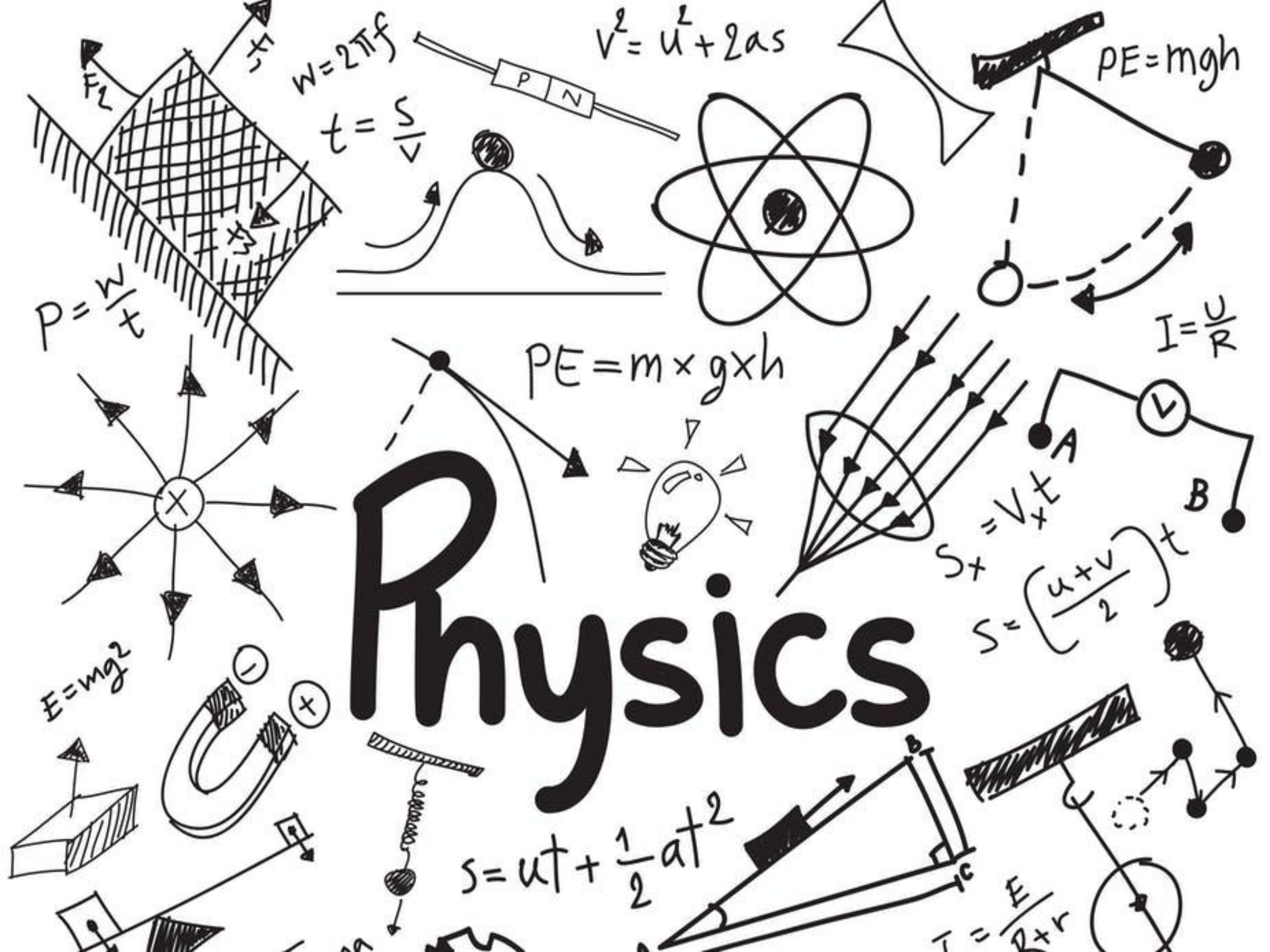


Physics
$W=2\pi f$
P
N
$v^2 = u^2 + 2as$
$PE=mgh$
F_2
F_1
F_3
$t = \frac{s}{v}$
$P = \frac{W}{t}$
$PE=m \times g \times h$
$I=\frac{U}{R}$
A
B
$S_x = V_x t$
$S = \left(\frac{u+v}{2}\right)t$
$E=mg^2$
$s=ut+\frac{1}{2}at^2$
B
C
$I = \frac{E}{R+r}$

Εικόνα: Τα σεισμικά κύματα είναι ένα είδος ανομοιογενούς ακουστικού κύματος με διάφορα μήκη κύματος. Υπάρχουν δυο είδη: Τα κύματα P (Πρωτεύοντα) και S (Δευτερεύοντα) και τα κύματα R (Rayleigh) και L (Love), που είναι και επιφανειακά κύματα. Τα επιφανειακά κύματα αποσυντίθενται πιο αργά από τα δυο πρώτα κύματα και είναι πιο καταστροφικά λόγω της χαμηλής συχνότητας, της μεγάλης διάρκειας και του μεγάλου πλάτους τους.

2η Ενότητα Κυματική

Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

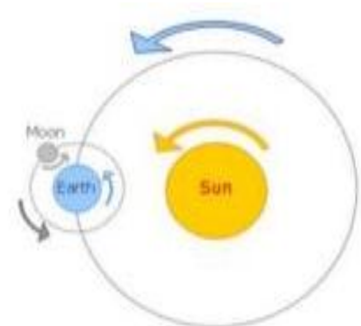
Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- **Περιοδική κίνηση: ονομάζεται η κίνηση ενός σώματος που επιστρέφει στην αρχική του θέση ανά τακτά, σταθερά χρονικά διαστήματα**

- Πολλά παραδείγματα από την καθημερινότητα
  - Δείκτες ρολογιού
  - Κίνηση Γης γύρω από Ήλιο
  - Διαλέξεις Φυσικής ☺
  - Τροχιά δορυφόρου γύρω από τη Γη



