



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα που δημιουργούνται από διαφορετικά κύματα που «προστίθενται» στις χορδές του, με βάση την αρχή της υπέρθεσης. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Υπέρθεση

- Μελέτη κυματικής
- Ως τώρα μελετήσαμε ηχητικά κύματα προερχόμενα συνήθως από μια πηγή
- Κατανοήσαμε τον τρόπο διάδοσης, τη μετατόπιση και τη μεταβολή πίεσης των στοιχείων του μέσου διάδοσης (αέρας)
- Στη σφαιρική, ισοτροπική διάδοση, το ηχητικό κύμα είχε ένταση ανάλογη της μέσης ισχύος της πηγής και αντιστρόφως ανάλογη (του τετραγώνου) της απόστασης από αυτή
- Μελετήσαμε την ηχοστάθμη β , ως πιο βολική μετρική για την ένταση του ήχου
- Τι συμβαίνει όταν έχουμε δυο ή περισσότερες ηχητικές πηγές σε ένα χώρο???

Υπέρθεση

- Μελέτη κυματικής
- Βασική **διαφορά** κυμάτων από σωματίδια
 - **Συνδυασμός σωματιδίων δίνει ένα σώμα**
 - Για να συμβεί πρέπει τα σωματίδια να βρίσκονται σε **διαφορετικά** σημεία του χώρου
 - **Συνδυασμός κυμάτων δίνει ένα κύμα**
 - Για να συμβεί πρέπει τα κύματα να βρίσκονται στο **ίδιο** σημείο!
- **Σημαντικό:** τα κύματα μπορούν να συνδυαστούν, να συνυπάρξουν, να συμβάλλουν στην **ίδια** θέση του χώρου!
 - Για να αναλύσουμε τέτοιες συμπεριφορές, απαιτείται η

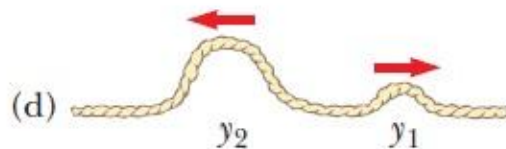
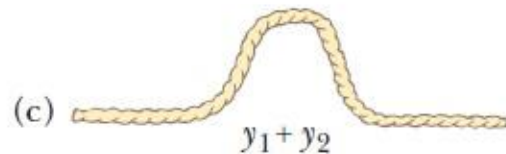
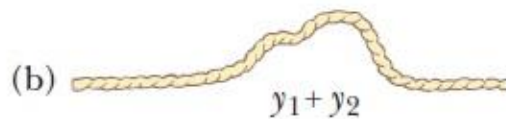
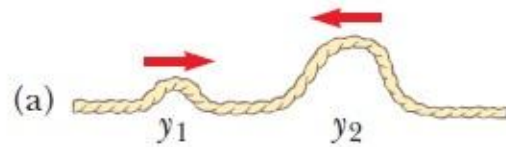
αρχή της υπέρθεσης

Υπέρθεση

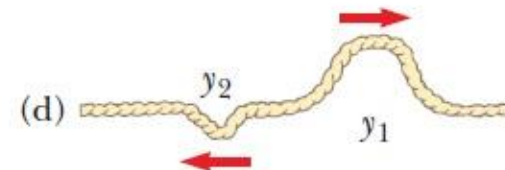
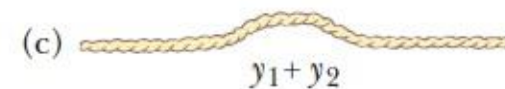
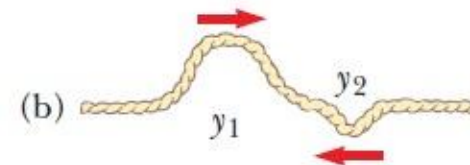
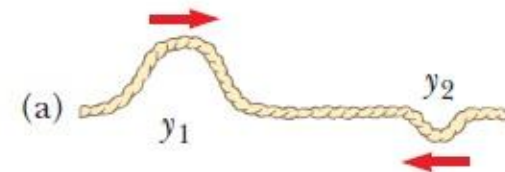
- ◉ Αρχή της υπέρθεσης
- ◉ Αν σε κάποιο μέσο διαδίδονται δυο ή περισσότερα κύματα, η συνισταμένη τιμή της κυματοσυνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών των κυματοσυναρτήσεων των επιμέρους κυμάτων
- ◉ Τέτοια κύματα λέγονται **γραμμικά**
- ◉ Ο συνδυασμός δυο διαφορετικών κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου λέγεται **συμβολή**

Υπέρθεση

ο Αρχή της υπέρθεσης



Ενισχυτική Συμβολή



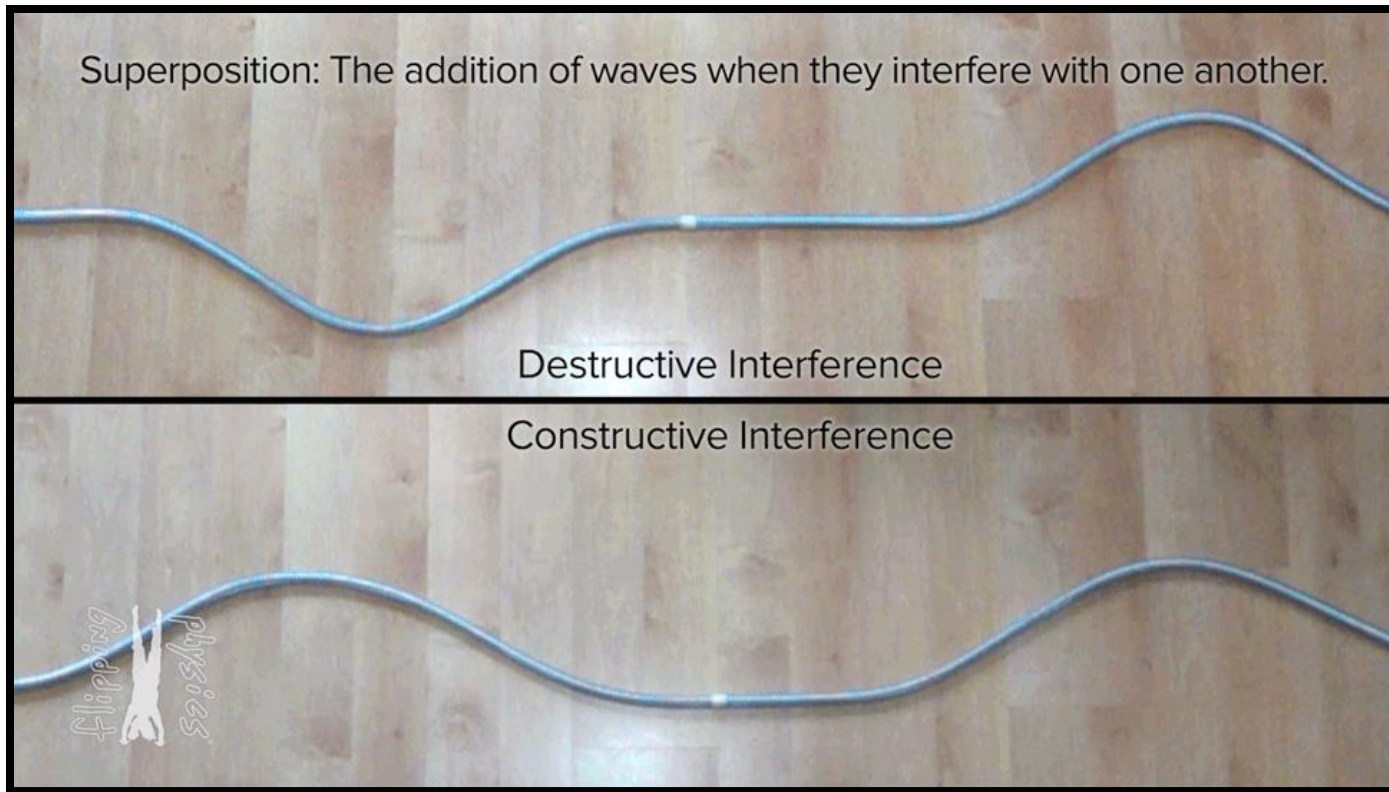
Καταστρεπτική Συμβολή

Υπέρθεση

- Αρχή της υπέρθεσης

Υπέρθεση

ο Αρχή της υπέρθεσης



Υπέρθεση

- Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων
- Δυο ημιτονοειδή κύματα που διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση, ακολουθώντας την ίδια διαδρομή
 - Ίδια συχνότητα ω , μήκος κύματος λ , και πλάτος A
 - Διαφορετική αρχική φάση (φ το ένα κύμα, 0 το άλλο)

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t + 0),$$

$$y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Υπέρθεση

$$\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right)$$

• Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

$$\bullet y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

$$= A[\sin(kx - \omega t + 0) + \sin(kx - \omega t + \varphi)]$$

$$= \left[2A \cos \left(\frac{kx - \omega t + \varphi - (kx - \omega t + 0)}{2} \right) \right] \sin \left(\frac{2kx - 2\omega t + \varphi}{2} \right)$$

$$= \left[2A \cos \left(\frac{\varphi - 0}{2} \right) \right] \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Το **συνολικό πλάτος** εξαρτάται από τη διαφορά αρχικής φάσης

$$= \left[2A \cos \left(\frac{\varphi - 0}{2} \right) \right] \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)$$

