



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Στάσιμα Κύματα



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Στάσιμα Κύματα

Στάσιμα Κύματα

$$\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right)$$

• Στάσιμα κύματα

- Ως τώρα βλέπαμε ηχητικά κύματα που συνέβαλαν σε κάποιο σημείο μπροστά τους

- Τι θα γίνει αν τα βάλουμε **αντικρουστά**;

- **Ίδια** συχνότητα, μήκος κύματος, πλάτος, αρχ. φάση

- **Αντίθετη** ταχύτητα

- $$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) \\ &= (2A \sin(kx)) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

- Η παραπάνω σχέση ορίζει ένα **στάσιμο κύμα**

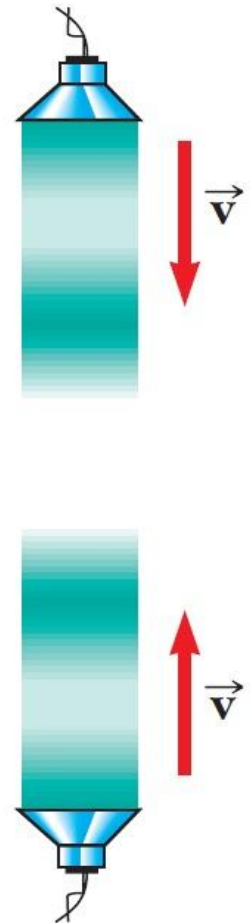


Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Παρατηρήστε ότι **δεν** εξαρτάται από την έκφραση $kx \pm \omega t$
- Άρα **δεν** είναι οδεύον (κινούμενο) κύμα
 - ...γι' αυτό και το λέμε στάσιμο ☺
 - Δεν υπάρχει η έννοια της διάδοσης της κίνησης σε ένα **στάσιμο** κύμα

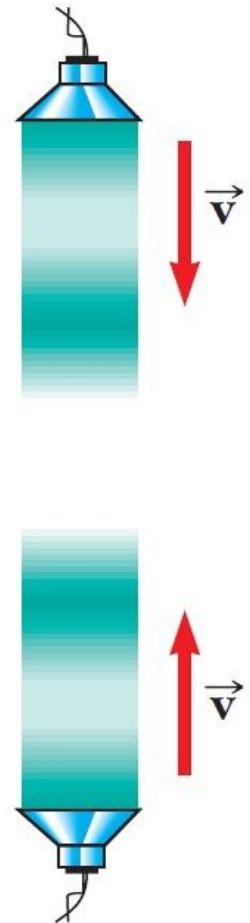


Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Λέγεται **στάσιμο κύμα** (δηλαδή σταθερό σε μια θέση) επειδή όλα τα στοιχεία του μέσου εκτελούν μεν απλή αρμονική ταλάντωση, ΑΛΛΑ:
 - με **διαφορετικό πλάτος** το καθένα!
- Δηλ. αντίθετα με ότι συμβαίνει σε ένα οδεύον κύμα, όπου τα στοιχεία του μέσου εκτελούν το ένα μετά το άλλο την **ίδια ακριβώς κίνηση**...
 - ... εξασφαλίζοντας έτσι τη διάδοση της διαταραχής (του κύματος)



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα
- Ας συγκρίνουμε:

$$y(t) = A \cos(\omega t)$$

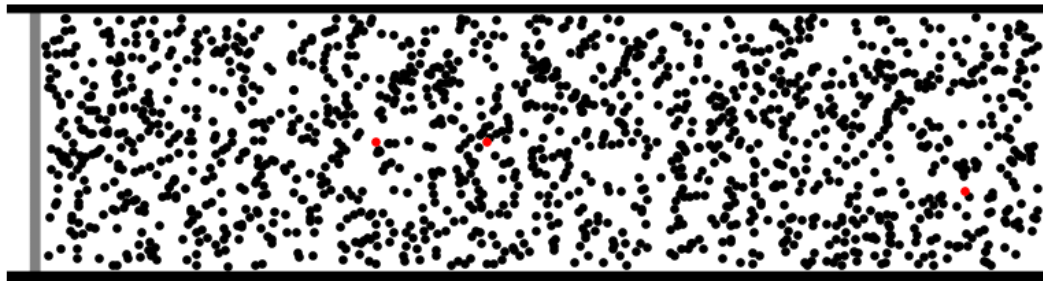
και

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Τι παρατηρείτε;
 - Η δεύτερη περιγράφει μια «κάπως ειδική» μορφή της πρώτης
 - Κάθε στοιχείο που βρίσκεται στη **θέση** x εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση
 - Το **πλάτος** της απλής αρμονικής κίνησης, $2A \sin(kx)$, ενός στοιχείου εξαρτάται από τη **θέση** του στοιχείου, x , στο μέσο