- Μαθηματικός ορισμός:

$$f(t) = f(t + T),\ T > 0, \forall\, t > 0$$

με T να ονομάζεται **περίοδος** της κίνησης

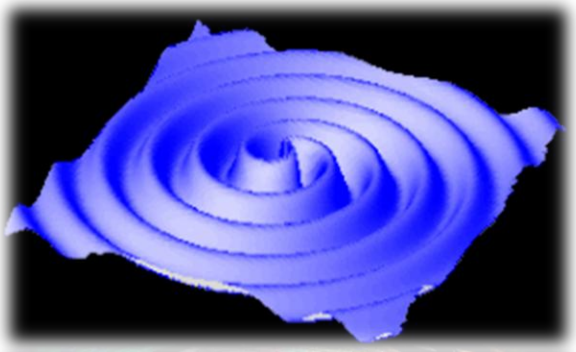
Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- Πολλά φυσικά φαινόμενα γίνονται κατανοητά μέσα από τις έννοιες των ταλαντώσεων και των κυμάτων

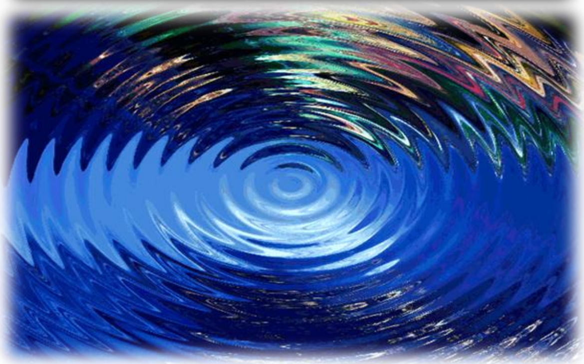
- **Παραδείγματα**:
  - Οι ουρανοξύστες και οι γέφυρες σχεδιάζονται έτσι ώστε να μπορούν να ταλαντώνονται
  - Η **ραδιοφωνία και η τηλεόραση** βασίζουν τη λειτουργία τους σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα και στον τρόπο διάδοσής τους
  - Η Φυσική στο ατομικό της επίπεδο περιέχει πληροφορία που φέρεται από κύματα
  - Ο **ήχος και η φωνή** παράγονται από κάποιου είδους ταλαντώσεις (χορδών, μεμβρανών, κλπ)

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- **Κύμα**: ονομάζεται μια διαταραχή που μεταδίδεται στο χώρο και το χρόνο
  - Τα κύματα είναι **περιοδικά** φαινόμενα
  - Αυτό που επαναλαμβάνεται είναι η διαταραχή



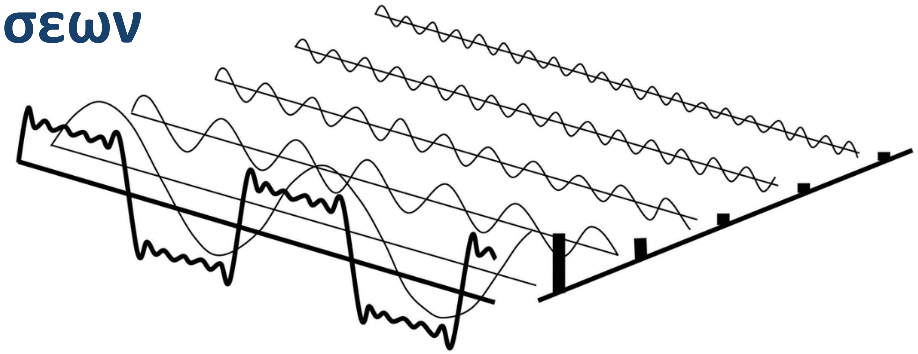
- Ο όρος «κύμα» χαρακτηρίζει τη μεταφορά της διαταραχής συνήθως διαμέσου ενός μέσου
  - Π.χ. μόρια νερού, στοιχεία νήματος, μόρια αέρα



- **Μηχανικό κύμα**: κύμα που απαιτεί κάποιο μέσο για τη διάδοσή του

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- Όλες (σχεδόν) οι περιοδικές κινήσεις (και άρα και τα κύματα) μπορούν να μοντελοποιηθούν ως άθροισμα **απλών αρμονικών κινήσεων**



- **Απλή αρμονική κίνηση**: περιοδική κίνηση που συμβαίνει συχνά σε μηχανικά συστήματα, όταν η **δύναμη** που ασκείται στο σύστημα είναι
(α) **ανάλογη της θέσης του συστήματος**, σε σχέση με μια θέση ισορροπίας, και
(β) με κατεύθυνση <u>**προς**</u> **τη θέση ισορροπίας**

Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

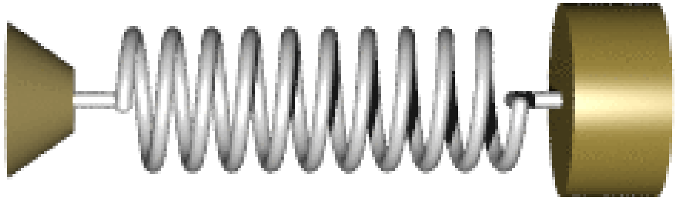
Φυσική για Μηχανικούς

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

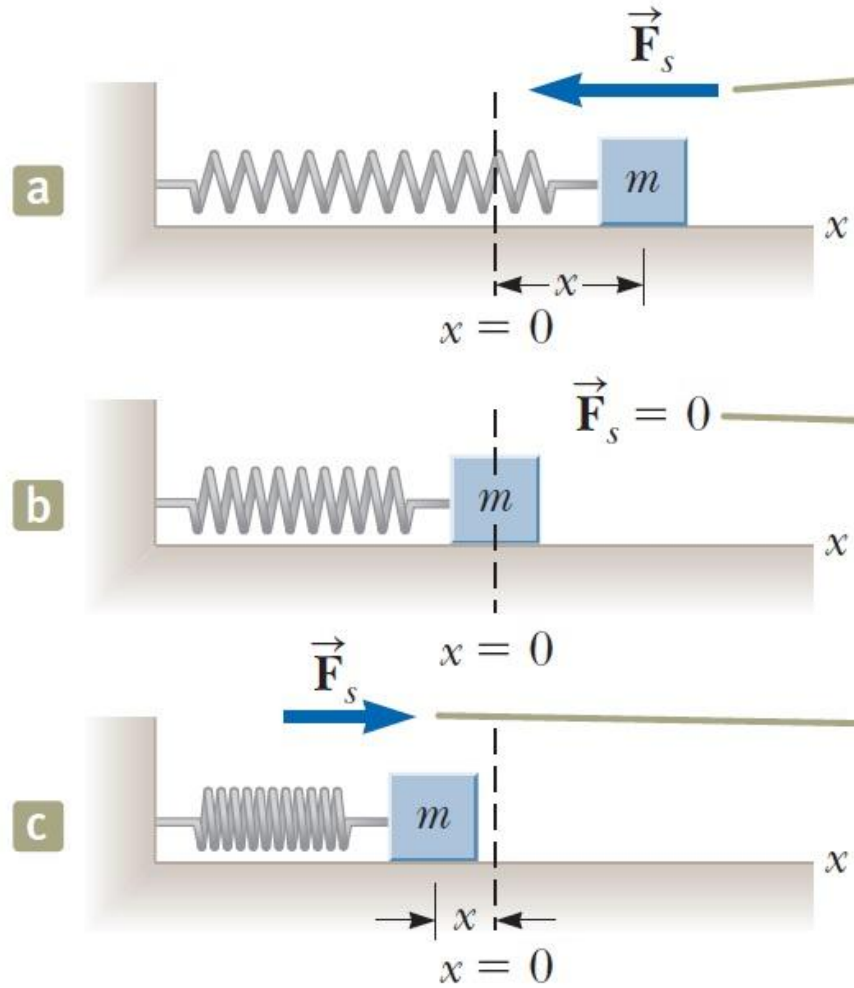
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **<u>Ορισμός:</u> Όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σύστημα (α) εξαρτάται από τη μετατόπιση του συστήματος από μια θέση ισορροπίας και (β) έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του συστήματος, η κίνηση που πραγματοποιεί το σύστημα λέγεται Απλή Αρμονική Κίνηση / Ταλάντωση**
  - Γνωρίζετε ήδη μια τέτοια κίνηση (ποια;) ☺



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

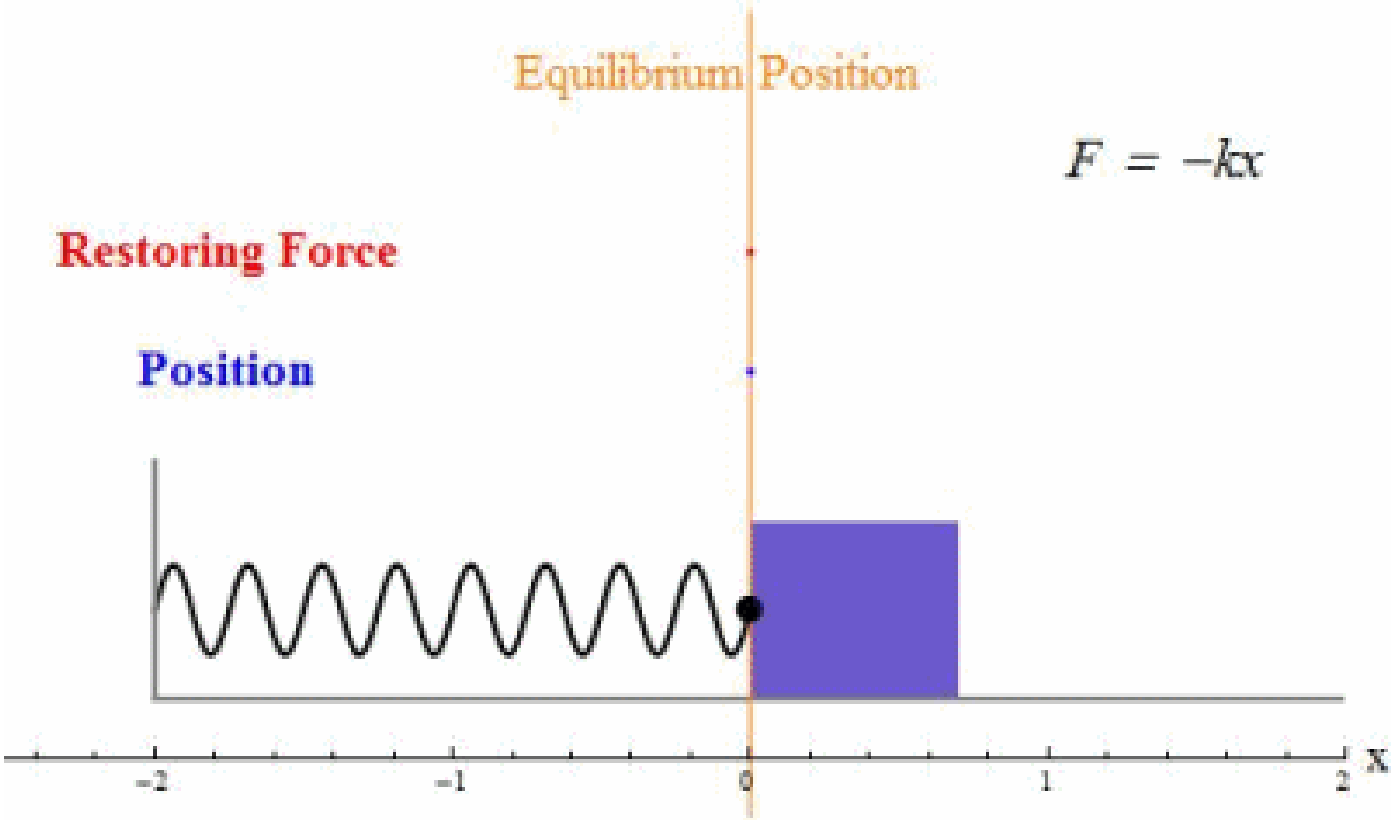


Όταν το σώμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο στο σώμα δρα με κατεύθυνση προς τα αριστερά.

Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο είναι μηδενική.

Όταν το σώμα μετατοπίζεται προς τα αριστερά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο δρα με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

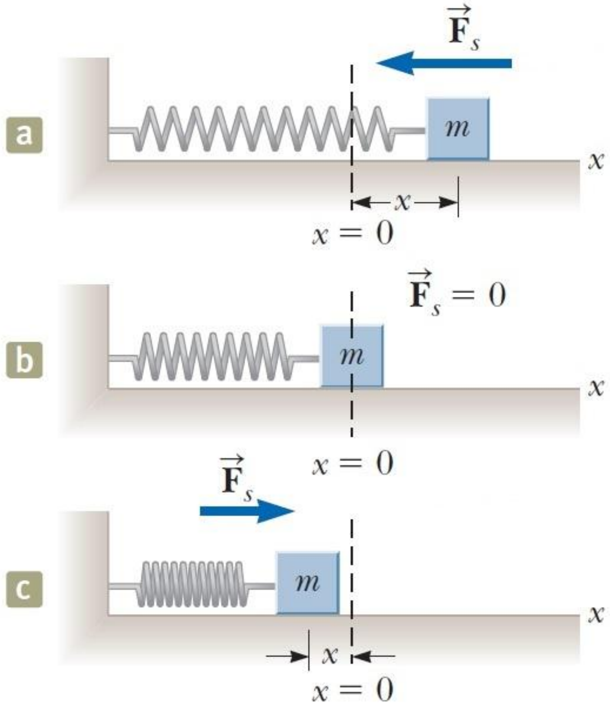


Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Μοντελοποίηση: σώμα υπό επίδραση δύναμης

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow F_s = -kx = ma_x \Leftrightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

- **Η επιτάχυνση είναι ανάλογη της θέσης (μετατόπισης από θέση ισορροπίας)**
- **Η κατεύθυνσή της είναι αντίθετη της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας**

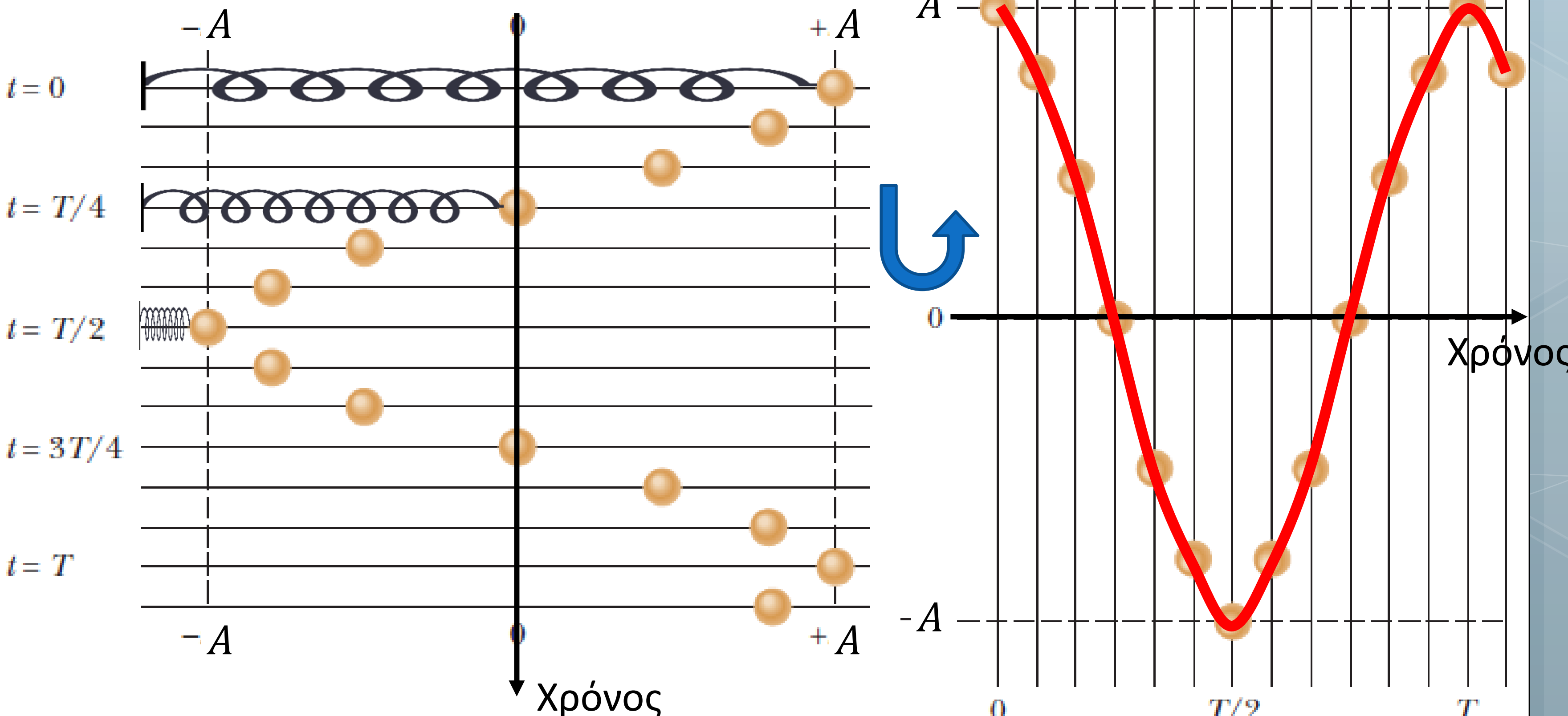


Απλή Αρμονική Κίνηση

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ένα σώμα ταλαντώνεται δεξιά κι αριστερά ακολουθώντας απλή αρμονική ταλάντωση.

Αν "στρέψουμε" την κίνηση κατακόρυφα, παρατηρούμε οτι σχηματίζεται ένα συνημίτονο!