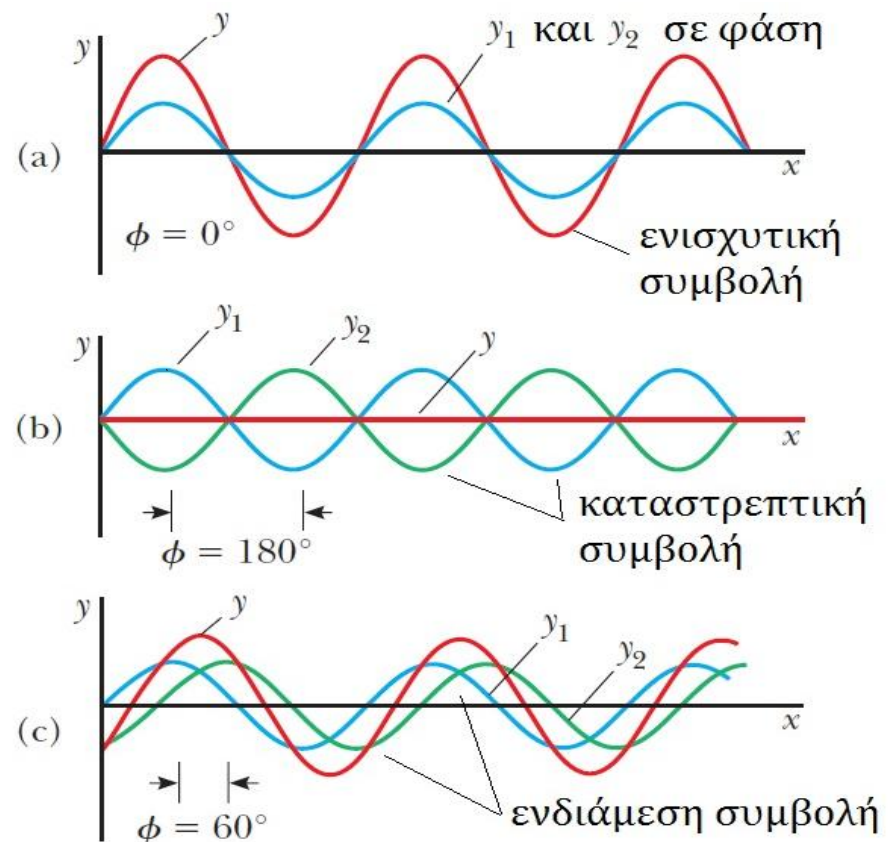
Κυματοσυνάρτηση οδεύοντος κύματος προς τα δεξιά

Υπέρθεση

Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

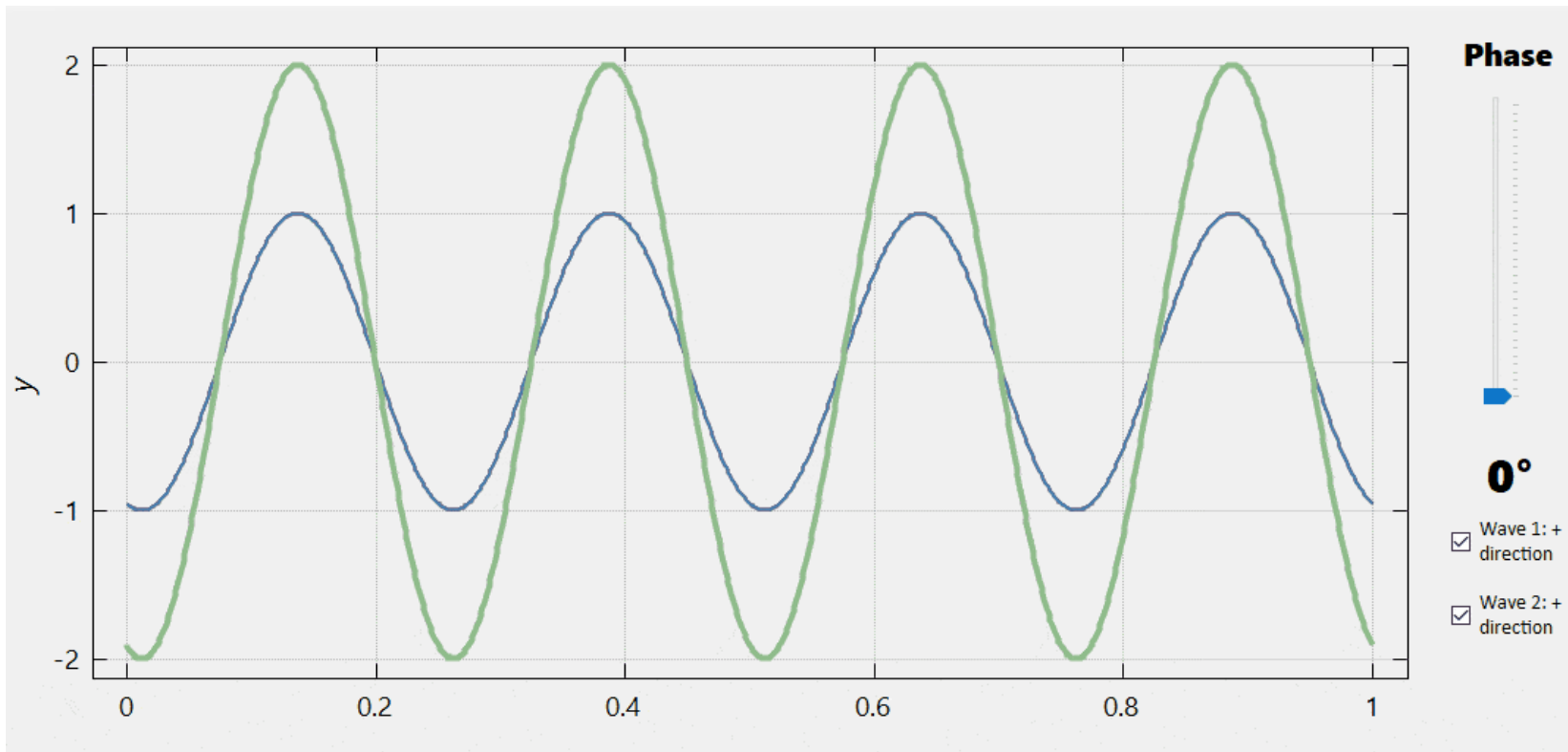
- $y(x, t) = \left[2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$

- Ίδια συχνότητα
- Ίδιο μήκος κύματος
- (α) $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$
 - Πλάτος $2A$
 - Κύματα **σε φάση**
 - **Ενισχυτική συμβολή**
- (β) $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$
 - Πλάτος 0
 - Κύματα **εκτός φάσης**
 - **Καταστρεπτική συμβολή**
- (γ) Άλλες περιπτώσεις
 - $0 < \text{Πλάτος} < 2A$



Υπέρθεση

○ Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

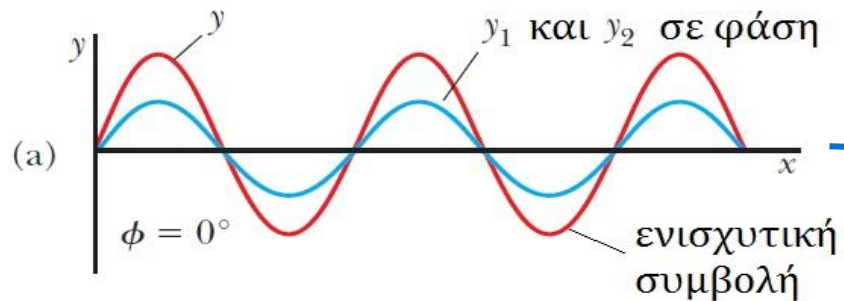


Υπέρθεση

• Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων – σύνοψη

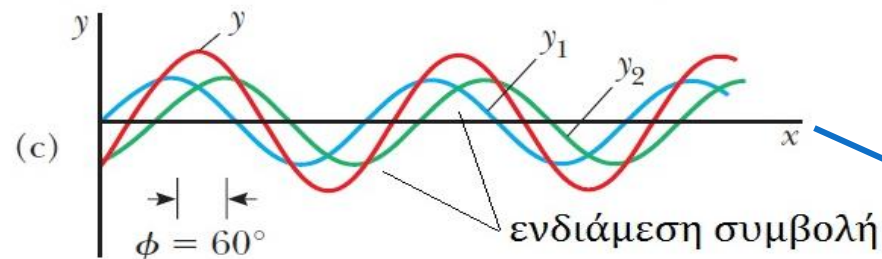
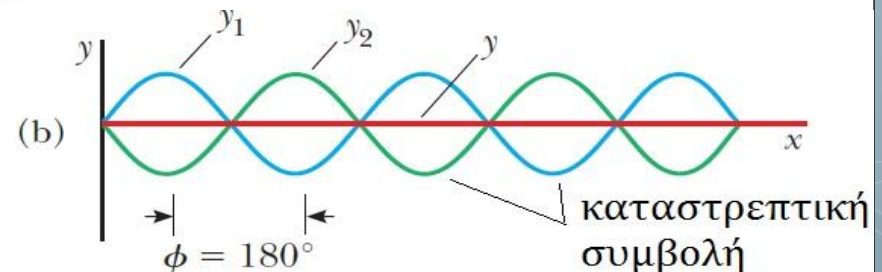
$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t), \quad y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = \left[2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$



$$\phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\phi = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\phi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Υπέρθεση

• Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

- Το προηγούμενο παράδειγμα ήταν εκπαιδευτικό αλλά αρκετά περιοριστικό
- Μόνο το ένα κύμα είχε μη μηδενική φάση
- Τα κύματα έχουν εν γένει το καθένα τη δική του αρχική φάση
- Οπότε στην προηγούμενη συζήτηση, η **διαφορά αρχικής φάσης** είναι αυτή που παίζει ρόλο στην καταστρεπτική, ενισχυτική, ή ενδιάμεση συμβολή των κυμάτων

$$y(x, t) = \left[2A \cos \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \right] \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right)$$