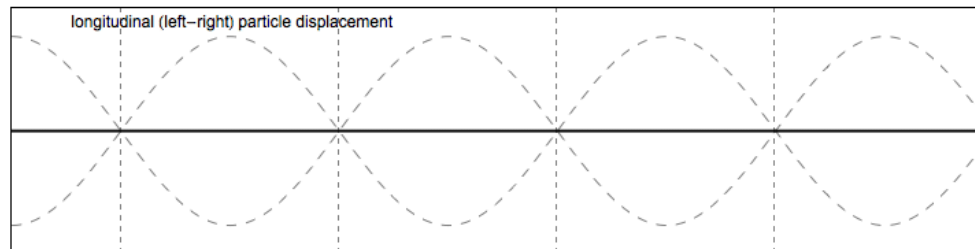
Στάσιμα Κύματα

ο Στάσιμα κύματα

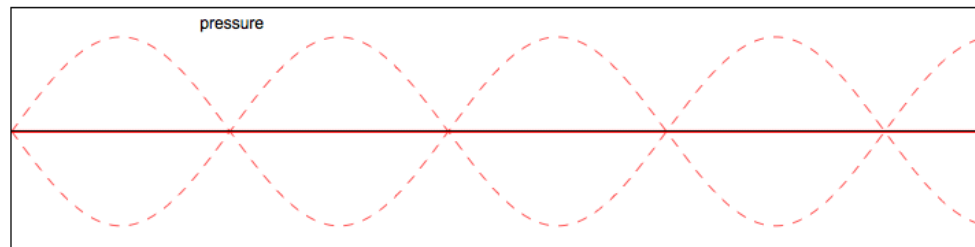


©2012, Dan Russell

Μετατόπιση

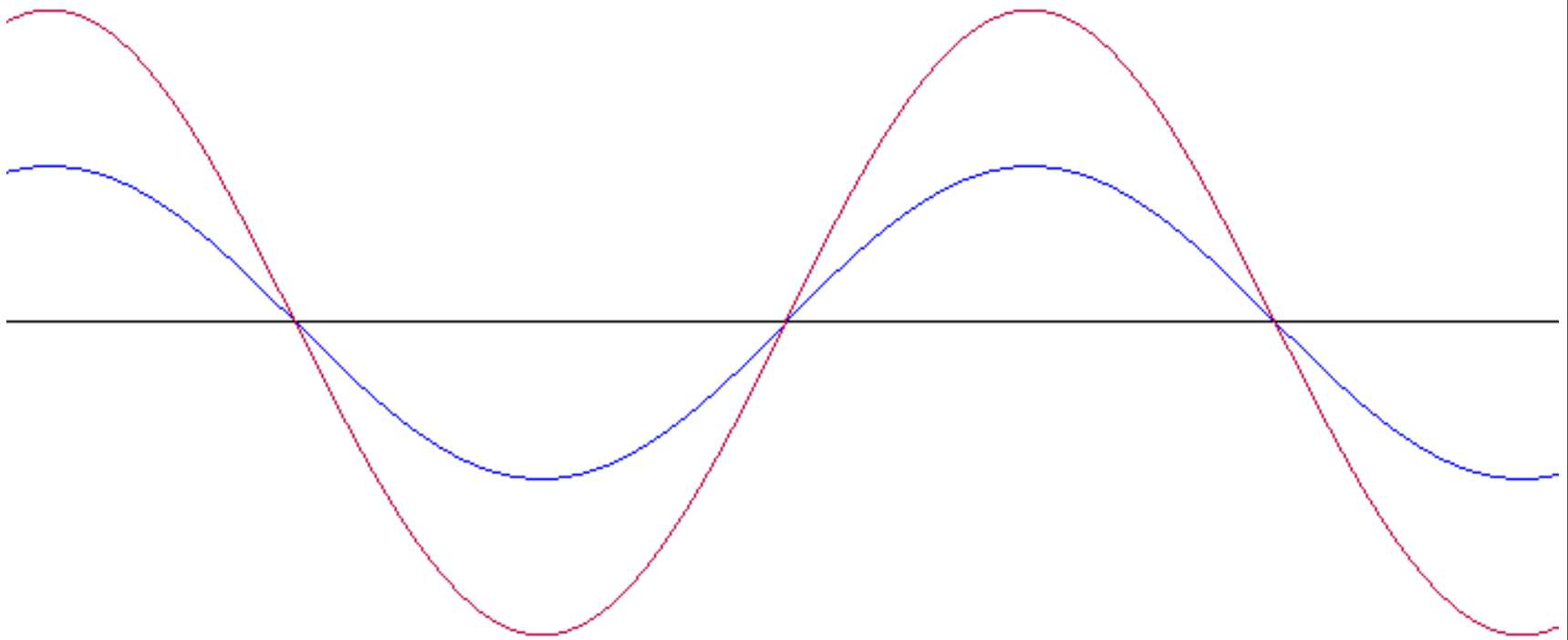


Μεταβ. Πίεσης



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα



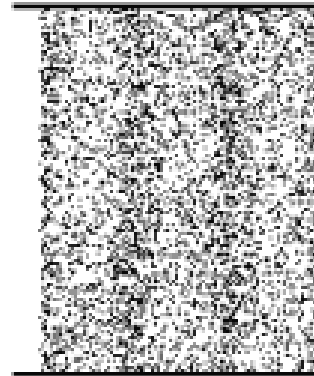
Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

Creating Standing Waves from Travelling Waves



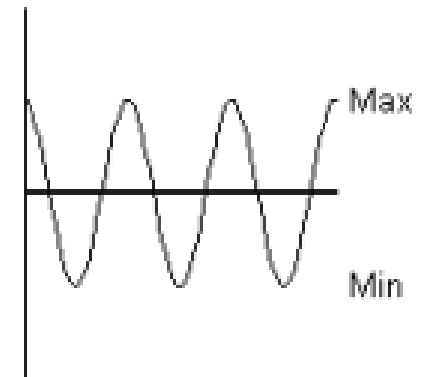
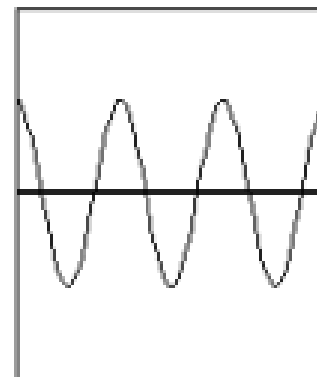
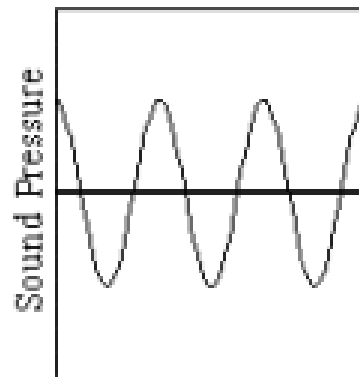
plane wave: →



