταχύτητα όταν μετριέται σε $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

- Όμως

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

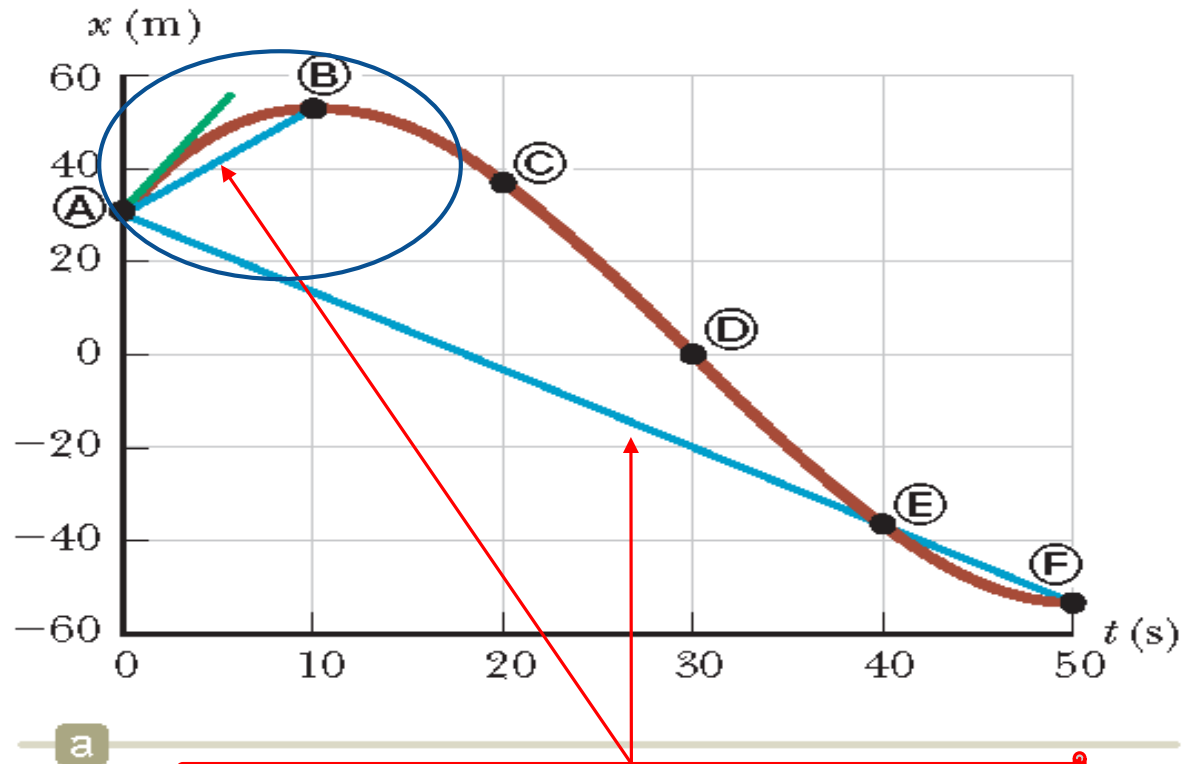
- Άρα: η στιγμιαία ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Στιγμιαία Ταχύτητα

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

• Παράδειγμα:



Κλίση ευθείας AF (ή AB) = μέση ταχύτητα

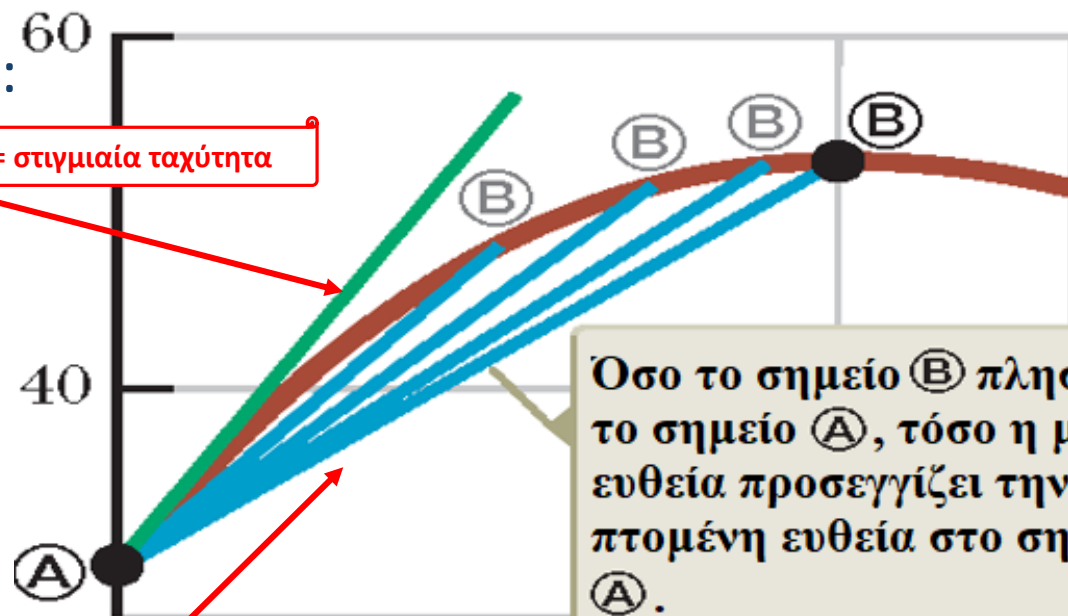
Κίνηση σε μια Διάσταση

• Στιγμιαία Ταχύτητα

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

• Παράδειγμα:

Κλίση εφαπτομένης σε σημείο = στιγμιαία ταχύτητα



Κλίση ευθείας μεταξύ δυο σημείων = μέση ταχύτητα

Κίνηση σε μια Διάσταση

- ◉ Hint:

- ◉ Μπορούμε να κάνουμε **αλγεβρικές** πράξεις με τις ποσότητες των ταχυτήτων, όπως ακριβώς κάναμε με τις θέσεις και μετατοπίσεις
- ◉ Στο τέλος μπορούμε να προσθέσουμε την πληροφορία της κατεύθυνσης...
 - ◉ ...με χρήση του διανύσματος $\vec{i}$ (ή του $\vec{j}$ στην περίπτωση της κατακόρυφης κίνησης)