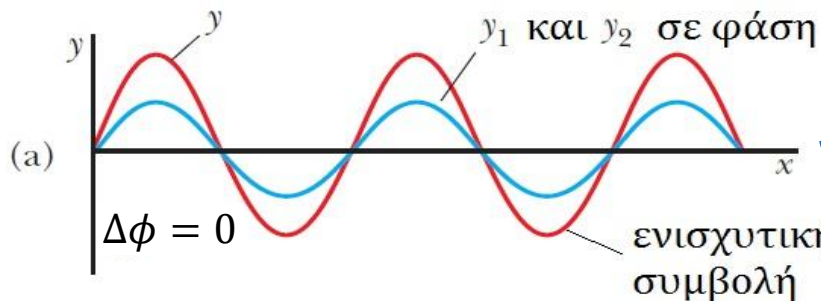
Υπέρθεση

○ Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων – διαφορετικές ϕ_i

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_1)$$

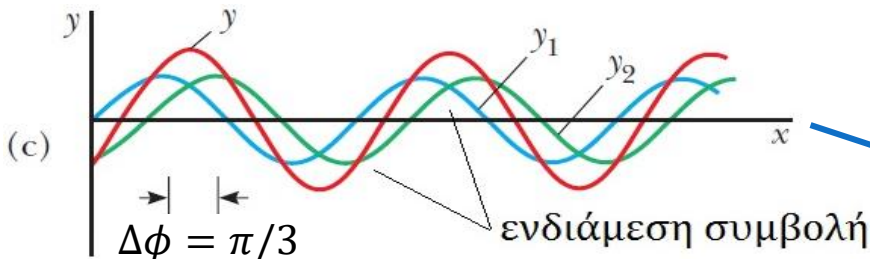
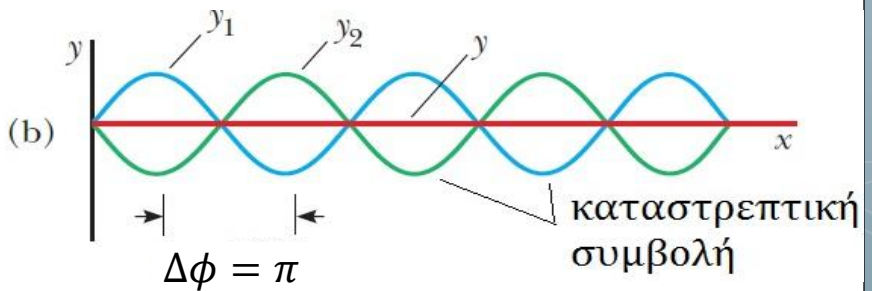
$$y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_2)$$

$$y(x, t) = \left[2A \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$



$$\Delta\phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta\phi = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\Delta\phi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Υπέρθεση

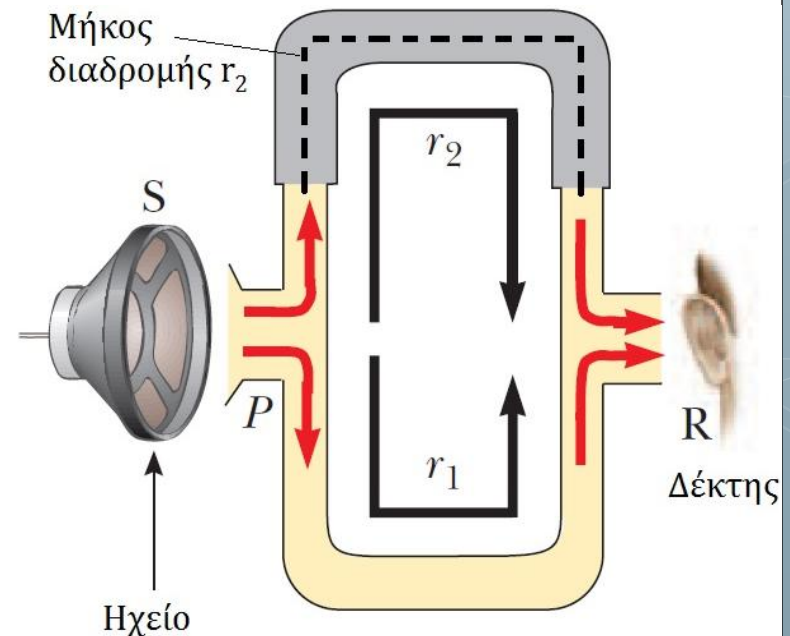
- Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Τα κύματα έχουν εν γένει το καθένα τη δική του αρχική φάση, όπως είδαμε μόλις...
 - ...ενώ μπορεί να διανύουν και διαφορετικές διαδρομές

- Ηχητικά κύματα από το ηχείο του σχήματος ακολουθούν διαφορετική διαδρομή

- Έχουν το ίδιο πλάτος A , ίδια λ και ω

- Απόσταση ηχείου από δέκτη = μήκος διαδρομής



Υπέρθεση

- Συμβολή ηχητικών κυμάτων
- Διαφορά διαδρομής

$$\Delta r = |r_2 - r_1|$$

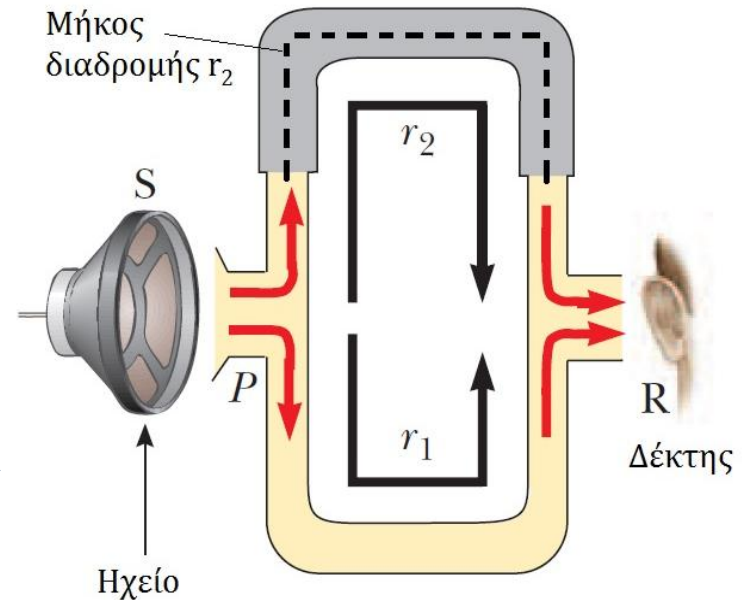
- **Φάση** του καθενός κύματος

$$\Phi_i = kr_i - \omega t + \varphi_i$$

- Τότε

$$y(r, t) = 2A \cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$
$$= \boxed{2A \cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)} \sin\left(k \frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

$$\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$$



Υπέρθεση

$$y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$

- Συμβολή ηχητικών κυμάτων – γενική εικόνα

- Έστω η διαφορά συνολικής φάσης

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$$

- Αν $\Delta\Phi = 2m\pi, m = 0, 1, 2, 3, \dots$ τότε τα κύματα συμβάλλουν **ενισχυτικά**

Άρτιο πολλαπλάσιο του π

- Αφού

$$2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 2A \cos\left(\frac{2m\pi}{2}\right) = 2A \cos(m\pi) = \pm 2A$$

- Αν $\Delta\Phi = (2m + 1)\pi, m = 0, 1, 2, 3, \dots$ τότε τα κύματα συμβάλλουν **καταστρεπτικά**

Περιττό πολλαπλάσιο του π

- Αφού

$$2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 2A \cos\left(\frac{(2m + 1)\pi}{2}\right) = 2A \cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Υπέρθεση

$$\Phi_i = kr_i - \omega t + \varphi_i$$

- Συμβολή ηχητικών κυμάτων – διαφορά διαδρομής Δr

- Επίσης

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi = k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \phi_2 - \phi_1 = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} + \Delta\varphi$$

- Αν η αρχική φάση είναι ίδια, $\varphi_1 = \varphi_2$ (π.χ. κοινή πηγή ήχου):

$$\Delta\varphi = 0$$

- Ενισχυτική συμβολή (σε κοινή πηγή ήχου):

$$2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = 2m\pi \Leftrightarrow \Delta r = m\lambda, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ακέραιο
πολλαπλάσιο
του λ

- Καταστρεπτική συμβολή (σε κοινή πηγή ήχου):

$$2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = (2m + 1)\pi \Leftrightarrow \Delta r = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Περιττό
πολλαπλάσιο
του $\lambda/2$

Υπέρθωση

ο Συμβολή ηχητικών κυμάτων – σύνοψη

$$\sin \theta \pm \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta \pm \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta \mp \varphi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} y_1(r_1, t) &= A \sin(kr_1 - \omega t + \phi_1) \\ y_2(r_2, t) &= A \sin(kr_2 - \omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A \sin(\Phi_1) \\ &A \sin(\Phi_2) \end{aligned}$$

$$y(r, t) = y_1(r_1, t) + y_2(r_2, t) = \left[2A \cos \left(\frac{\Delta\Phi}{2} \right) \right] \sin \left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} \right)$$