plane wave: ←



plane waves: superposition



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Υπάρχουν στοιχεία του μέσου που ΔΕΝ ταλαντώνονται? (δηλ. σε ποιο x μηδενίζεται το πλάτος;)

$$2A \sin(kx) = 0$$

$$\sin(kx) = \sin(n\pi)$$

$$kx = n\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi$$

$$x = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **δεσμοί (nodes)**

Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Υπάρχουν στοιχεία του μέσου που ταλαντώνονται με το μέγιστο δυνατό πλάτος? (δηλ. σε ποιο x μεγιστοποιείται το πλάτος;)

$$2A \sin(kx) = \pm 2A$$

$$\sin(kx) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$kx = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

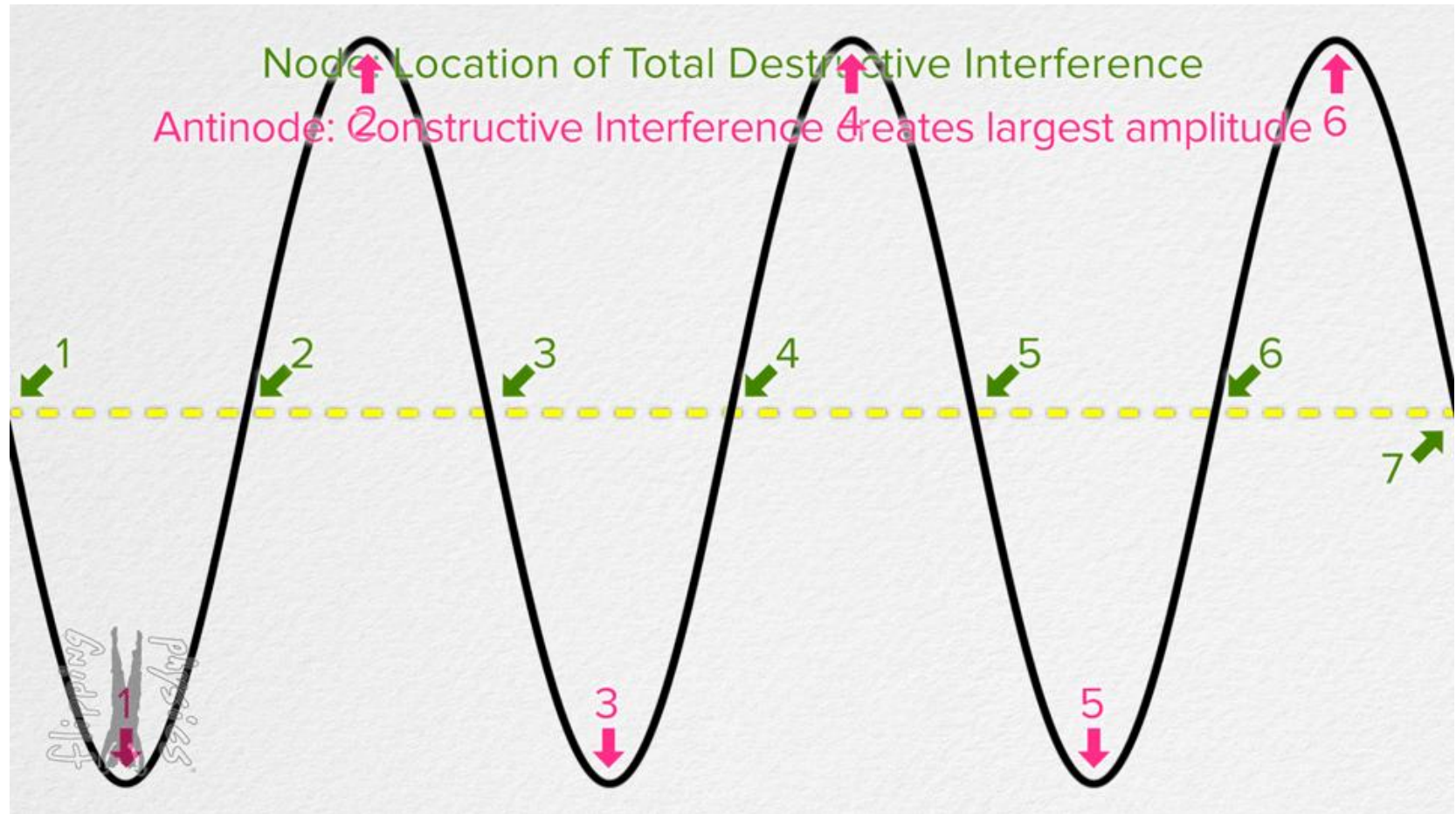
$$\frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{(2n + 1)\lambda}{4}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **κοιλίες (ή αντιδεσμοί) (antinodes)**