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Εξισώσεις απλής αρμονικής ταλάντωσης**

$$a_x = -\frac{k}{m}x \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

- Αν θέσουμε $\omega^2 = \frac{k}{m}$, τότε έχουμε

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

Διαφορική εξίσωση

- Λύση διαφορικής εξίσωσης

Φάση

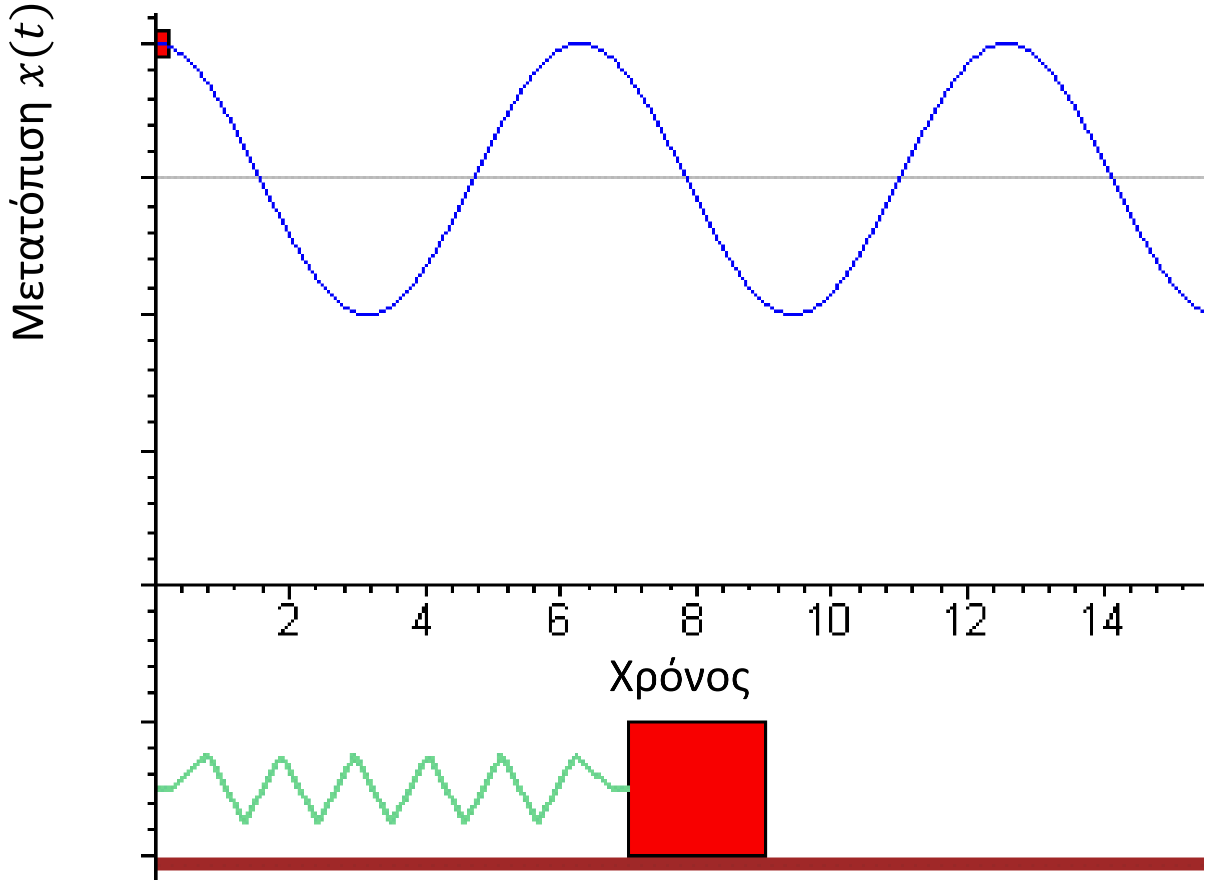
Φάση μετατόπισης ή αρχική φάση

$$x(t) = A\cos(\overbrace{\omega t + \varphi}^{\text{Φάση}})$$

Πλάτος ταλάντωσης

Συχνότητα ταλάντωσης

Απλή Αρμονική Ταλάντωση



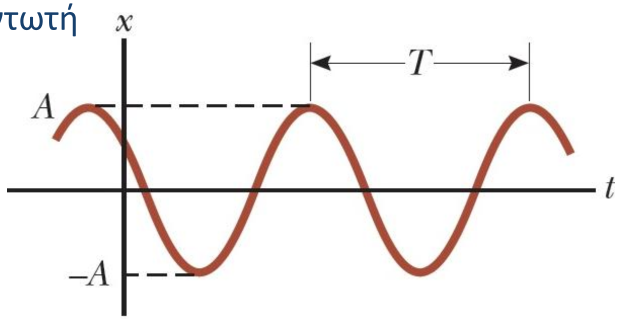
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Αφορούν μόνο σύστημα ελατηρίου-σώματος

- **Γωνιακή Συχνότητα ταλάντωσης**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

  - Μετριέται σε rad/s
  - Ορίζει πόσο γρήγορα ταλαντώνεται το σύστημα του ταλαντωτή



- **Περίοδος**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

  - Χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη ταλάντωση

- **Συχνότητα (σε Hertz)**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

  - Δηλώνει το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελούνται στη μονάδα του χρόνου