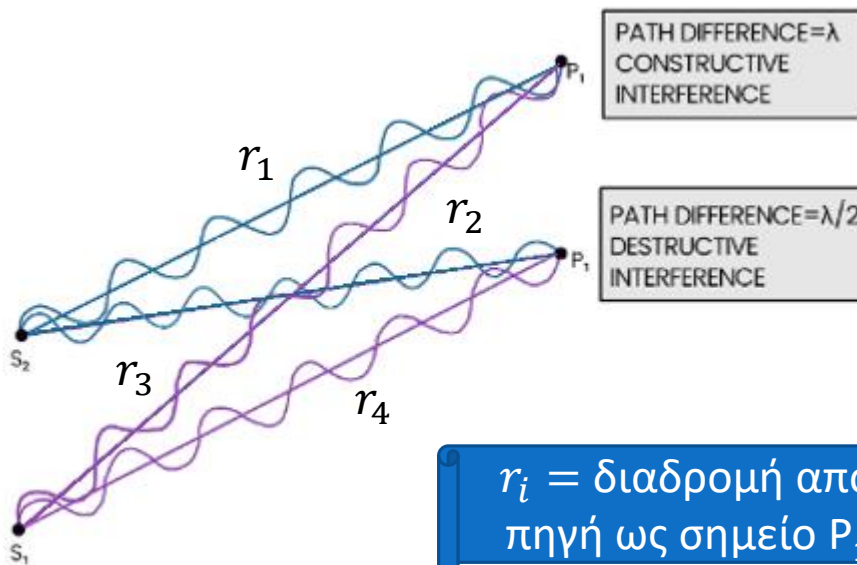
$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} + \Delta\phi$$

«σε φάση»

Αν βρίσκονται «σε φάση», τότε:

$$\Delta r = m\lambda, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\Delta r = \frac{(2m + 1)\lambda}{2}, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$



r_i = διαδρομή από πηγή ως σημείο P_i

Υπέρθεση

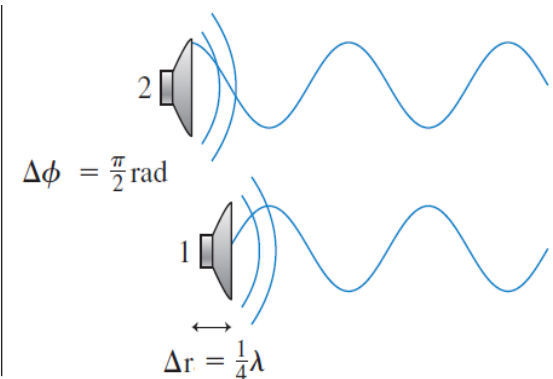
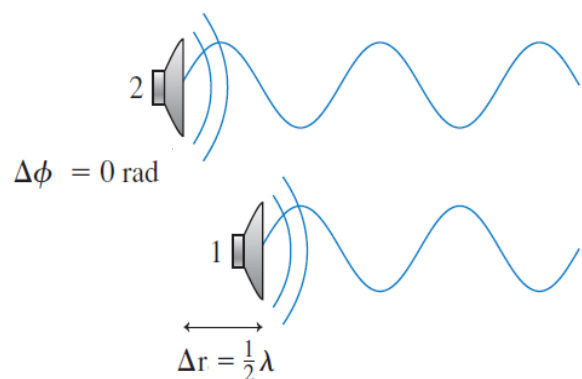
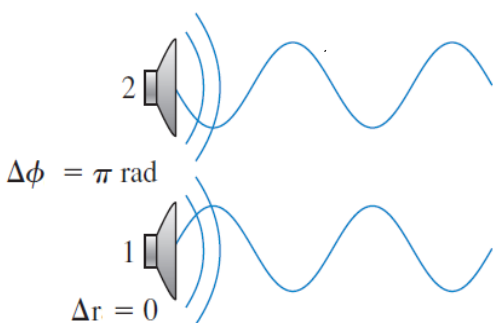
• Συμβολή ηχητικών κυμάτων

• Καταστρεπτική συμβολή – πότε συμβαίνει?

- Λόγω διαφοράς αρχικής φάσης $\Delta\varphi$ - (a)
- Λόγω διαφορετικής θέσης των πηγών - (b)
 - Διαφορετικό μήκος διαδρομής Δr (που εξαρτάται από το λ)
- Λόγω **και των δυο** παραπάνω παραγόντων - (c)

• Στο παρακάτω σχήμα, έχουμε $\Delta\Phi = \pi$ σε κάθε περίπτωση

- Θεωρούμε ότι k και ω είναι τα ίδια στα δυο κύματα



Υπέρθεση

Quiz:

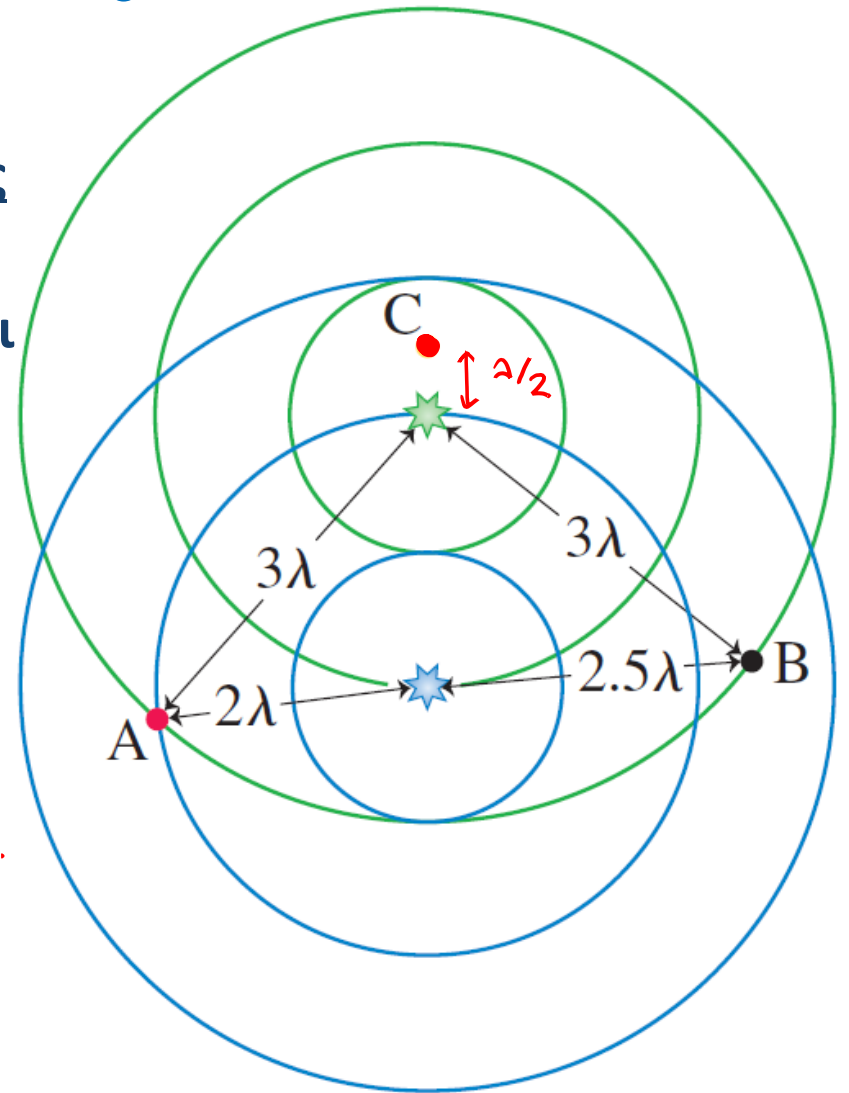
- Θεωρήστε δυο πηγές ίδιες και σε φάση μεταξύ τους
- Στα σημεία A, B, C υπάρχει καταστρεπτική ή ενισχυτική συμβολή?

$$\Delta r_A = |3\lambda - 2\lambda| = \lambda, \text{ ενισχ.}$$

$$\Delta r_B = |2.5\lambda - 3\lambda| = \frac{\lambda}{2}, \text{ καταστρ.}$$

$$\Delta r_C = |2.5\lambda - 0.5\lambda| = 2\lambda, \text{ ενισχ.}$$

$$\Delta r = m\lambda, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$
$$\Delta r = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

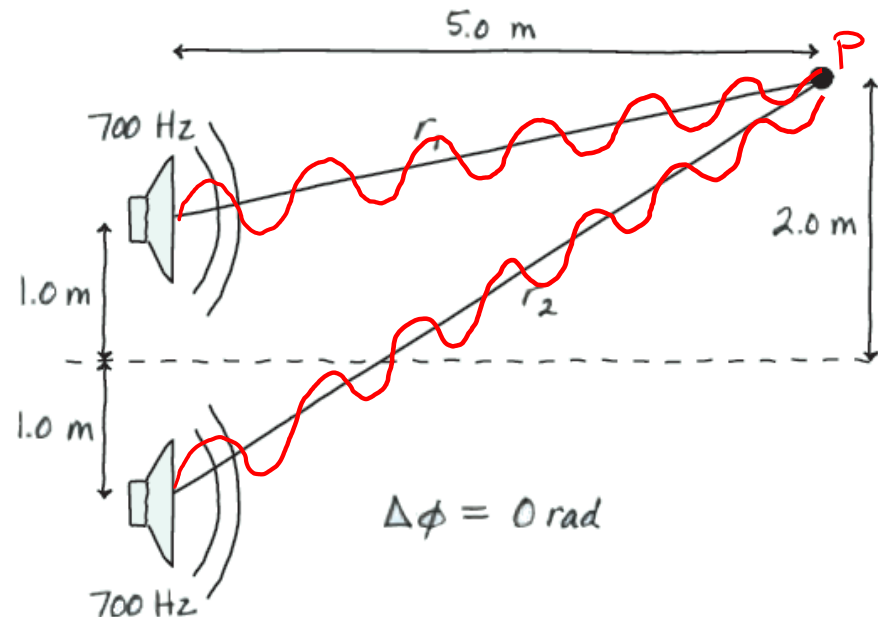


Υπέρθεση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Δυο ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 2.0 μέτρων και **σε φάση**. Εκπέμπουν συχνότητα 700 Hz σε ένα δωμάτιο που ο ήχος διαδίδεται με ταχύτητα 341 m/s. Ένας ακροατής στέκεται στο σημείο του σχήματος. Τι είδους συμβολή υπάρχει στο σημείο? Πώς αλλάζει η απάντησή σας αν τα ηχεία βρίσκονται **εκτός φάσης**?