- ◉ **Παράδειγμα:**

- ◉ Για ένα σώμα που κινείται από τη θέση $\vec{x}_A = 3\vec{i}$ στη θέση $\vec{x}_B = -8\vec{i}$, σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 5.5$ δευτερόλεπτα, βρείτε τη μέση ταχύτητά του.

$$\Delta x = x_B - x_A = -8 - 3 = -11 \text{ m}$$

$$u_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-11}{5.5} = -2 \text{ m/s}$$

- ◉ Άρα

$$\vec{u}_{\text{avg}} = (-2 \text{ m/s})\vec{i}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

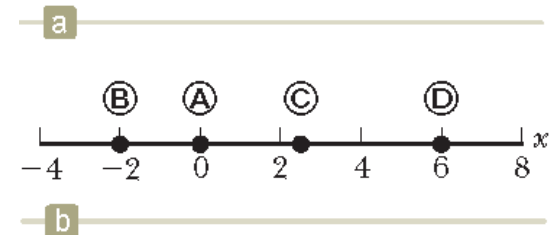
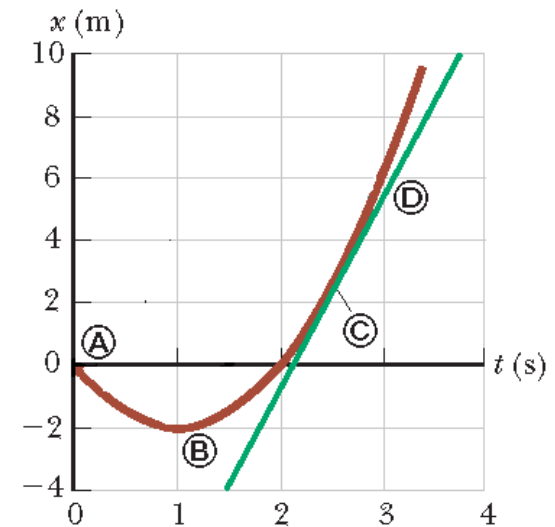
• Παράδειγμα:

- Σωματίδιο κινείται στον οριζόντιο άξονα, με τη θέση του να ορίζεται από τη σχέση

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

όπου x είναι η θέση σε m , και t είναι ο χρόνος σε s , όπως στο Σχήμα (α).

- Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.
- Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.
- Γ. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.



Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- ◉ Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.

Η διαδρομή $t=0 \rightarrow t=1$ είναι η $A \rightarrow B$.

$$\text{Άρα } \Delta \vec{x}_{A \rightarrow B} = \vec{x}_B - \vec{x}_A = \Delta x_{A \rightarrow B} \cdot \vec{i}$$

$$\Delta x_{A \rightarrow B} = x(t=1) - x(t=0) = -2 - 0 = -2 \text{ m}$$

$$\text{δηλ. } \Delta \vec{x}_{A \rightarrow B} = (-2 \text{ m}) \vec{i}$$

Η διαδρομή $t=1 \rightarrow t=3$ είναι η $B \rightarrow D$.

$$\text{Άρα } \Delta \vec{x}_{B \rightarrow D} = \vec{x}_D - \vec{x}_B = \Delta x_{B \rightarrow D} \cdot \vec{i}$$

$$\Delta x_{B \rightarrow D} = x(t=3) - x(t=1) = 6 - (-2) = 8 \text{ m}, \text{ δηλ. } \Delta \vec{x}_{B \rightarrow D} = (8 \text{ m}) \vec{i}$$

◉ Παράδειγμα – Λύση:

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- ◉ Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – Λύση:

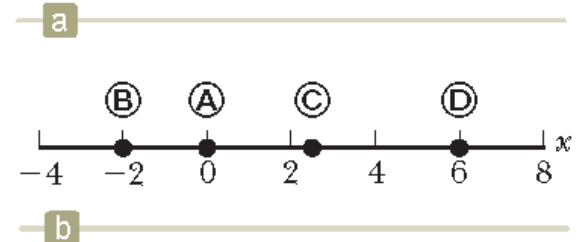
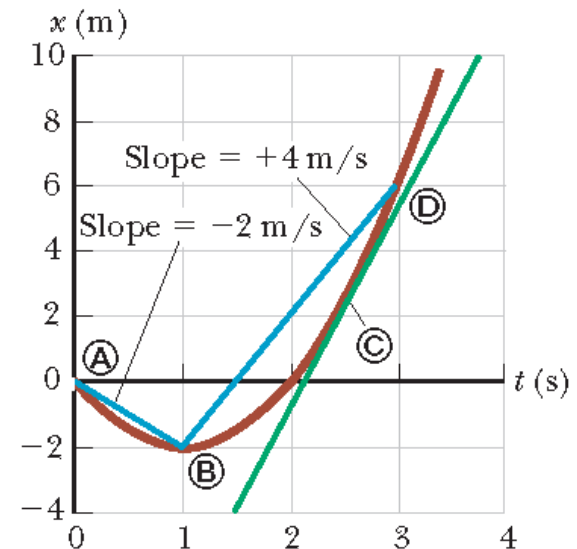
$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.

Απο προηγ. ερώτηση,

$$\begin{aligned}\Delta \vec{x}_{A \rightarrow B} &= (-2 \text{ m}) \vec{i} \Rightarrow v_{avg}^{A \rightarrow B} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \\ &= \frac{(-2 \text{ m}) \vec{i}}{1 - 0} = \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \vec{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \vec{x}_{B \rightarrow D} &= (8 \text{ m}) \vec{i} \Rightarrow v_{avg}^{B \rightarrow D} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \\ &= \frac{(8 \text{ m}) \vec{i}}{3 - 1} = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \vec{i}\end{aligned}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – Λύση:

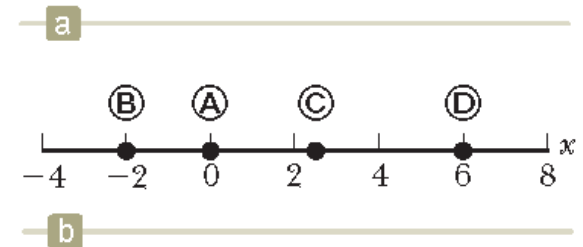
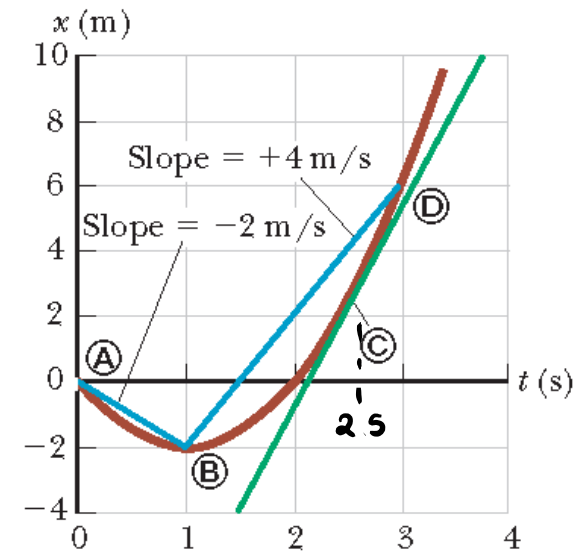
$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.

$$\text{Ξέρουμε ότι } \vec{v}(t) = x'(t)$$

$$= -4 + 4t$$

$$\text{Για } t = \frac{5}{2} \text{ s, } \vec{v}\left(\frac{5}{2}\right) = \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \vec{i}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Μοντέλο κίνησης: υπό **σταθερή ταχύτητα**

$$u_{avg} = u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = u_x \Delta t \Leftrightarrow (x_f - x_i) = u_x \Delta t$$

- Άρα

$$x_f = x_i + u_x \Delta t$$

- Αν θεωρήσουμε ότι $t_i = 0$:

$$\Delta t = t_f - t_i = t_f = t$$

και τότε

$$x_f = x_i + u_x t$$

- Επίσης, το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με

$$u = \frac{d}{\Delta t}$$

όπου d η απόσταση που διανύθηκε

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Επιτάχυνση (acceleration)**

- Η μεταβολή της ταχύτητας προϊόντος του χρόνου

- **Μέση επιτάχυνση (average acceleration)**

$$\vec{a}_{x,avg} \equiv \frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_{xf} - \vec{u}_{xi}}{t_f - t_i}$$

- **Στιγμαία επιτάχυνση (inst. acceleration)**

$$\vec{a}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}_x}{dt}$$

- Αφού όμως

$$\frac{d}{dt} \vec{u}_x = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{x}}{dt}$$

είναι

$$\vec{a}_x = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

Μονάδα μέτρησης:

$$\frac{m}{s^2}$$

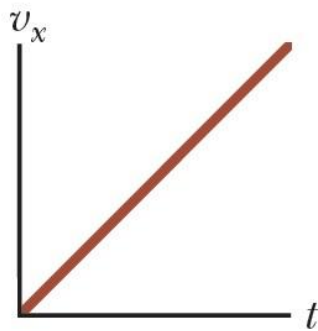
(μέτρο ανά
δευτερόλεπτο στο
τετράγωνο)

Κίνηση σε μια Διάσταση

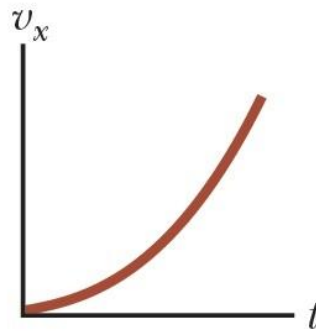
Quiz 1:

Βρείτε τα ζεύγη ταχύτητας-επιτάχυνσης

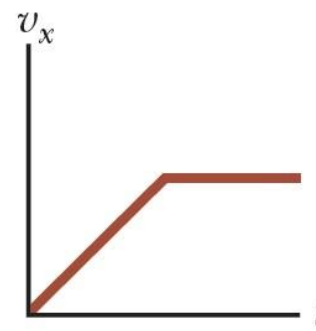
Hint: Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν σχέση παραγώγου-παράγουσας



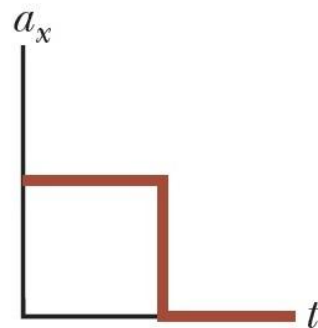
a



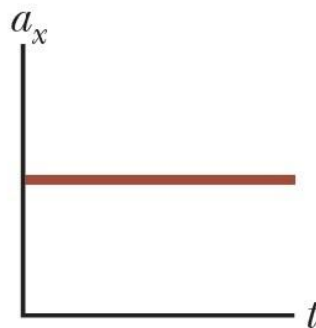
b



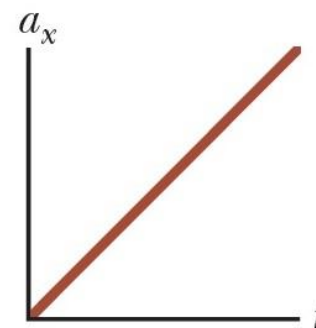
c



d



e



f

a → e

b → f

c → d

Κίνηση σε μια Διάσταση

Quiz 2:

- Η θέση ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 4 - 27t + t^3$$

- Α) Βρείτε τη συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο
- Β) Βρείτε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο
- Γ) Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή t_0 που το σωματίδιο είχε $u(t_0) = 0$?

Α) Είναι $u(t) = x'(t) = -27 + 3t^2 \frac{m}{s}$

Β) ——— $a(t) = x''(t) = u'(t) = 6t \frac{m}{s^2}$

Γ) Είναι $u(t) = 0 \Leftrightarrow -27 + 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t_0 = \pm 3 \text{ sec}$ Επιλέγουμε ως λύση την $t_0 = 3 \text{ s}$.

Κίνηση σε μια Διάσταση

Μοντέλο κίνησης:
υπό σταθερή ταχύτητα

$$x_f = x_i + u_x t$$

Quiz 3: Ποδηλάτες σε κόντρα!

- Δυο ποδηλάτες κινούνται κατά μήκος του ίδιου ευθύγραμμου δρόμου και προς την ίδια κατεύθυνση. Όταν $t = 0$, ο ποδηλάτης A βρίσκεται στη θέση $x = 0$ m και κινείται με σταθερή ταχύτητα 8 m/s. Ο ποδηλάτης B βρίσκεται στη θέση $x = 30$ m και κινείται με σταθερή ταχύτητα 5 m/s. Σε πόσο χρόνο ο ποδηλάτης A "πιάνει" τον ποδηλάτη B?