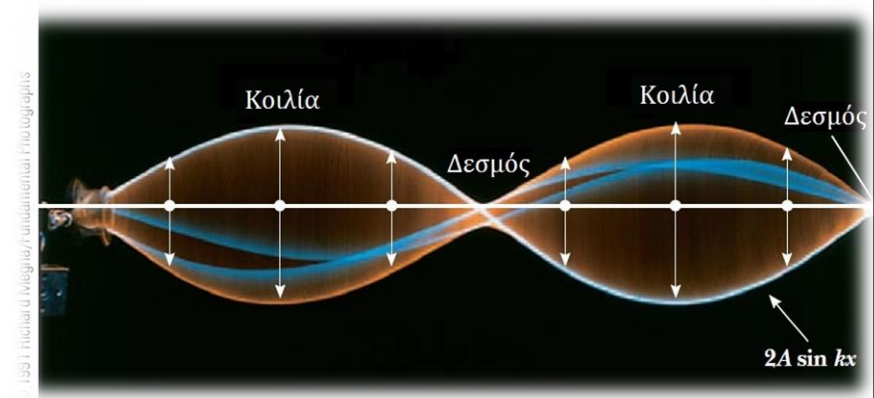
Στάσιμα Κύματα

• Στάσιμα κύματα



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα



- Άρα εύκολα συμπεραίνει κανείς από τα προηγούμενα:

- Απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κοιλιών $= \frac{\lambda}{2}$

- Απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών $= \frac{\lambda}{2}$

- Απόσταση μεταξύ δεσμού και επόμενης κοιλίας $= \frac{\lambda}{4}$

Στάσιμα Κύματα

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Δυο κύματα τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις, δημιουργούν ένα στάσιμο κύμα. Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1(x, t) = 4 \sin(3x - 2t)$$

$$y_2(x, t) = 4 \sin(3x + 2t)$$

με x, y να μετρούνται σε εκατοστά και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

- ◉ Α) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.
- ◉ Β) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

Στάσιμα Κύματα

● Παράδειγμα – Λύση:

- Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1 = 4 \sin(3x - 2t)$$

$$y_2 = 4 \sin(3x + 2t)$$

- Α) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.

Γνωρίζουμε ήδη ότι το πλάτος του στάσιμα κύματος θα δηλω αρχικά είναι

$$2A \sin(kx)$$

Έχουμε ότι $k = 3 \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$ και ότι $A = 4$ και άρα τελικόν

$$2A \sin(kx) = 8 \sin(3x) \Big|_{x=2.3} = 8 \sin(6.9) \simeq 4.6 \text{ cm}$$

Στάσιμα Κύματα

• Παράδειγμα – Λύση:

- Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι k

$$y_1 = 4 \sin(3x - 2t)$$

$$y_2 = 4 \sin(3x + 2t)$$

- Β) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

Ξέρουμε ότι. $x_a = \frac{2n+1}{4} \lambda, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$x_f = \frac{n}{2} \lambda, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Είναι $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3} \text{ cm}, \text{ οπότε}$

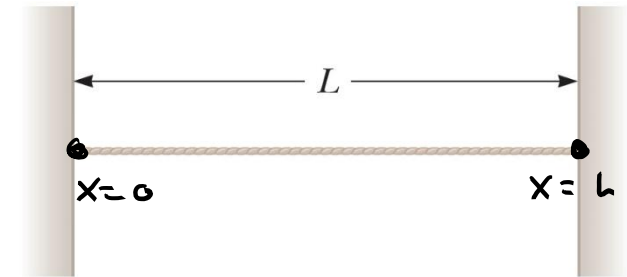
$$x_a = \frac{2n+1}{4} \frac{2\pi}{3}, n = 0, 1, 2, \dots = \frac{2n+1}{6} \pi$$

$$x_f = \frac{n}{2} \frac{2\pi}{3}, n = 0, 1, 2, \dots = \frac{n\pi}{3}$$

Στάσιμα Κύματα

• Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

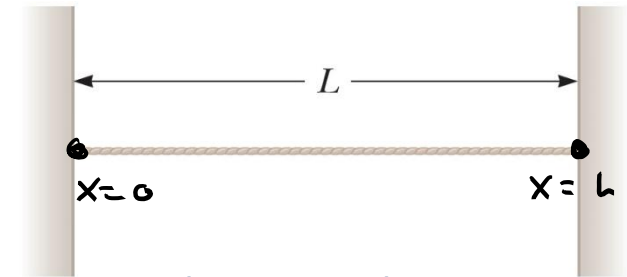
- Θεωρήστε το νήμα της εικόνας
 - Χορδή κιθάρας, πιάνου



- Οριακή συνθήκη: το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα!
- Αν διεγείρουμε το νήμα στο μέσο του, δυο ημιτονοειδή κύματα θα ταξιδέψουν προς αντίθετες κατευθύνσεις
 - Όταν φτάσουν στα άκρα του νήματος, θα ανακλαστούν με ίδιο πλάτος και συχνότητα, και θα συμβάλλουν μεταξύ τους
 - Κι αυτό συνεχίζεται για τα επόμενα ανακλώμενα και συμβαλλόμενα κύματα
- Αυτές είναι οι συνθήκες για δημιουργία ενός στάσιμου κύματος!