- $\Delta\phi = 0 \Leftrightarrow$ "σε φάση"
- $\Delta\phi = \pi \Leftrightarrow$ "εκτός φάσης"



$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} + \Delta\phi$$

Υπέρθεση

• Παράδειγμα – Λύση:

- $\Delta\phi = 0$: σε φάση :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \cancel{\Delta\phi}^{\theta}$$

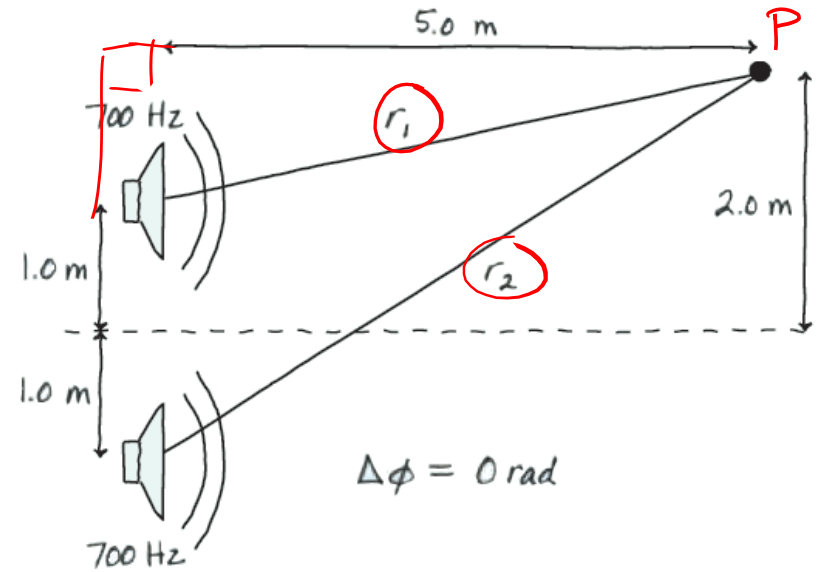
$$= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r$$

$$\Delta r = |r_2 - r_1|$$

$$r_2 = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \simeq 5.83 \text{ m}$$

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26} \simeq 5.09 \text{ m}$$

$$\text{Είναν } v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = 0.487 \text{ m}$$



$$\Delta r = 0.731 \text{ m}$$

$$\Delta r = \frac{0.731}{0.487}$$

$$= \frac{3}{2} \Rightarrow \Delta r = 3 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

ΚΑΤΑΣΤΡΕΦΤΙΚΗ

Υπέρθεση

• Παράδειγμα – Λύση:

- $\Delta\phi = \pi$: εκτός φάσης

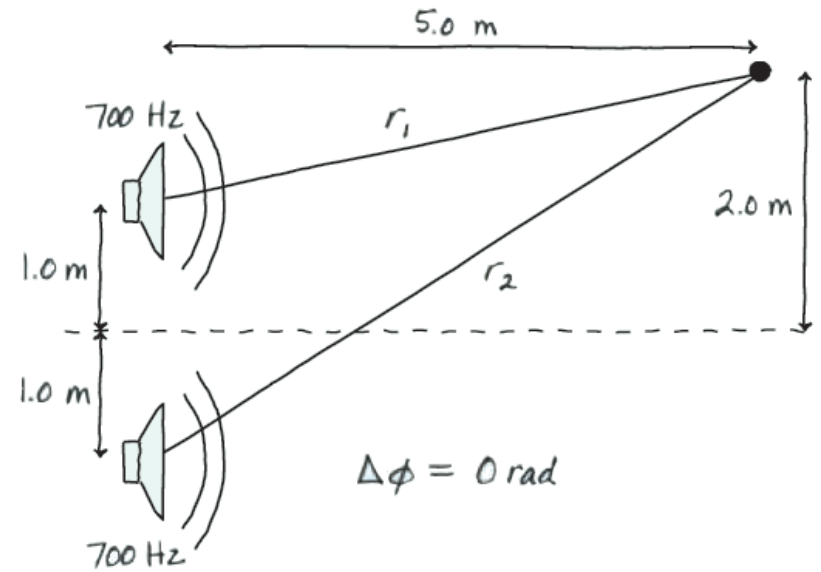
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \pi$$

$$= 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} + \pi$$

$$= 2\pi \frac{3}{2} + \pi$$

$$= 3\pi + \pi$$

$$= 4\pi \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\text{ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΗ}}$$



Υπέρθεση

◉ Συμβολή ηχητικών κυμάτων

◉ Κοινές πηγές

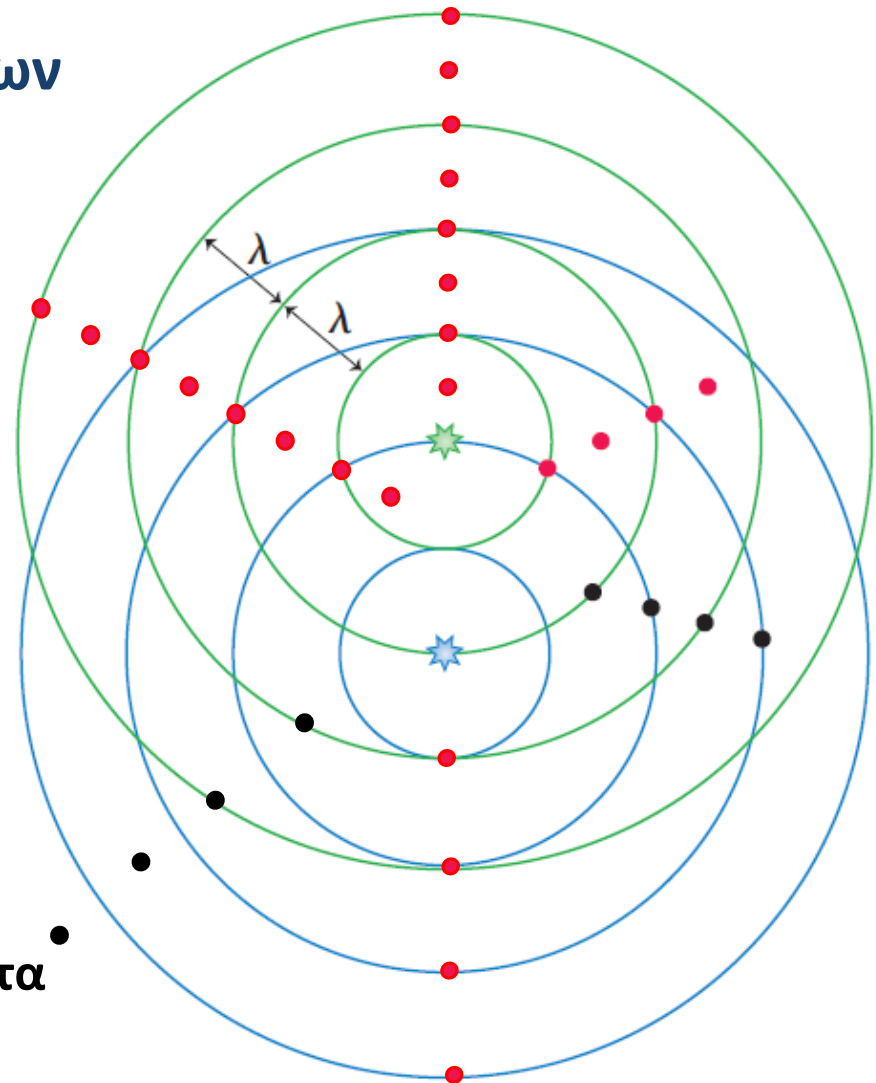
- ◉ Ίδιο k , ίδιο f , ίδιο A , $\Delta\phi = 0$

◉ Ενισχυτική συμβολή

- ◉ Τα πυκνώματα του ενός κύματος συμπίπτουν με αυτά του άλλου – το ίδιο και τα αραιώματα