Τι σημαίνει "πιάνει" ο ένας ποδηλάτης τον άλλο? Σημαίνει ότι έχουν για κάποια χρονική στιγμή t την ίδια θέση, έστω x_{meet} .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ποδηλάτης A: } x_{meet} = x_i^A + u_{x_A} t = 0 + 8t \\ \text{— " — B: } x_{meet} = x_i^B + u_{x_B} t = 30 + 5t \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$0 + 8t = 30 + 5t \Leftrightarrow 3t = 30 \Leftrightarrow t = 10 \text{ s.}$$

Άρα οι δυο ποδηλάτες συναντιούνται σε $t = 10$ δευτερόλεπτα.

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Μοντέλο κίνησης: υπό **σταθερή επιτάχυνση**

- Ορίζουμε θετική φορά κίνησης προς τα δεξιά
- Στις παρακάτω εξισώσεις, όλες οι διανυσματικές ποσότητες «δείχνουν» προς τα δεξιά (θυμηθείτε: πρόσημο «encodes» φορά)

- Εξισώσεις Μονοδιάστατης Κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση:

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$

2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$

3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$ ή $x_f = x_i + u_{x,avg}t$

4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική μέτρηση, ενώ ο δείκτης x δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν οριζόντιο άξονα $x'x$ (κάποιες φορές μπορούμε να παραλείψουμε το δείκτη x για απλοποίηση)

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

$$a_{x,avg} = a_x$$

Από τον ορισμό έχουμε

$$a_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta t} = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{t_f - t_i} \xrightarrow{t_i=0, t_f=t} u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Άρα

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Απόδειξη:

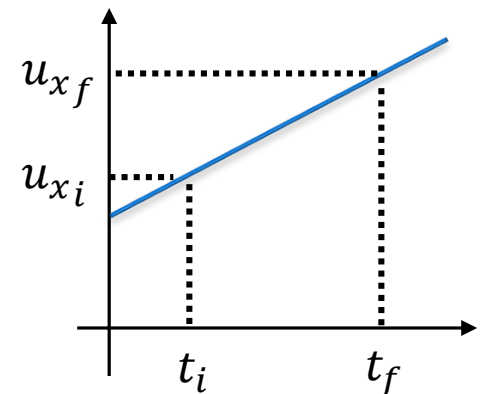
Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε η ταχύτητα (δηλ. το ολοκλήρωμά της) θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου

Έτσι η μέση ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως ο αριθμητικός μέσος της αρχικής ταχύτητας u_{xi} και της τελικής ταχύτητας u_{xf}

Δηλ.

$$u_{x,avg} = \frac{u_{xf} + u_{xi}}{2}$$

$$u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

• Απόδειξη:

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t \quad \text{ή} \quad x_f = x_i + u_{x,avg}t$$

Από την προηγούμενη σχέση, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με t :

$$u_{x_{avg}}t = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Όμως

$$u_{x_{avg}}t = \Delta x = x_f - x_i$$

οπότε

$$(x_f - x_i) = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Λύνοντας ως προς x_f :

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

Έχουμε ήδη

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

και

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2} t$$

Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + \frac{1}{2} (u_{x_i} + a_x t + u_{x_i}) t \\ &= x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \end{aligned}$$

Άρα

$$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Απόδειξη:

Έχουμε

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t \Rightarrow t = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}$$

και

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_f} + u_{x_i})t$$

Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + \frac{1}{2}(u_{x_f} + u_{x_i}) \left(\frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x} \right) \\ &= x_i + \frac{u_{x_f}^2 - u_{x_i}^2}{2a_x} \end{aligned}$$

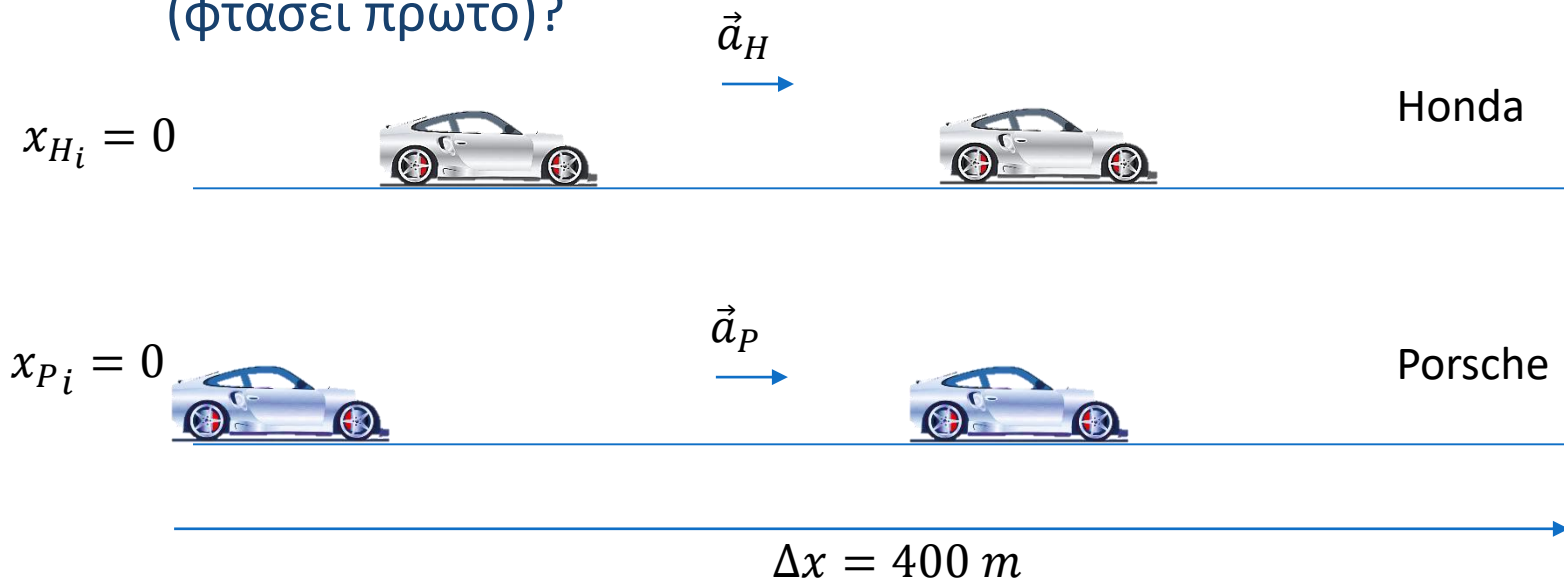
και λύνοντας ως προς $u_{x_f}^2$

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Μια Porsche (P) προκαλεί ένα Honda (H) σε έναν αγώνα ταχύτητας 400 μέτρων. Επειδή $a_P = 3.5 \text{ m/s}^2$ και $a_H = 3.0 \text{ m/s}^2$, το Honda παίρνει προβάδισμα στην αφετηρία κατά 1.0 s . Τα δυο οχήματα ξεκινούν από ακινησία. Περιγράψτε το μοντέλο κίνησης των οχημάτων. Ποιο αυτοκίνητο θα κερδίσει (φτάσει πρώτο)?



Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

$$\vec{a}_H = 3.0 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$

$$x_{H_i} = 0$$

A



Honda

B

$$x_{P_i} = 0$$

A

$t = 0$



$$\vec{a}_P = 3.5 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$



Porsche

B

$$\Delta x = 400 \text{ m}$$

Η πιο απλή λύση είναι να βρούμε τον "καθαρό" χρόνο που χρειάζονται τα δύο οχήματα για να καλύψουν τα 400 m, σαν να τα χρονομετράσαμε ξεχωριστά. Στη διαδρομή A → B, και τα δύο οχήματα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$x_B = x_A + u_{x_A} \cdot t + \frac{1}{2} a_i t^2, \quad i = H, P$$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

Παράδειγμα – Λύση:

$$\vec{a}_H = 3.0 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$

$$x_{Hi} = 0$$

A



Honda

B

$$x_{Pi} = 0$$

A



Porsche

B

$$\vec{a}_P = 3.5 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$

$$\Delta x = 400 \text{ m}$$

$$t = 0$$

Porsche : $x_B = x_A + u_{xA}t + \frac{1}{2}a_P t^2 \Leftrightarrow 400 = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 3.5 t^2$

$$t = \sqrt{\frac{800}{3.5}} \approx 15.118 \text{ s}$$

Honda : $x_B = x_A + u_{xA}t + \frac{1}{2}a_H t^2 \Leftrightarrow 400 = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 3.0 t^2$

$$t = \sqrt{\frac{800}{3.0}} \approx 16.329 \text{ s}$$

Όπως πρέπει να αφαιρέσουμε 1.0 s, οπότε $\left\{ \begin{array}{l} t_P = 15.118 \text{ s} \\ t_H = 16.329 \text{ s} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Porsche wins!}$

1. $u_{xf} = u_{xi} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t$
4. $x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{xf}^2 = u_{xi}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – 2^η Λύση: $\vec{a}_H = 3.0 \frac{m}{s^2} \vec{i}$

$$x_{Hi} = 0$$

A



Honda

B

$$x_{Pi} = 0$$

A



Porsche

B

$$\vec{a}_P = 3.5 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$

$$\Delta x = 400 \text{ m}$$

$$t = 0$$

1. $u_{xf} = u_{xi} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t$
4. $x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{xf}^2 = u_{xi}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Το μοντέλο να περιγράφει την κίνηση είναι αυτό της κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση θεωρώ $x_A = 0$ τη θέση εκκίνησης των δύο οχημάτων. Θεωρώ $t = 0$, όταν ξεκινά η Porsche. Τότε τα δύο οχήματα περιγράφουν την κίνησή τους με το μοντέλο της ευθύγραμμης επιταχυνόμενης κίνησης με σταθερή ταχύτητα. Διαδικασία στη $A \rightarrow B$.

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – 2^η Λύση: $\vec{a}_H = 3.0 \frac{m}{s^2} \vec{i}$

$$x_{Hi} = 0$$

A



Honda

B

$$x_{Pi} = 0$$

$$t = 0$$

A



$$\vec{a}_P = 3.5 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$



Porsche

B

$$\Delta x = 400 \text{ m}$$

Για να βρω το χρόνο που απαιτείται για να καλύψει την απόσταση η Porsche, χρησιμοποιώ την ε3.4 στη διαδρομή A→B.

$$x_B = x_A + u_{xA} t + \frac{1}{2} a_P t^2$$

$$400 = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} 3.5 t^2$$

$$800 = 3.5 t^2 \Rightarrow t^2 = 228.57 \Rightarrow t = 15.118 \text{ s}$$

Άρα η Porsche χρειάζεται 15.118 δευτερόλεπτα για τα 400 m.

1. $u_{xf} = u_{xi} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t$
4. $x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{xf}^2 = u_{xi}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – 2^η Λύση: $\vec{a}_H = 3.0 \frac{m}{s^2} \vec{i}$

$$x_{Hi} = 0$$

A



Honda

B

$$x_{Pi} = 0$$

$$t = 0$$

A



$$\vec{a}_P = 3.5 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$



Porsche

B

$$\Delta x = 400 \text{ m}$$

Όταν πατήσαμε το χρονόμετρο, η Honda είχε ήδη ξεκινήσει κατά 1 second, οπότε ο χρόνος που θα είναι $t+1$! Ξανά από την Ε3 4 στη διαδρομή A→B θα έχουμε:

$$x_B = x_A + u_{x_A} \cdot (t+1) + \frac{1}{2} a_H (t+1)^2$$

$$400 = 0 + 0 \cdot (t+1) + \frac{1}{2} \cdot 3.0 (t+1)^2$$

$$800 = 3(t+1)^2 \Rightarrow (t+1)^2 = 266.667 \Rightarrow t+1 = 16.329$$

$$\text{δηλ. } t = 15.329 \text{ s}$$

1. $u_{xf} = u_{xi} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t$
4. $x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{xf}^2 = u_{xi}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – 2^η Λύση: $\vec{a}_H = 3.0 \frac{m}{s^2} \vec{i}$

$x_{H_i} = 0$
A



Honda

B

$x_{P_i} = 0$

$t = 0$



$\vec{a}_P = 3.5 \frac{m}{s^2} \vec{i}$



Porsche

$\Delta x = 400 \text{ m}$

B

Άρα τελικά κερδίξε η Porsche.

Παρατηρήστε ότι:

I) Επιλέξαμε τη διαδρομή A → B και για τα δυο οχήματα.