Στάσιμα Κύματα

• Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες



- Οριακή συνθήκη: το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα!
 - Άρα το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν στάσιμο κύμα πάνω στο νήμα είναι **προκαθορισμένο**
 - $2A \sin kL = 0 \Rightarrow kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$
 - Προκαθορισμένη είναι και η συχνότητα του κύματος, αφού
$$u = \lambda f \Rightarrow f_n = \frac{u}{\lambda_n}$$
- Η οριακή συνθήκη προκαλεί ένα συγκεκριμένο αριθμό (n) διακριτών στάσιμων κυμάτων στο νήμα, που λέγονται **κανονικοί τρόποι ή ιδιομορφές (modes)**
 - Καθεμιά έχει τη δική της συχνότητα, η οποία υπολογίζεται εύκολα όπως παραπάνω

Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Κανονικός τρόπος (mode) n
- Περιγράφεται ως η ταλάντωση που έχει οριακές συνθήκες στα άκρα της (δεσμοί) και κάθε δεσμός απέχει $\frac{1}{4}$ του μήκους κύματος από τον επόμενο/προηγούμενο αντιδεσμό

- Μήκη κύματος

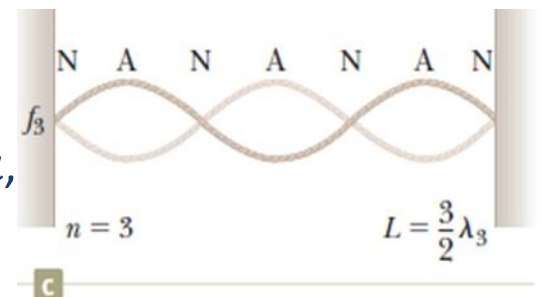
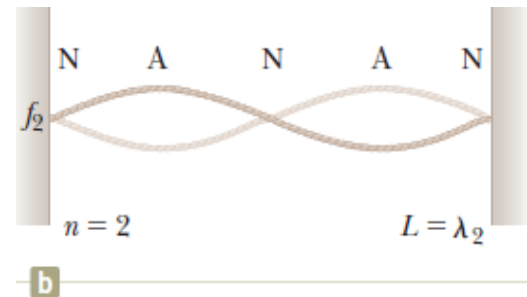
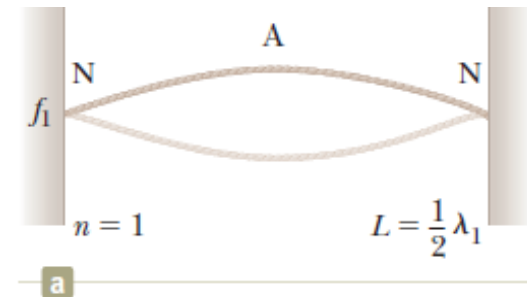
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, n \in \mathbb{N}$$

- Φυσικές συχνότητες

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L} = n f_1, n \in \mathbb{N}$$

- Για νήμα τάσης T και γραμμικής πυκνότητας μ ,

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, n \in \mathbb{N}$$



Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

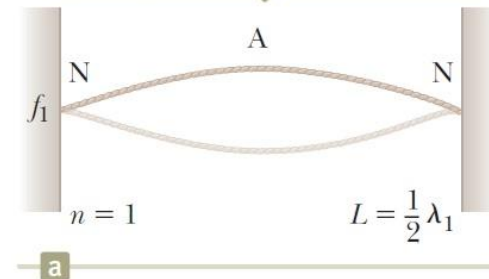
- Κανονικές μορφές (modes) n

- Για $n = 1$, η συχνότητα αυτή λέγεται **θεμελιώδης συχνότητα**

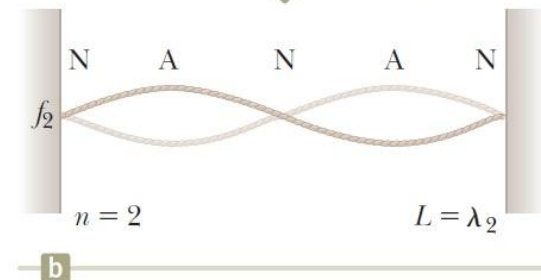
- Οι υπόλοιπες είναι ακέραιες πολλαπλάσιες αυτής: $f_n = n f_1$

- Συχνότητες κανονικών τρόπων που παρουσιάζουν αυτήν την ακέραια πολλαπλάσια σχέση δημιουργούν ταλαντώσεις που λέγονται **αρμονικές**

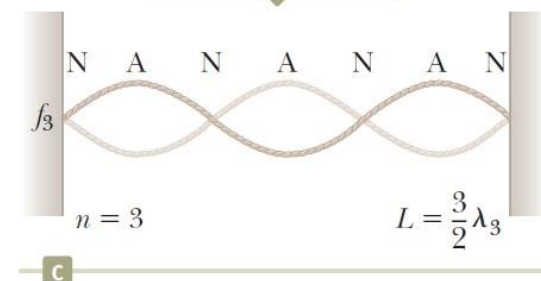
Πρώτη αρμονική (θεμελιώδης)



Δεύτερη αρμονική



Τρίτη αρμονική

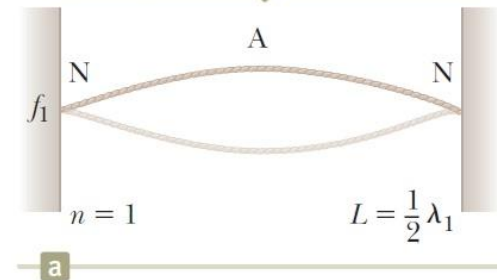


Στάσιμα Κύματα

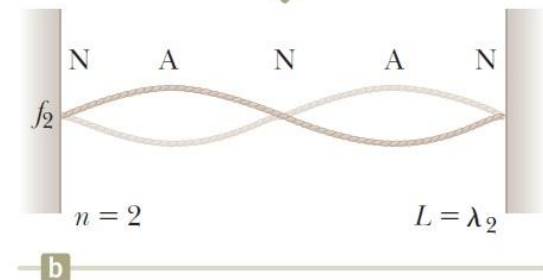
• Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Για να παρουσιαστεί μια μόνο αρμονική, πρέπει να διεγείρουμε το νήμα ώστε να πάρει το σχήμα της επιθυμητής αρμονικής
 - Αφού το διεγείρουμε, το νήμα θα ταλαντωθεί στην αντίστοιχη συχνότητα
 - Δύσκολο να επιτευχθεί για τις περισσότερες αρμονικές
- Αν διεγείρουμε το νήμα με τυχαίο τρόπο, μόνο κύματα που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες θα «επιζήσουν» στο νήμα
 - Αυτά είναι οι αρμονικές 😊