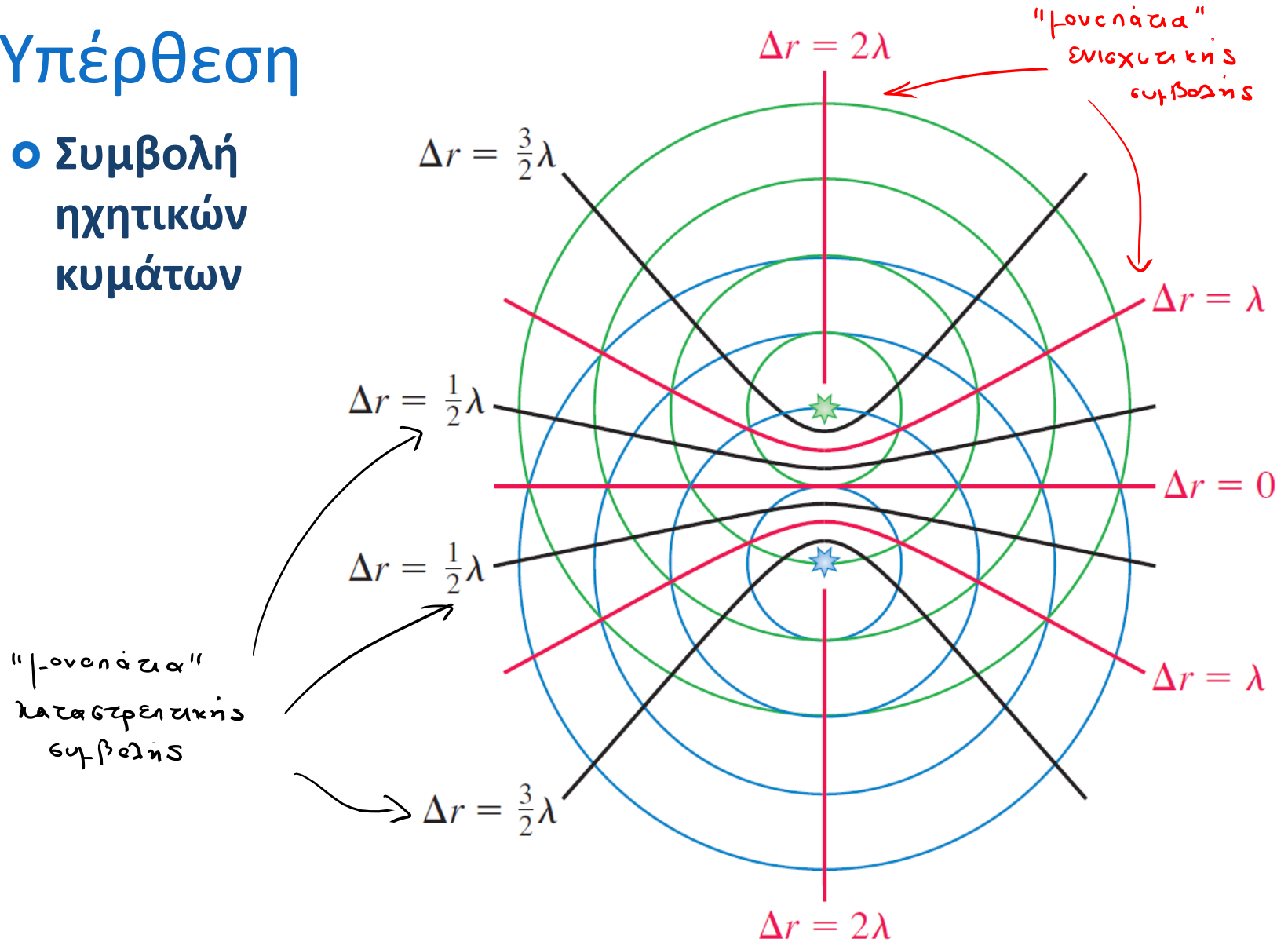
◉ Καταστρεπτική συμβολή

- ◉ Τα πυκνώματα του ενός συμπίπτουν με τα αραιώματα του άλλου



Υπέρθεση

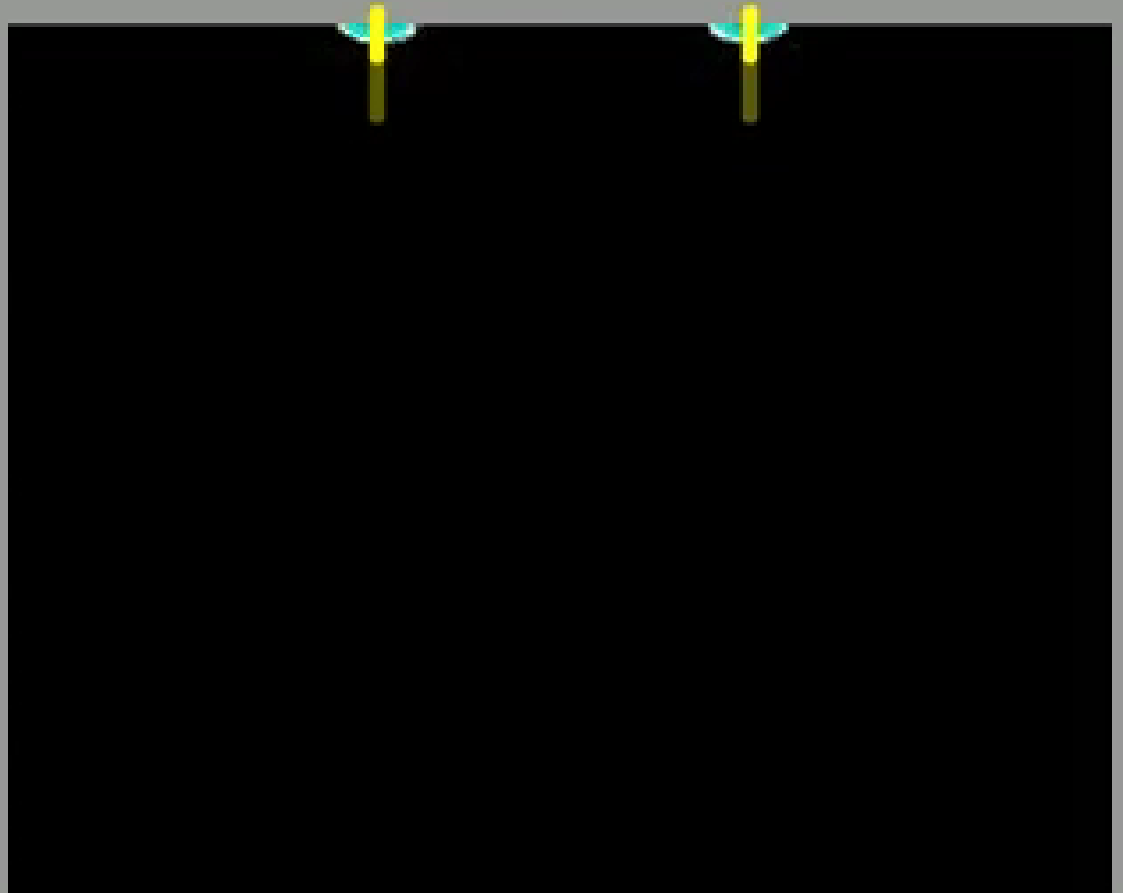
• Συμβολή ηχητικών κυμάτων



Υπέρθεση

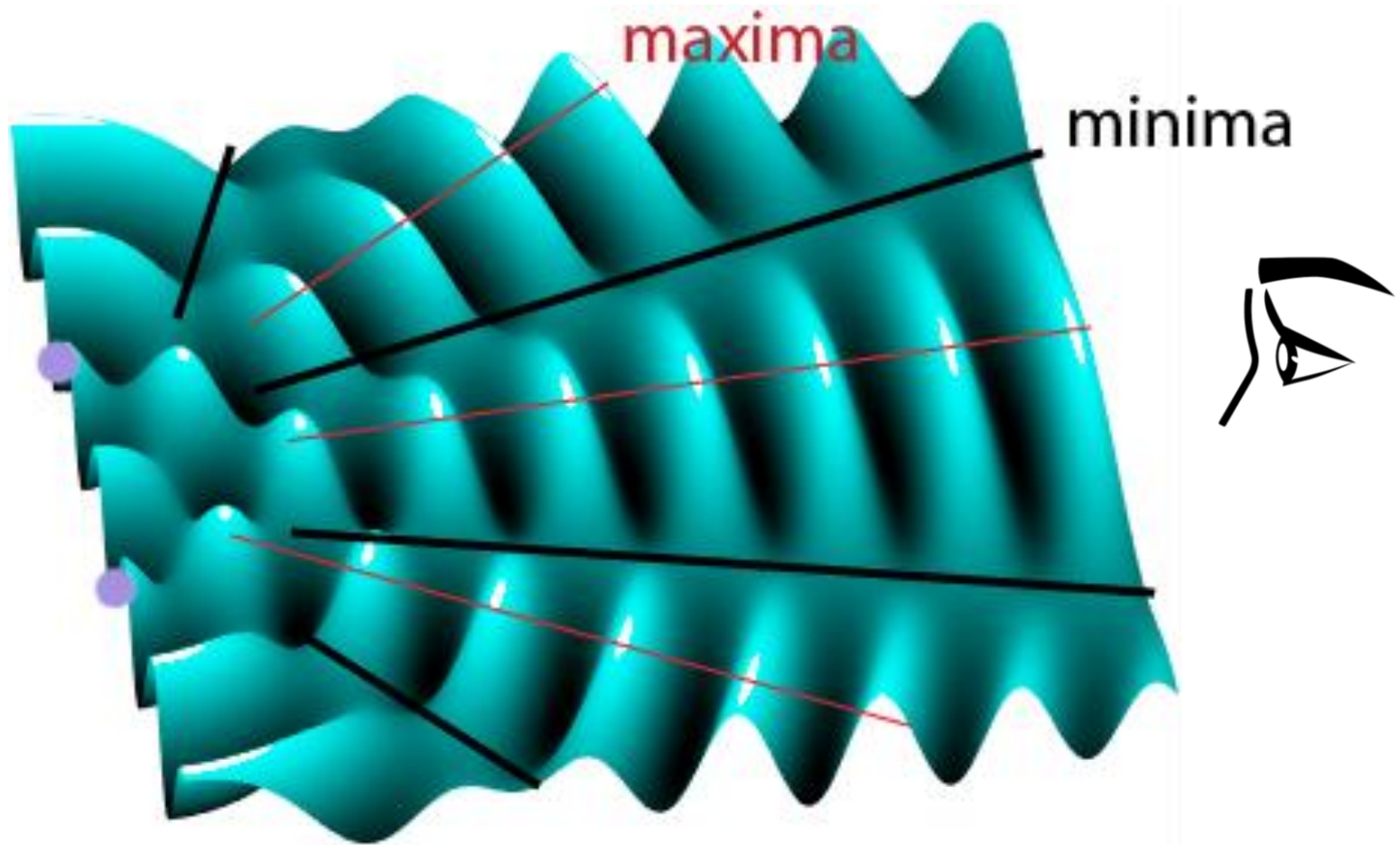
- ο Συμβολή
ηχητικών
Κυμάτων

Two source interference



Υπέρθεση

ο Συμβολή ηχητικών κυμάτων



Υπέρθεση

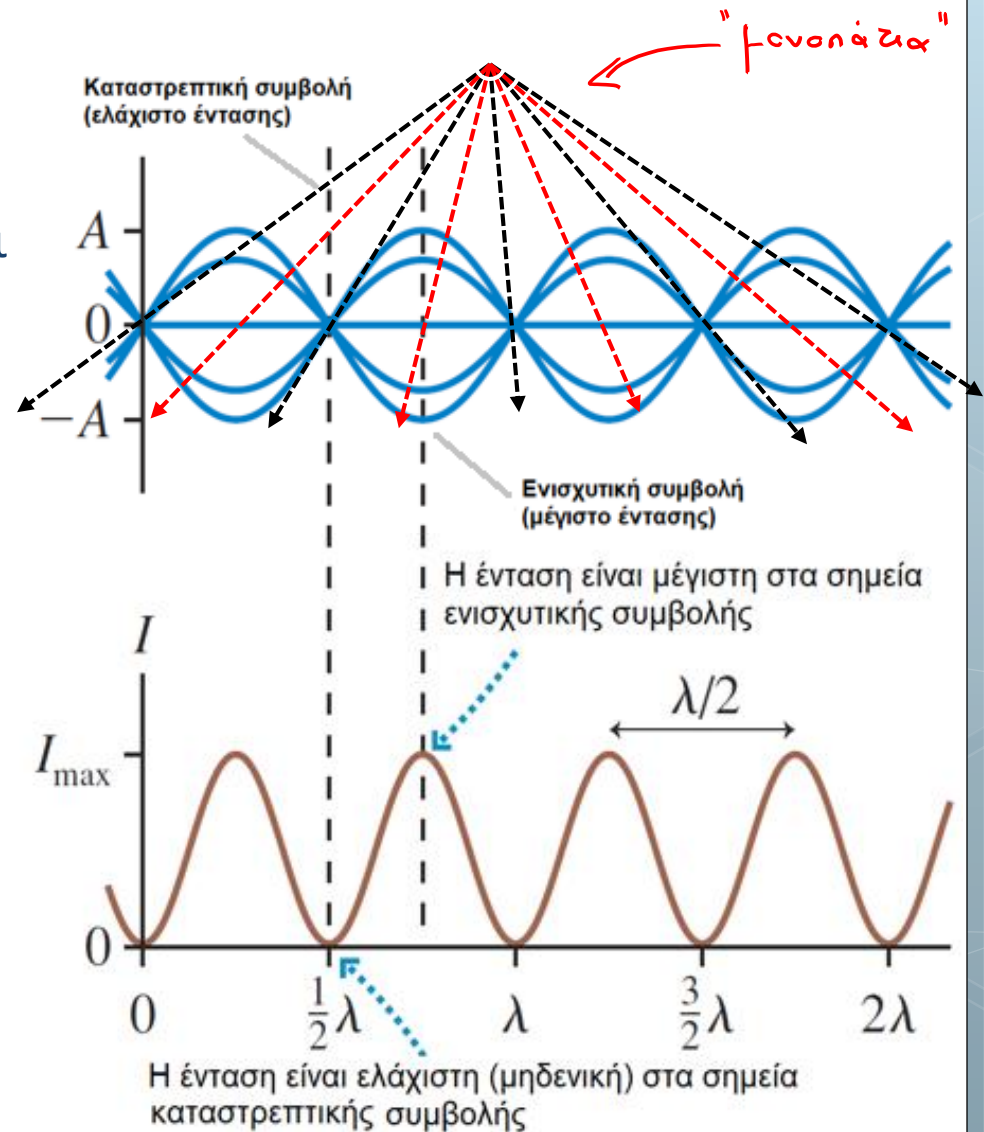
• Ένταση ηχητικών κυμάτων