II) Πατήσαμε το χρονόμετρο ($t=0$) όταν ξεκίνησε η Porsche. Με τον τρόπο αυτό, και οι δυο κινήσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις της ευθύγραμμης κίνησης με σταθερή επιτάχυνση (απλά ο χρόνος της Honda είναι $t+1$).

III) Υπάρχουν κι άλλες πιθανές λύσεις.

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

$$x_f = x_i + u_x t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Δεν είναι απαραίτητη η χρήση διανυσμάτων στην 1D κίνηση
 - Είδατε ότι το τυπολόγιο της κίνησης ήταν αλγεβρικές εξισώσεις
 - Όμως τα αποτελέσματά σας πρέπει να γράφονται διανυσματικά
 - Προσοχή στην ερμηνεία των αρνητικών μεγεθών!
- Υπενθυμίζεται η σύμβαση ότι : ορίζουμε ως **θετική φορά αυτή προς τα δεξιά**
 - Αντίστοιχα, αρνητική προς τα αριστερά
 - Ορίζετε πάντα θέση και χρόνο αναφοράς σας ($x_i = 0, t_i = 0$)!
- **Κατακόρυφη κίνηση** (κίνηση σε μια διάσταση)
 - Συνήθως ορίζουμε **θετική φορά κίνησης προς τα επάνω**
 - Επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g} = (-9.8 \text{ m/s}^2)\vec{j}$ (φορά προς τα κάτω)
 - Ίδια μεθοδολογία και εξισώσεις ($x \rightarrow y$)

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

ΌΧΙ $g = 10 \text{ m/s}^2$!!!

- Ελεύθερη πτώση: $\vec{a}_y = \vec{g} = (-9.8 \text{ m/s}^2)\vec{j}$ σταθερή
 - ...αν ορίσουμε θετική φορά κίνησης προς τα επάνω

• Εξισώσεις Ελεύθερης Πτώσης:

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
ή
 $y_f = y_i + u_{y,avg}t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική κατάσταση, ενώ ο δείκτης y δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν κατακόρυφο άξονα $y'y$ (συχνά ο δείκτης παραλείπεται)

Στις διπλανές εξισώσεις, η επιτάχυνση της βαρύτητας χρησιμοποιείται κατά μέτρο, ως $g = |\vec{g}| = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow$ δηλ. έχουμε ΉΔΗ περάσει το πρόσημό της στις εξισώσεις!

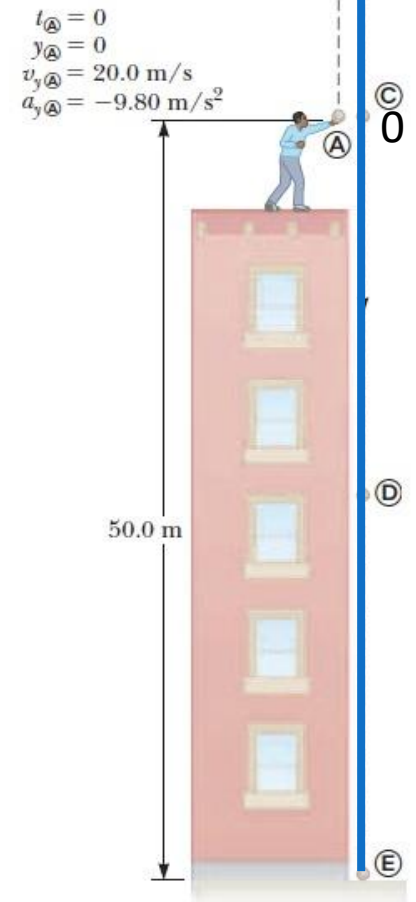
Αν ορίσετε θετική φορά κίνησης **προς τα κάτω** (δηλ. με ίδια φορά με το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας), τότε θέτουμε $g = -9.8 \text{ m/s}^2$ στις διπλανές σχέσεις

Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m. Δεν υπάρχουν αντιστάσεις λόγω αέρα.
- ◉ Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.
- ◉ Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
- ◉ Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
- ◉ Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
- ◉ Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5$ s.

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

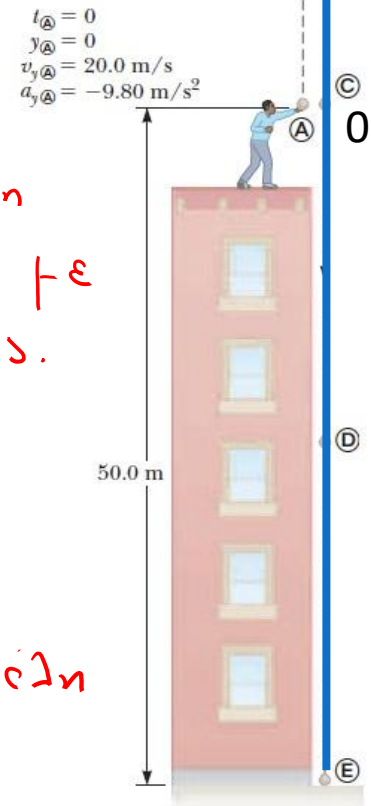
• Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.

- Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.

Θέτουμε του άξονα y γ'γ παράλληλα με την κίνηση της μπάλας. Το "μηδέν" του άξονα ταυτίζεται με το σημείο Α, το σημείο εκτόξευσης της μπάλας. Ο χρόνος αρχίζει να μετράει τη στιγμή που η μπάλα αφήνει το χέρι. Η κίνηση της μπάλας είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση $\vec{g} = (-9.8 \frac{m}{s^2}) \vec{j}$, σε όλη της τη διάρκεια.

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.