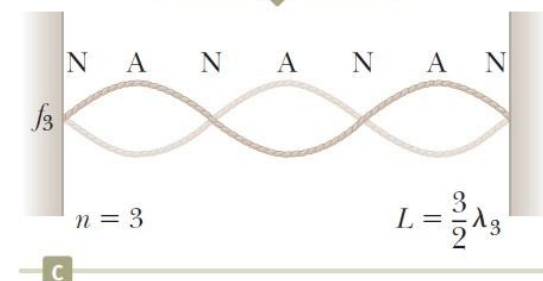
Πρώτη αρμονική (θεμελιώδης)



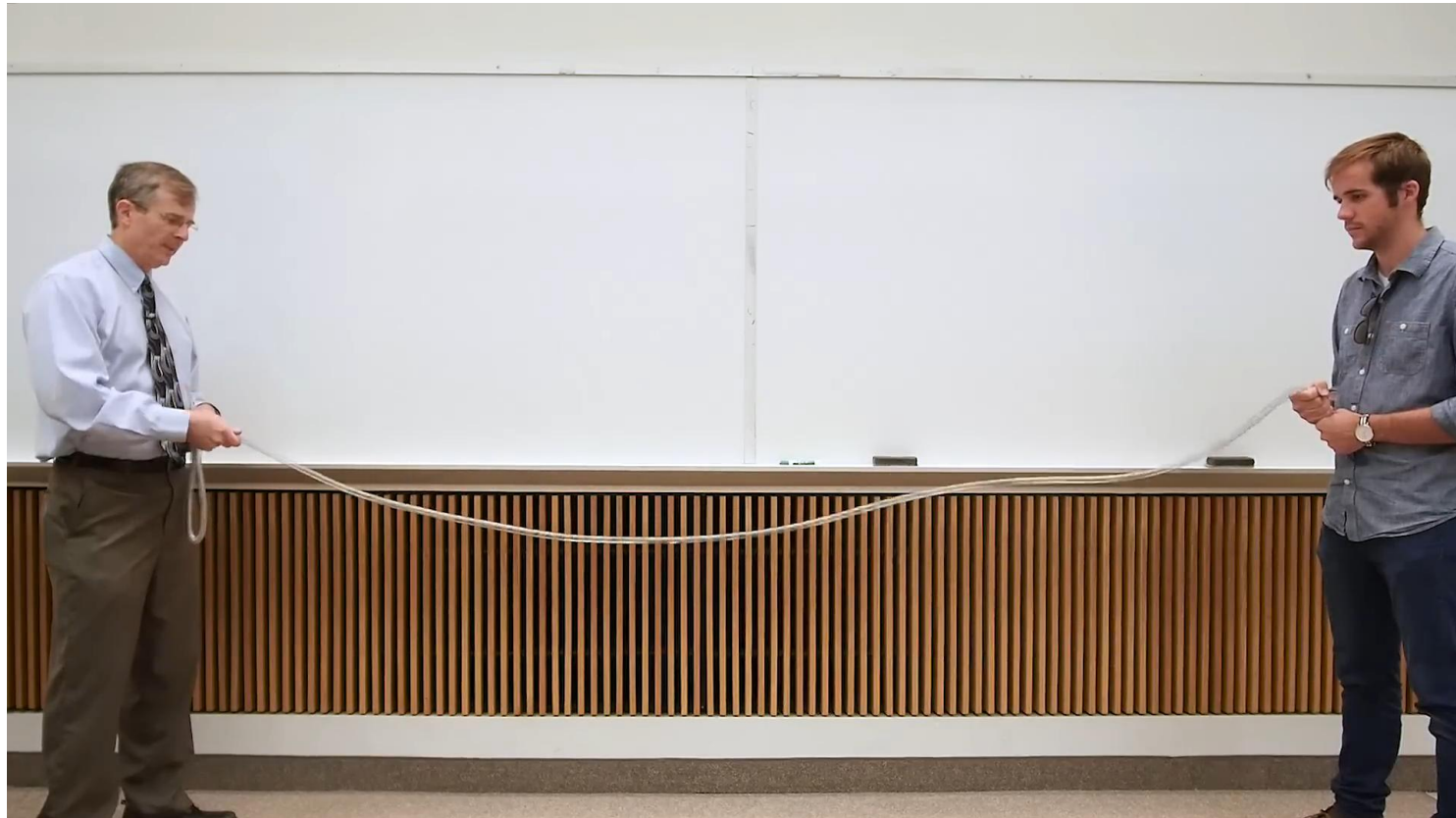
Δεύτερη αρμονική



Τρίτη αρμονική