- **Σχέση με γωνιακή συχνότητα**

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

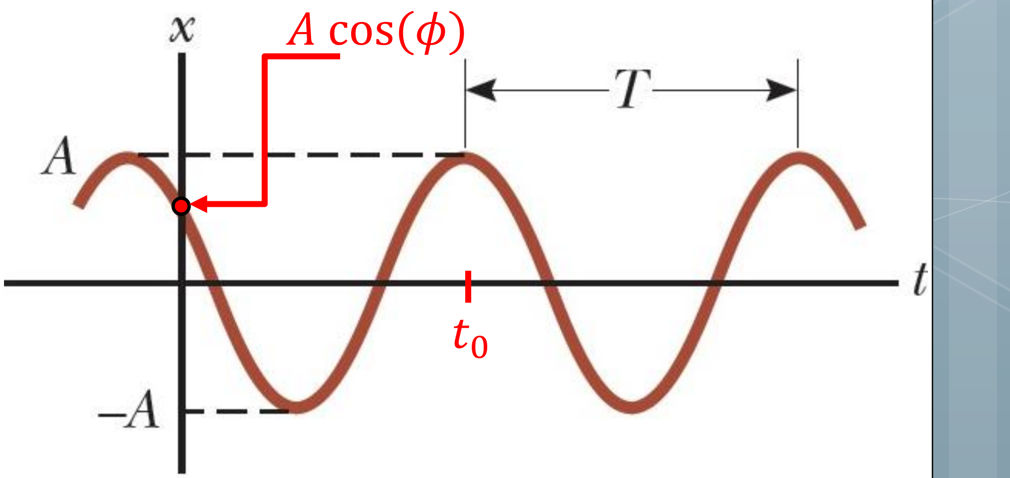
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- **Σταθερά αρχικής φάσης φ**
- Ορίζει την τιμή του συνημιτόνου τη στιγμή $t = 0$
  - Χωρίς αρχική φάση: $t = 0 \Rightarrow x(0) = A\cos(0) = A$
  - Με αρχική φάση: $t = 0 \Rightarrow x(0) = A\cos(\varphi)$
- Εναλλακτικά,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = A\cos\left(\omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right) = A\cos(\omega(t - t_0))$$

με $t_0 = -\phi/\omega$

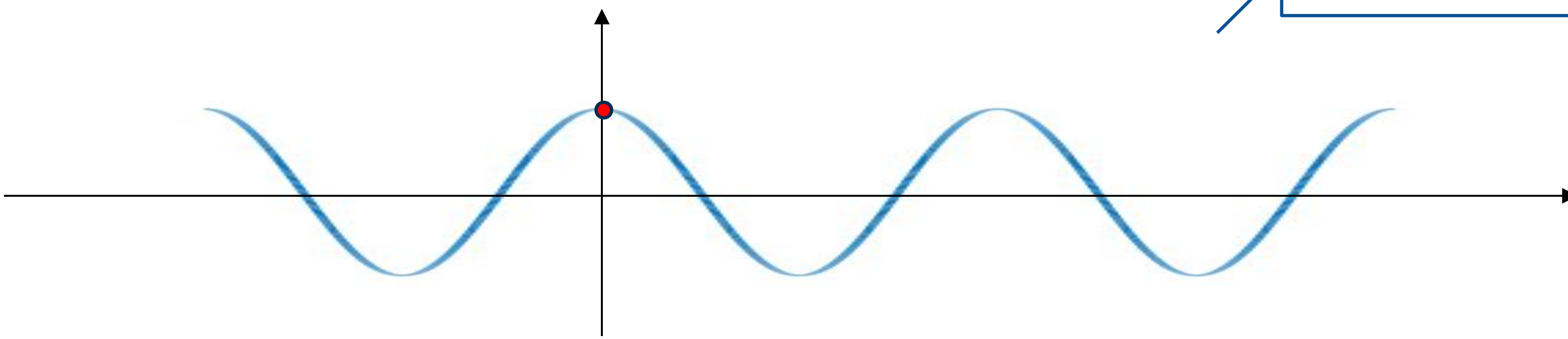
- Ορίζει τη θέση του σώματος όταν ξεκινάμε να μελετάμε την ταλάντωση



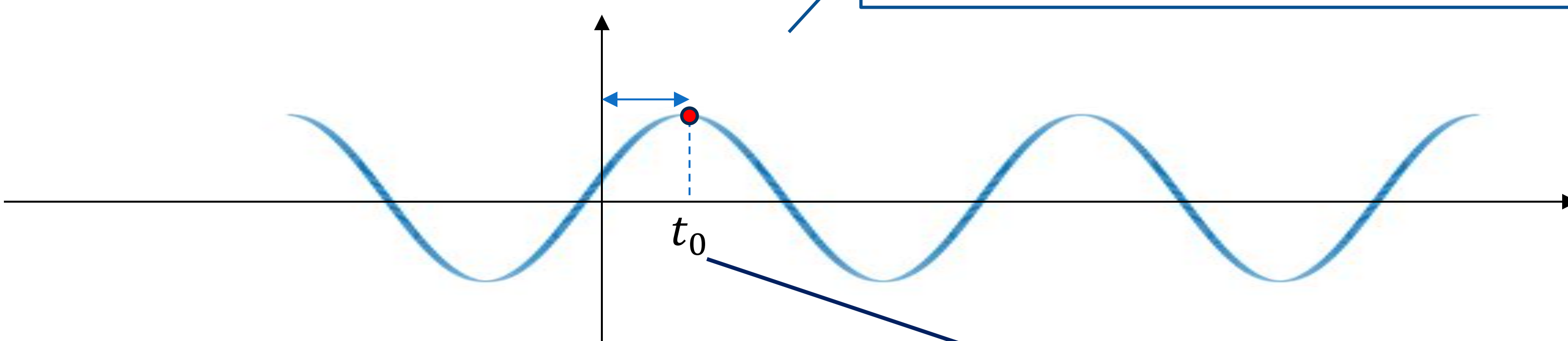
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Σταθερά αρχικής φάσης φ**

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$



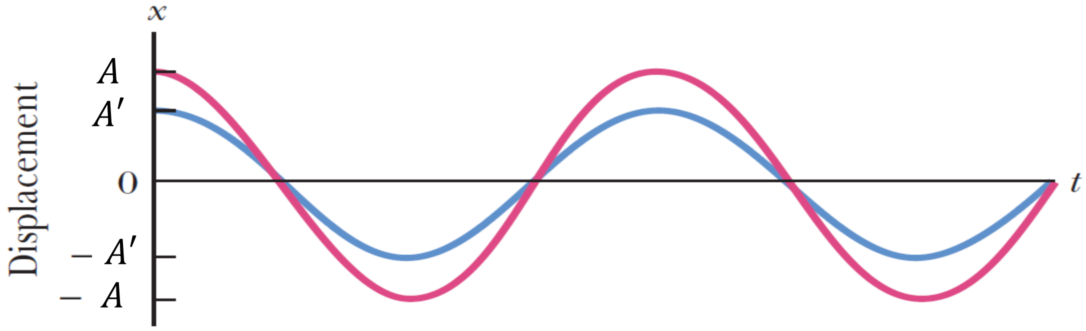
$$x(t) = A\cos(\omega(t - t_0)) = A\cos(\omega t + \phi)$$