Δαλβέρτος στη διαδρομή A→B. Από την εξ. 1 έχουμε

$$u_{yf} = u_{yi} - gt$$

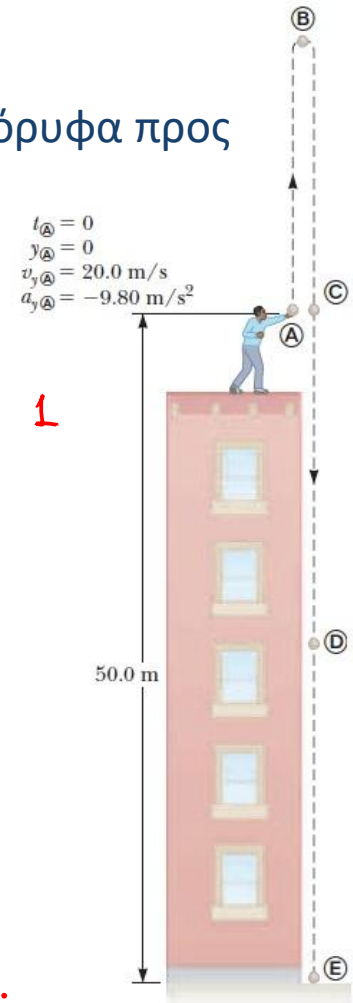
$$u_B = u_A - gt$$

$$0 = 20 - 9.8t$$

$$t = \frac{20}{9.8} = 2.04 \text{ s}$$

Άρα στο μέγιστο ύψος φθάνει σε χρόνο 2.04 s.

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.

Δαδείαξε ξανά στη διαδρομή $A \rightarrow B$. Από την εξ. 3, έχουμε

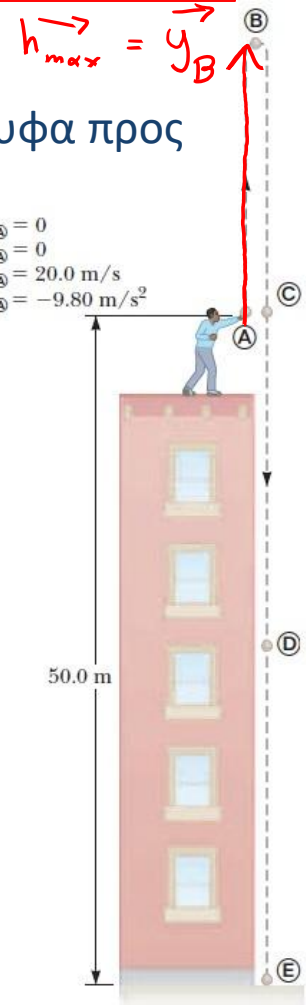
$$y_f = y_i + \frac{1}{2} (u_{y_i} + u_{y_f}) t$$

$$y_B = y_A + \frac{1}{2} (u_A + u_B) t$$

$$\begin{aligned} h_{\max} &= 0 + \frac{1}{2} (20 + 0) \cdot 2.04 \\ &= 10 \cdot 2.04 = 20.4 \text{ m} \end{aligned}$$

δηλ. $\vec{y}_B = (20.4 \text{ m}) \vec{j}$

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2} (u_{y_i} + u_{y_f}) t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m .
 - Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.

Ευχολογικά :

Εξίσου καλά θα λείουν και οι σχέσεις 4, 5:

$$\Rightarrow h_{\max} = y_A + u_{y_A} t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 + 20t - 4.9t^2 \quad t = \frac{20}{9.8} \text{ s}$$

$$\Rightarrow h_{\max} = 20 \left(\frac{20}{9.8} \right) - 4.9 \left(\frac{20}{9.8} \right)^2 \approx 20.4 \text{ m}$$

$$5 \bullet u_B^2 = u_A^2 - 2g(h_{\max} - 0) \Leftrightarrow 0^2 = 20^2 - 19.6 h_{\max}$$

δπ2. $h_{\max} = \frac{400}{19.6} = 20.4 \text{ m}$ $\left(\begin{array}{l} \text{Ενώ από το έδαφος.} \\ \text{το ύψος είναι 70.4 m} \end{array} \right)$

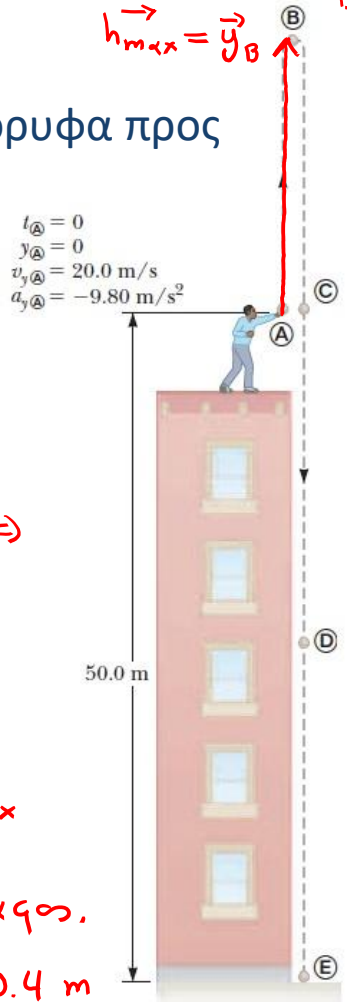
1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$

$$2. \quad u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$$

$$3. \quad y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{y_i} + u_{y_f})t$$

$$4. \quad y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$(5) \quad u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.

Δαλείαφε στη διαδρομή $A \rightarrow C$ Από την εξ. 5 έχουμε

$$u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

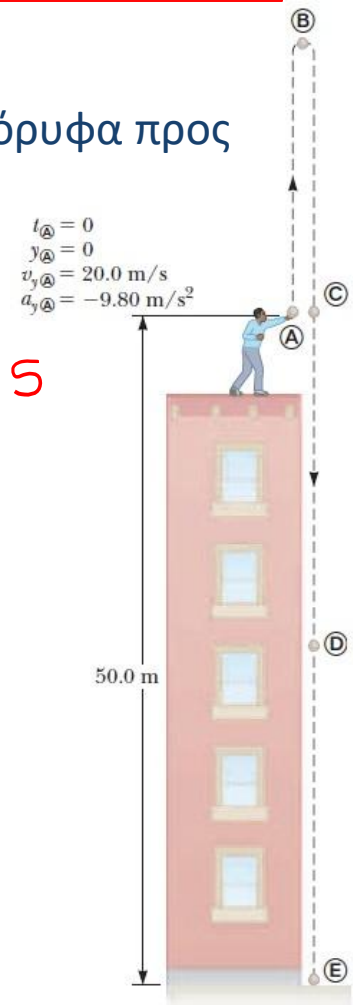
$$u_c^2 = u_A^2 - 2g(y_c - y_A)$$

$$u_c^2 = 20^2 - 19.6(0 - 0)$$

$$u_c^2 = 400 \Rightarrow u_c = \pm 20 \frac{m}{s}$$

δηλ. $\vec{u}_c = (-20 \frac{m}{s})\vec{j}$.