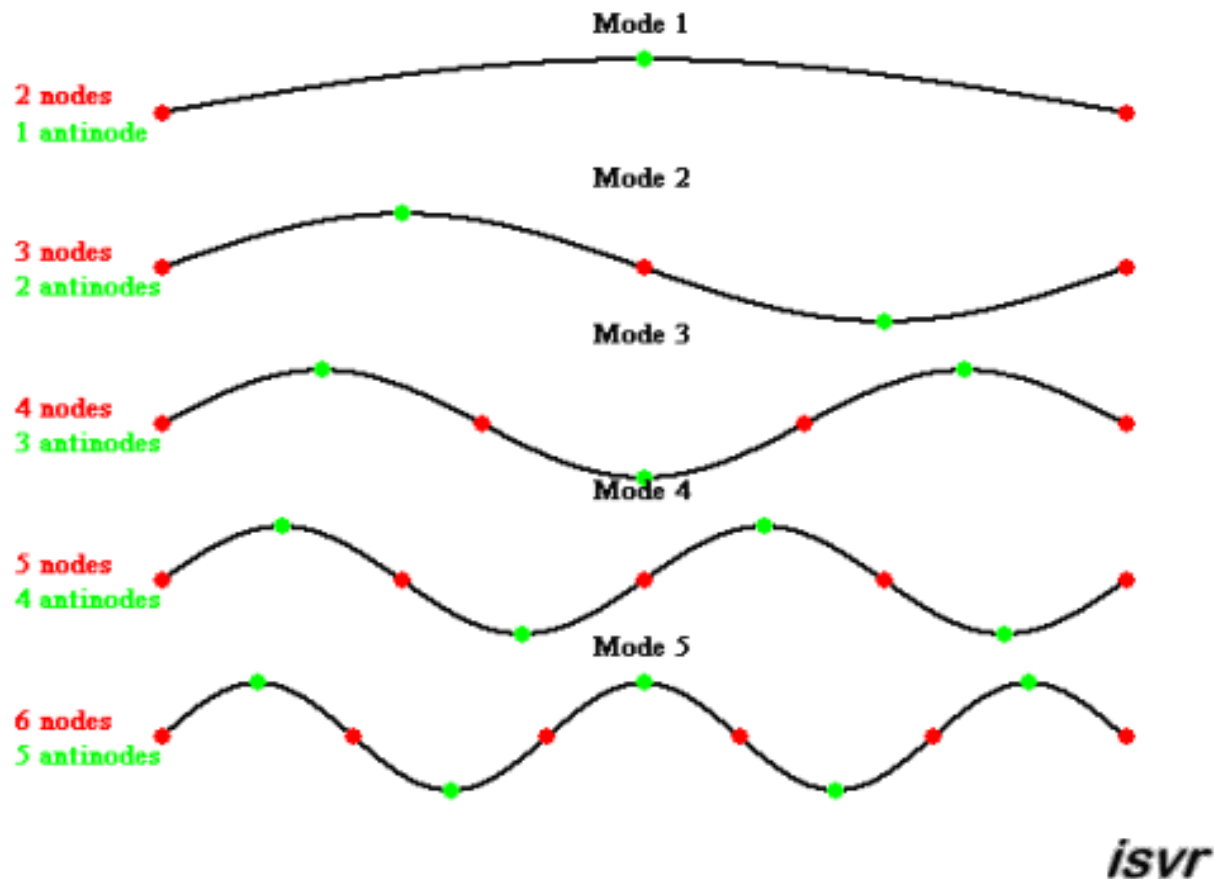


Στάσιμα Κύματα



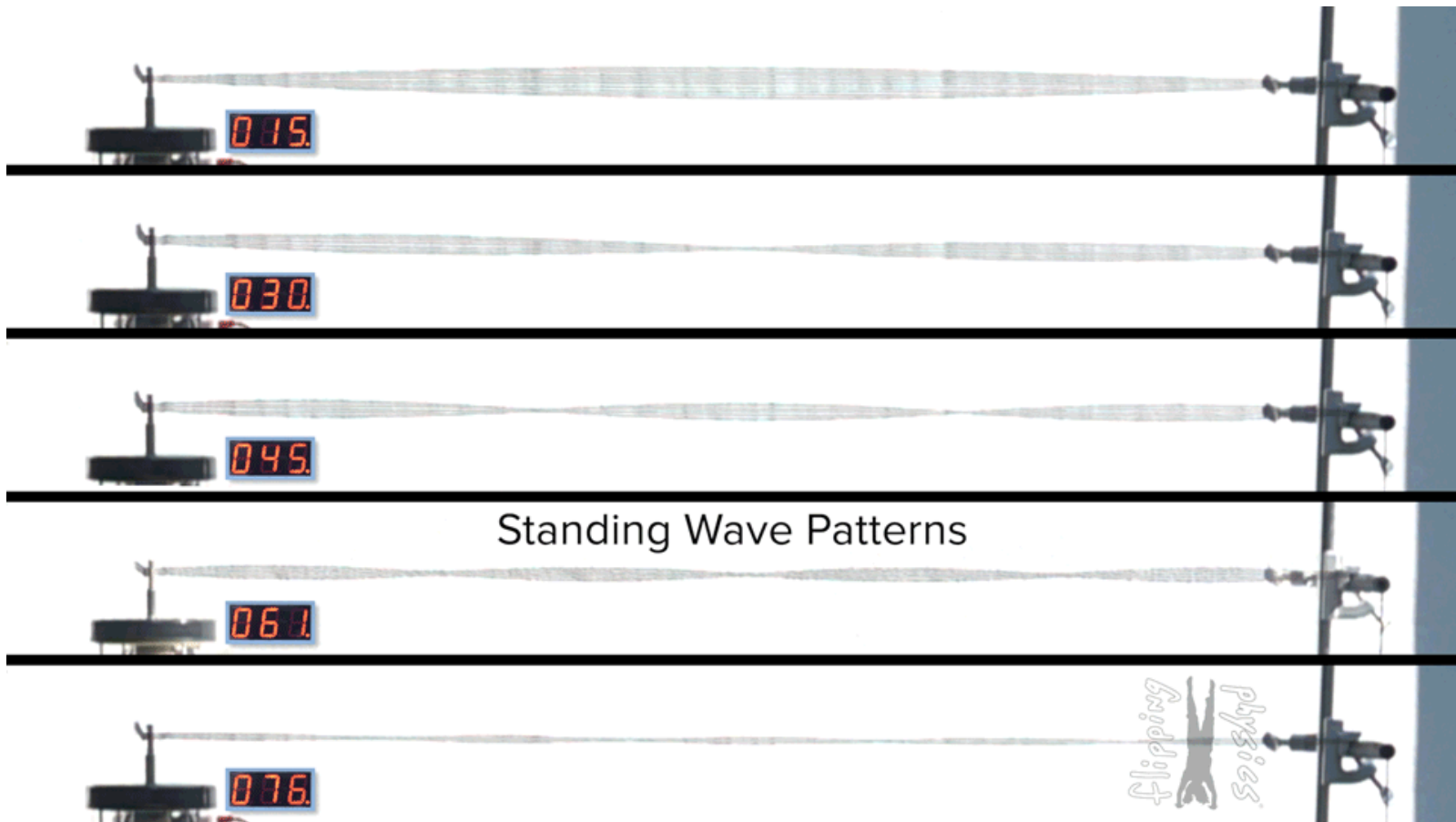
Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες
 - Κανονικές μορφές (modes) n