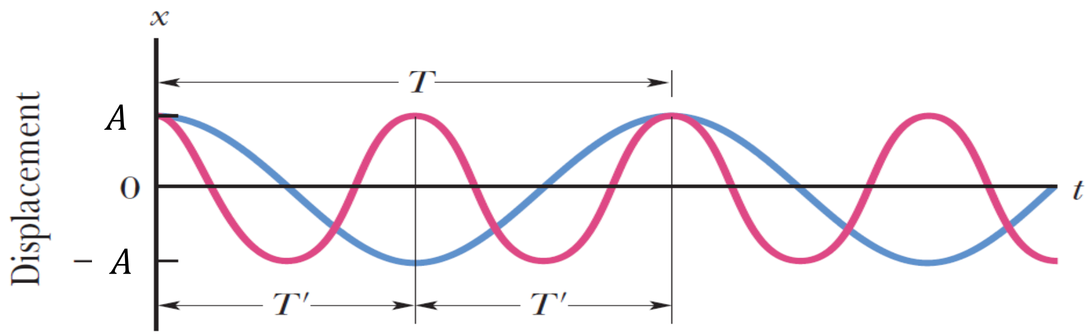
$$t_0 = -\phi/\omega$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

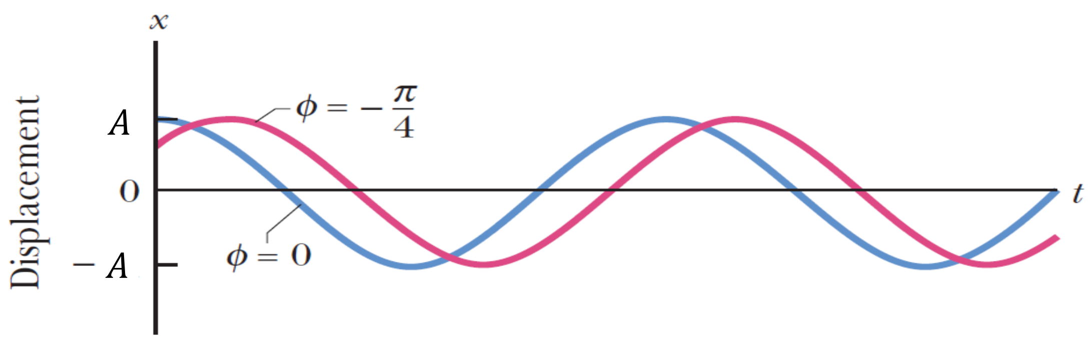
Quiz:
Ποια/ες από τις παραμέτρους της ταλάντωσης A, ω, ϕ μένουν ίδιες σε κάθε ζεύγος?



Ίδια φ, ω
Διαφορετικό Α



Ίδια Α, φ
Διαφορετικό ω



Ίδια Α, ω
Διαφορετικό φ

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Αφορούν μόνο σύστημα ελατηρίου-σώματος

- **Στιγμιαία ταχύτητα & επιτάχυνση** απλής αρμονικής κίνησης

$$u = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = u(t)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = a(t)$$

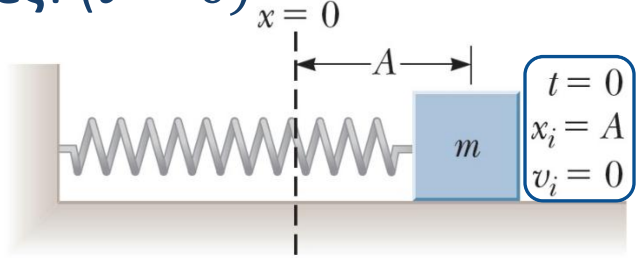
- Μέγιστες τιμές

$$u_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A \qquad a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

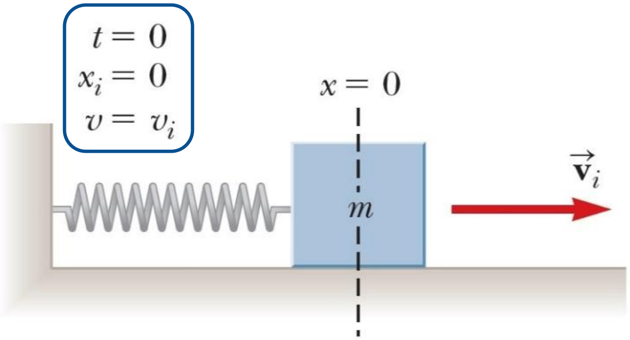
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$u(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

- **Πώς βρίσκουμε τις σταθερές A, φ, ω, της ταλάντωσης;**
  - Συχνότητα ω: εξαρτάται από k, m
  - Πλάτος, αρχ. φάση: **αρχικές συνθήκες**! ($t = 0$)
  - **Παράδειγμα 1**:
    - $x(0) = A\cos(\varphi) = A$,
    - $u(0) = -\omega A\sin(\varphi) = 0$
      - Δίνουν $\varphi = 0$