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



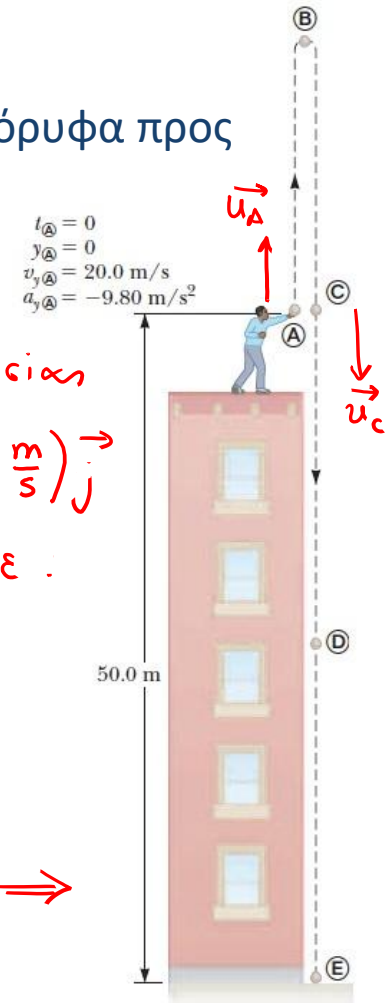
Θα μπορούσαμε να πούμε ότι $t_{A \rightarrow B} = t_{B \rightarrow C}$, λόγω απουσίας αντιστάσεων του αέρα, και άρα $\vec{u}_C = -\vec{u}_A = (-20 \frac{m}{s})\vec{j}$
 Πώς ξέρουμε όμως ότι $t_{A \rightarrow B} = t_{B \rightarrow C}$? Ας το δούμε.

Διοδρετή $A \rightarrow B$: δείξουμε ότι $t_{A \rightarrow B} = \frac{u_A}{g}$ (1)

Διοδρετή $B \rightarrow C$: $y_C = y_B + u_B t_{B \rightarrow C} - \frac{1}{2}gt_{B \rightarrow C}^2$

$$0 = h_{max} + 0 \cdot t_{B \rightarrow C} - \frac{1}{2}gt_{B \rightarrow C}^2$$

Όπως $h_{max} = \frac{u_A^2 - u_B^2}{2g}$, όπως δείξαμε πριν
 and 2 slides



Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.

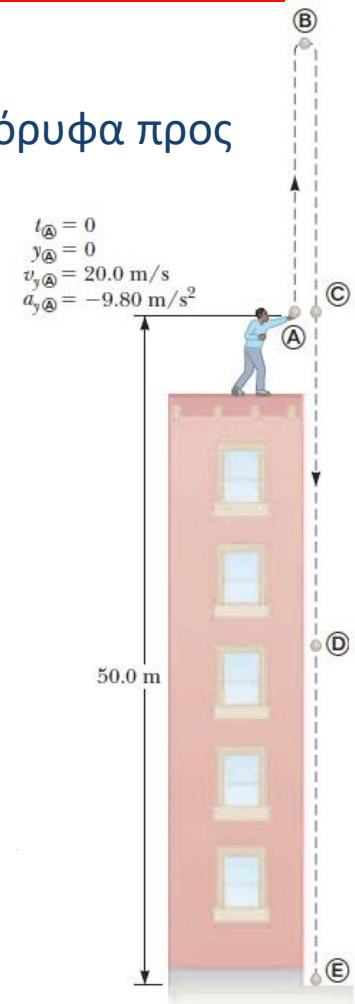
$$\Rightarrow 0 = \frac{u_A^2 - u_B^2}{2g} - \frac{1}{2} g t_{B \rightarrow C}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_A^2 - 0}{2g} = \frac{1}{2} g t_{B \rightarrow C}^2 \Leftrightarrow \frac{u_A^2}{g} = g t_{B \rightarrow C}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_A^2}{g^2} = t_{B \rightarrow C}^2 \Leftrightarrow t_{B \rightarrow C} = \sqrt{\frac{u_A^2}{g^2}} = \frac{u_A}{g} \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1), (2) μας δίνουν ότι $t_{A \rightarrow B} = t_{B \rightarrow C}$

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.

- Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5$ s.

Έστω D η θέση της μπάλας όταν $t = 5$ s και τη στιγμή της εκτόξευσης. Στη διαδρομή $A \rightarrow D$, οι εξισώσεις 1 και 4 μας δίνουν

$$u_D = u_A - gt \Leftrightarrow u_D = 20 - 9.8 \cdot 5 = -29 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ δηλ.}$$

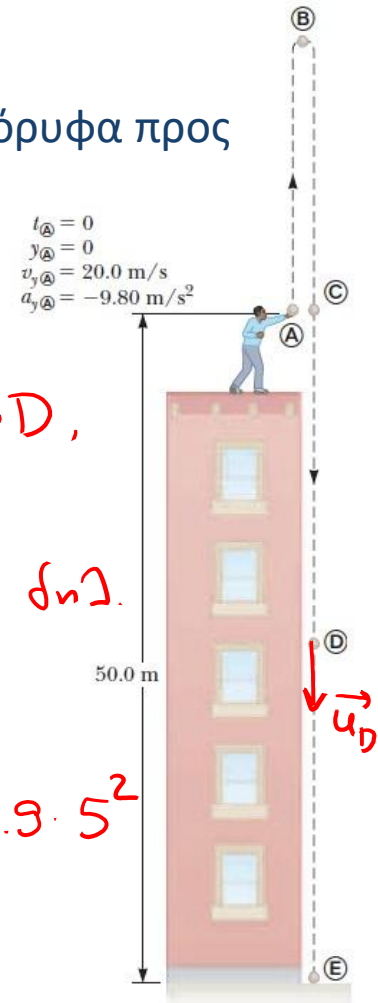
$$\vec{u}_D = (-29 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \vec{j}$$

$$y_D = y_A + u_{yA} t - \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow y_D = 0 + 20 \cdot 5 - 4.9 \cdot 5^2$$

$$\Leftrightarrow y_D = 100 - 122.5 \Leftrightarrow y_D = -22.5 \text{ m}, \text{ άρα}$$

$$\vec{y}_D = (-22.5 \text{ m}) \vec{j}$$

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$





Τέλος Διάλεξης