Στάσιμα Κύματα

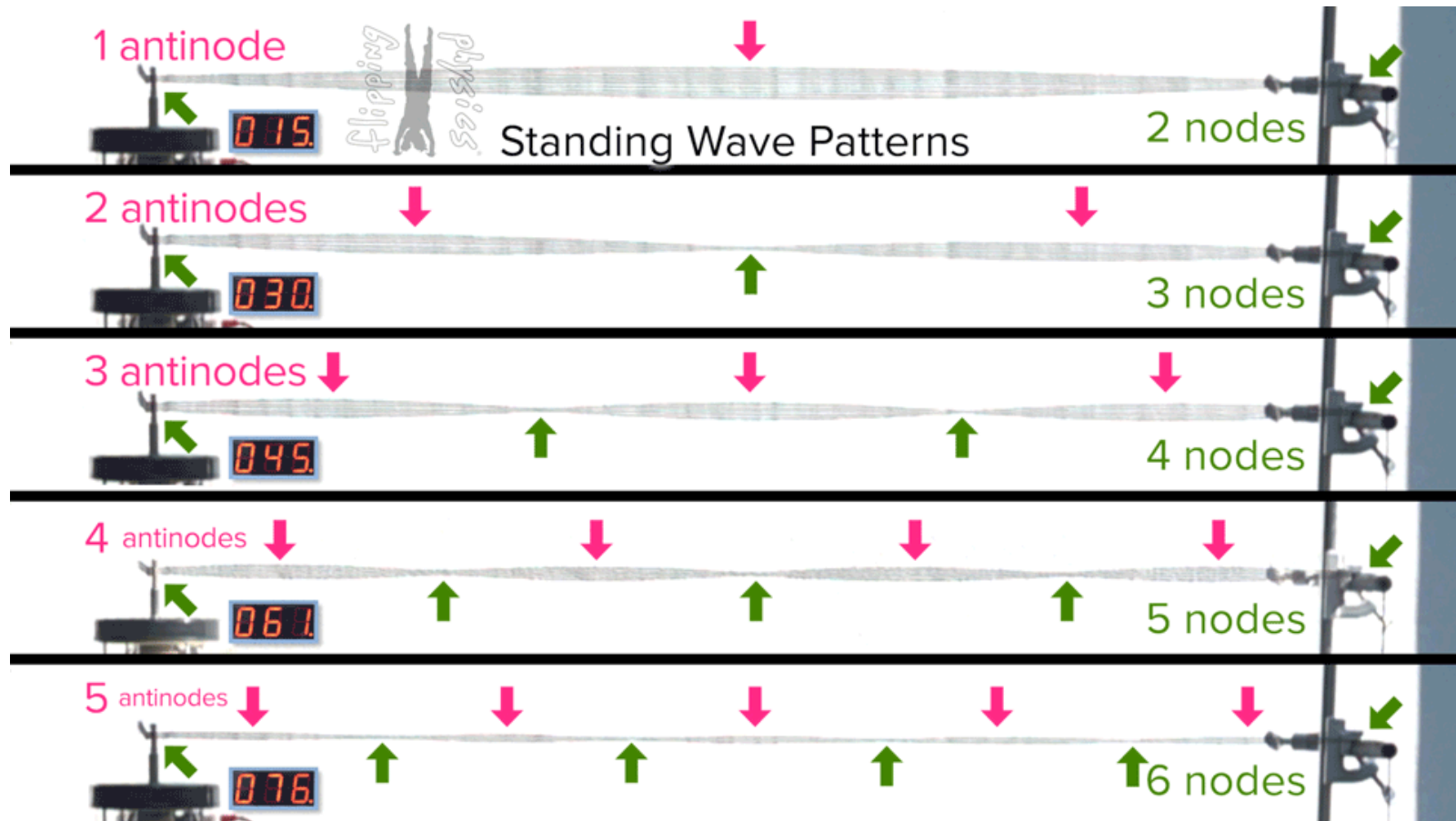
- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες
 - Κανονικές μορφές (modes) n



Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Κανονικές μορφές (modes) n





Τέλος Διάλεξης