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι η ένταση I ενός ηχητικού κύματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του **συνολικού** κύματος A'

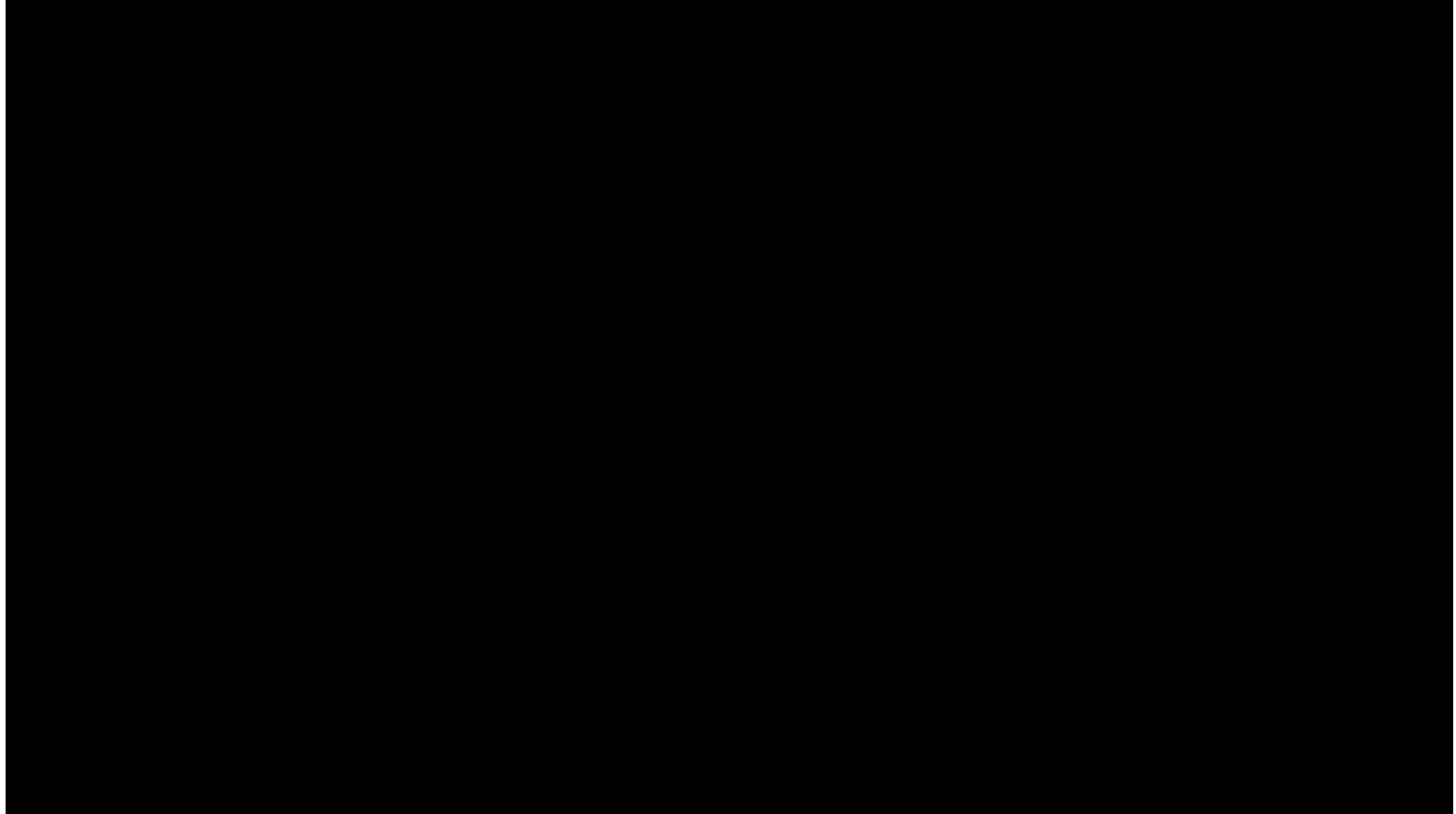
$$I = cA'^2$$

$$= c \left(2A \cos \left(\frac{\Delta\Phi}{2} \right) \right)^2$$

- Η ένταση I του ήχου είναι **μέγιστη** στα σημεία **ενισχυτικής συμβολής** και **μηδενική** (ελάχιστη) στα σημεία **καταστροφικής συμβολής**

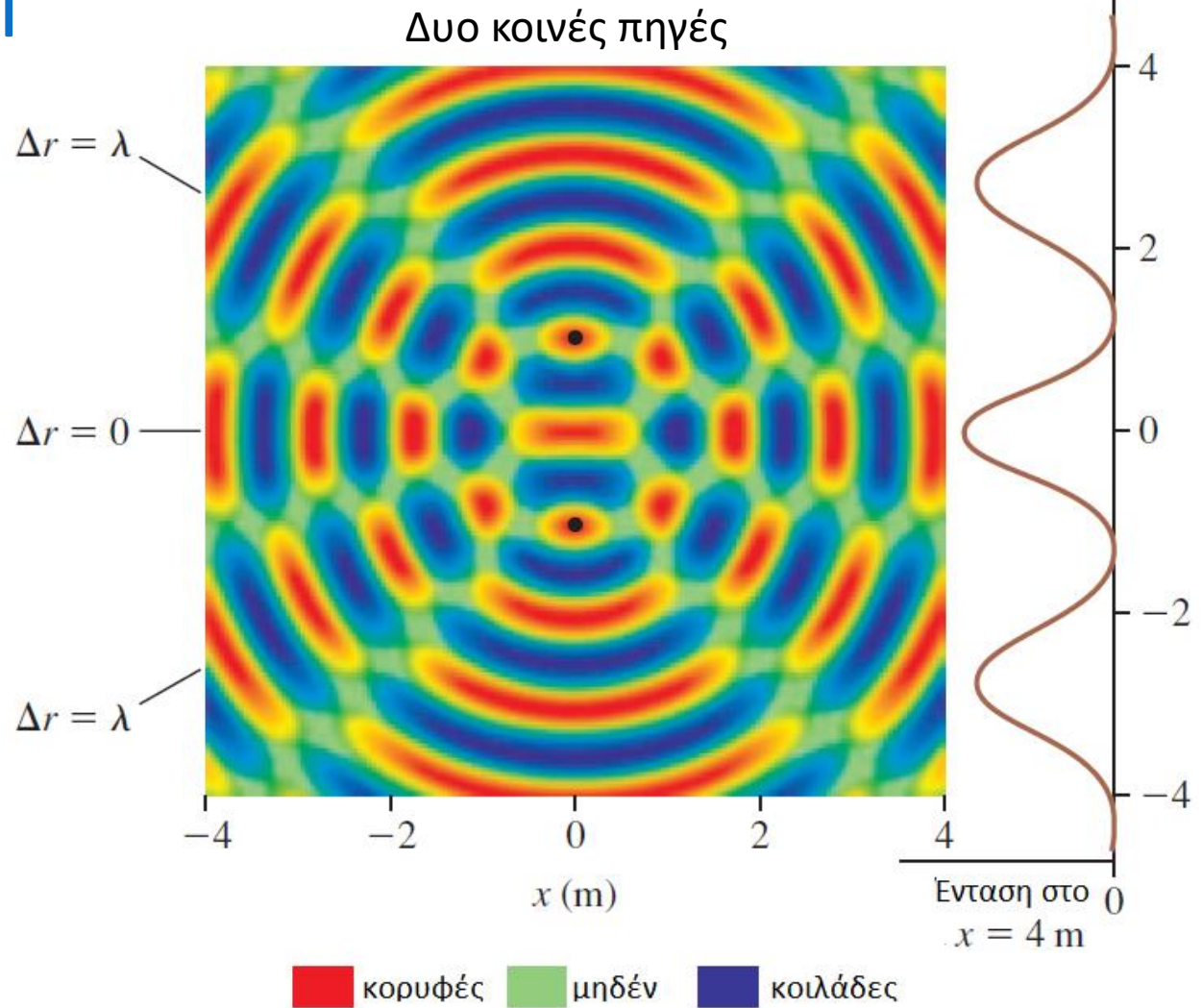


Υπέρθεση



Υπέρθεση

- Ένταση ηχητικών κυμάτων



Υπέρθεση

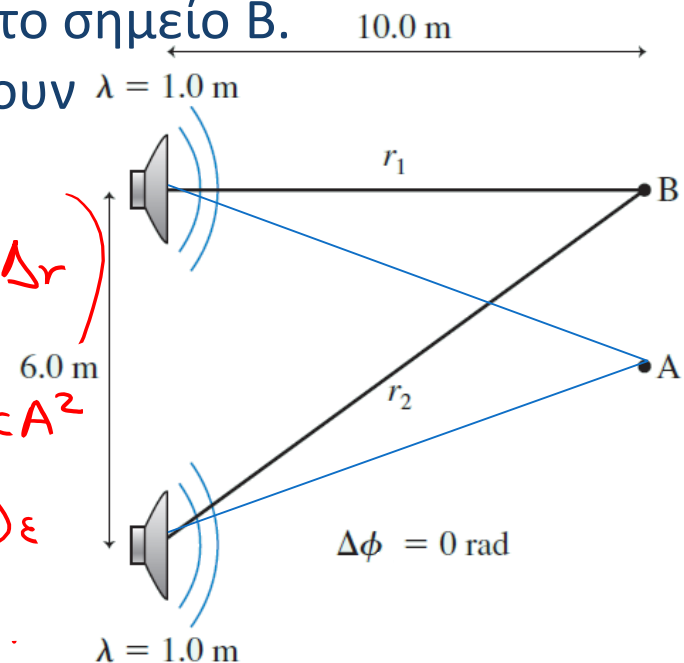
◉ Παράδειγμα:

- ◉ Δυο ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 6.0 μέτρων και **σε φάση**. Εκπέμπουν μήκος κύματος $\lambda = 1.0 \text{ m}$. Κάθε ηχείο δημιουργεί ήχο με ένταση I_0 . Ένας ακροατής στέκεται στο σημείο A του σχήματος (στη μεσοκάθετο της απόστασης των ηχείων). Ένας δεύτερος ακροατής στέκεται στο σημείο B. Ποιες είναι οι εντάσεις που λαμβάνουν σε όρους I_0 ?

"σε φάση" $\Leftrightarrow \underline{\Delta \phi = 0} \quad \left(\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r \right)$

Κάθε ηχείο προσφέρει ένταση $I_0 = cA^2$

αλλά η ανυλητική ένταση σε κάθε σημείο A, B θα είναι διαφορετική.



Υπέρθεση

ο Παράδειγμα – Λύση:

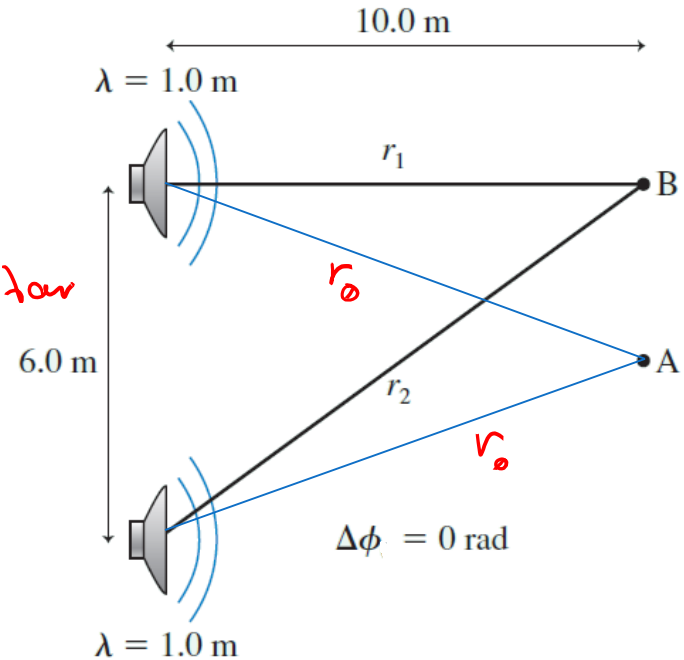
Τα κύματα από τα δύο ηχεία συμβάλλουν
τέσο στο σημείο A, έσο και στο B.
Λόγω της συμβολής, το πλάτος του
συνολικού κύματος θα είναι

$$A_i = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\phi_i}{2}\right) \right|$$

Γε $i = A, B$ τα δύο σημεία που μας ενδιαφέρουν.

→ Για το σημείο A: $\Delta r = 0$, αφού οι αποστάσεις r_0 στο σχήμα είναι
ίδιες. Άρα στο σημείο A θα έχουμε ενισχυτική συμβολή με
πλάτος $2A$ και ένταση $I_A = c(2A)^2 = c4A^2 = 4cA^2 = 4I_0$.

$$\text{Άρα } I_A = 4I_0$$



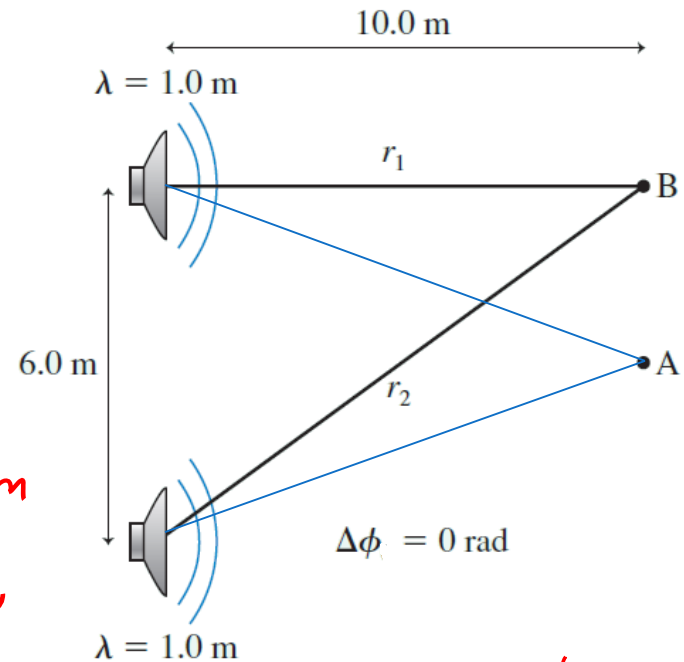
Υπέρθεση

ο Παράδειγμα – Λύση:

↪ Για το σημείο B: $\Delta r = |r_2 - r_1|$,

$$\text{δηλαδή } \Delta r = |\sqrt{6^2 + 10^2} - 10| = \\ = |\sqrt{136} - 10| = 1.662 \text{ m}$$

Επειδή $\lambda = 1 \text{ m}$, $\frac{\Delta r}{\lambda} = 1.662$, που δεν είναι ούτε ακέραιο πολλαπλάσιο του λ , ούτε ημιπλή πολλαπλάσιο του $\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}$. Άρα θα έχουμε ένα είδος ενδιαμέσης συμβολής στο σημείο B. Θα χρησιμοποιήσουμε το $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r$, δηλ.
 $\Delta\phi = \frac{2\pi}{1} \cdot 1.662 \cong 10.44 \text{ rad}$. Άρα το πλάτος του συνολικού κύματος στο σημείο B θα είναι $A_B = |2A \cos(\frac{10.44}{2})| \cong 0.972 A$ και άρα η ένταση θα είναι $I_B = c A_B^2 \cong 0.95 I_0$.





Τέλος Διάλεξης