$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

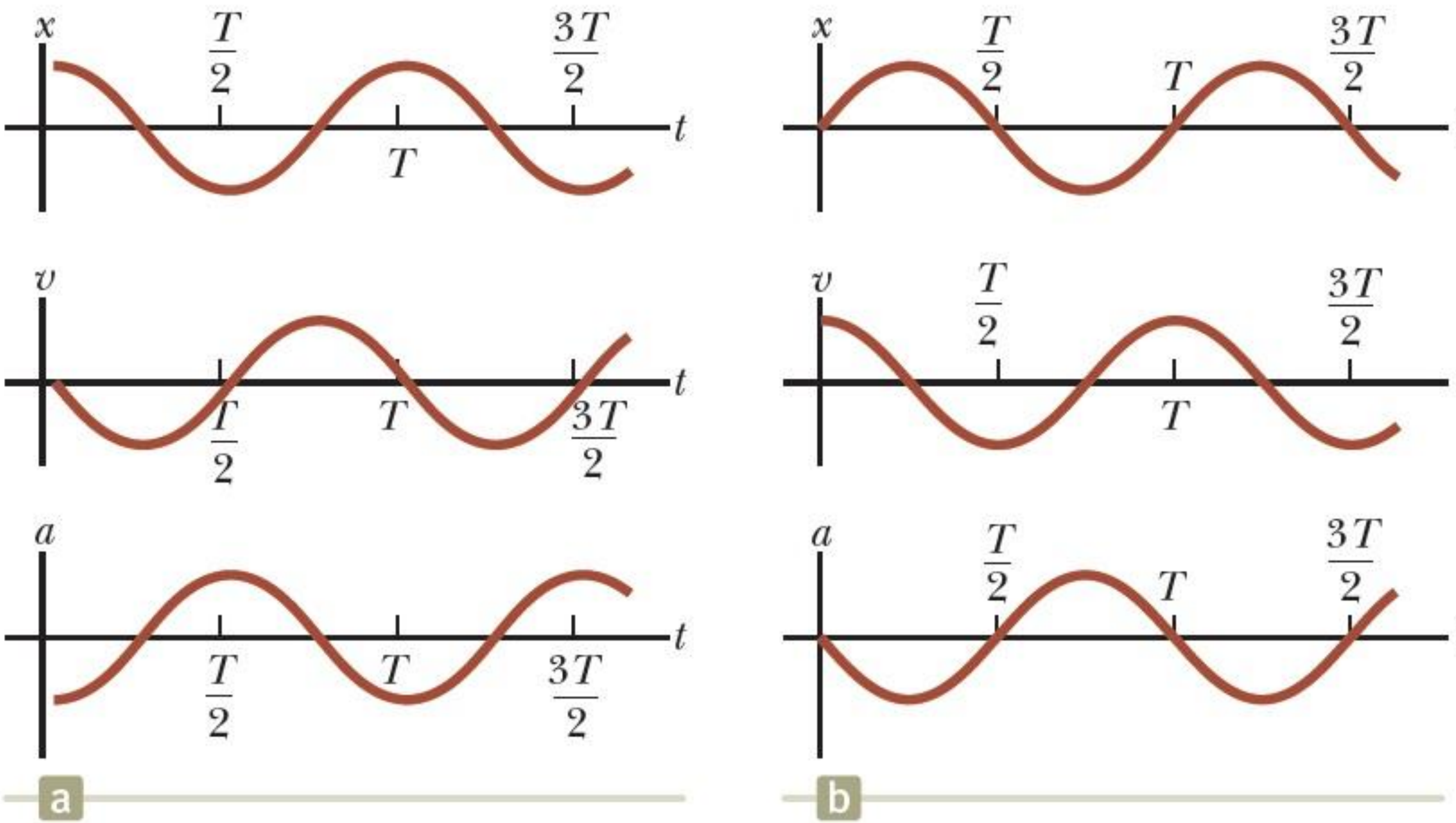
  - **Παράδειγμα 2**:
    - $x(0) = A\cos(\varphi) = 0$, $\to \pi/2$, $-\pi/2$
    - $u(0) = -\omega A\sin(\varphi) = u_i$
      - Δίνουν $\varphi = -{}^{\pi}/_{2}$



$$\boxed{\text{Για } \varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{u_i}{\omega}}$$

$$x(t) = \frac{u_i}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{u_i}{\omega}\sin(\omega t)$$

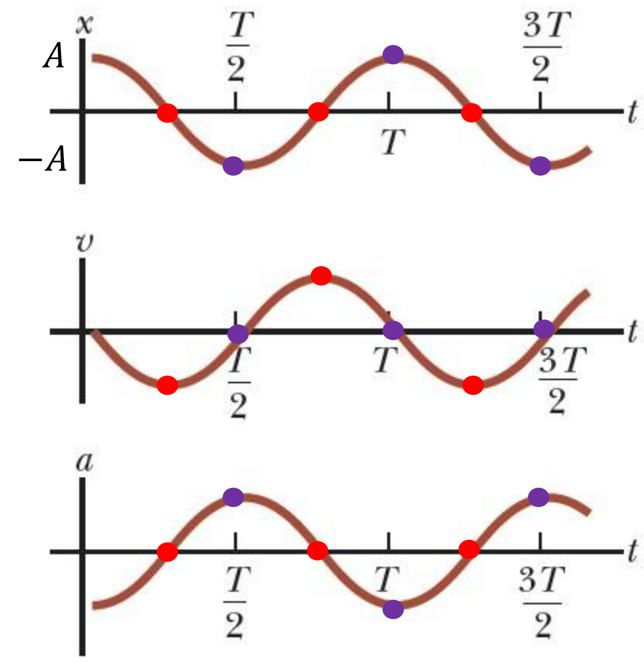
Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση για **(a)** $\boldsymbol{t=0, x(0)=A, u(0)=0}$ και **(b)** $\boldsymbol{t=0, x(0)=0, u(0)=u_i}$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Παρατηρήστε ότι:
- Η **μέγιστη** (κατ' απόλυτη τιμή) **ταχύτητα** συμβαίνει όταν $x = 0$
  - Δηλ. όταν το σύστημα βρίσκεται στη **θέση ισορροπίας** του!
  - …όπου η επιτάχυνση είναι μηδενική!
- Η **μέγιστη** (κατ' απόλυτη τιμή) **επιτάχυνση** συμβαίνει όταν $x = \pm A$
  - Δηλ. όταν το σύστημα βρίσκεται στη **μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή) απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του**!
  - …όπου η ταχύτητα είναι μηδενική!



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

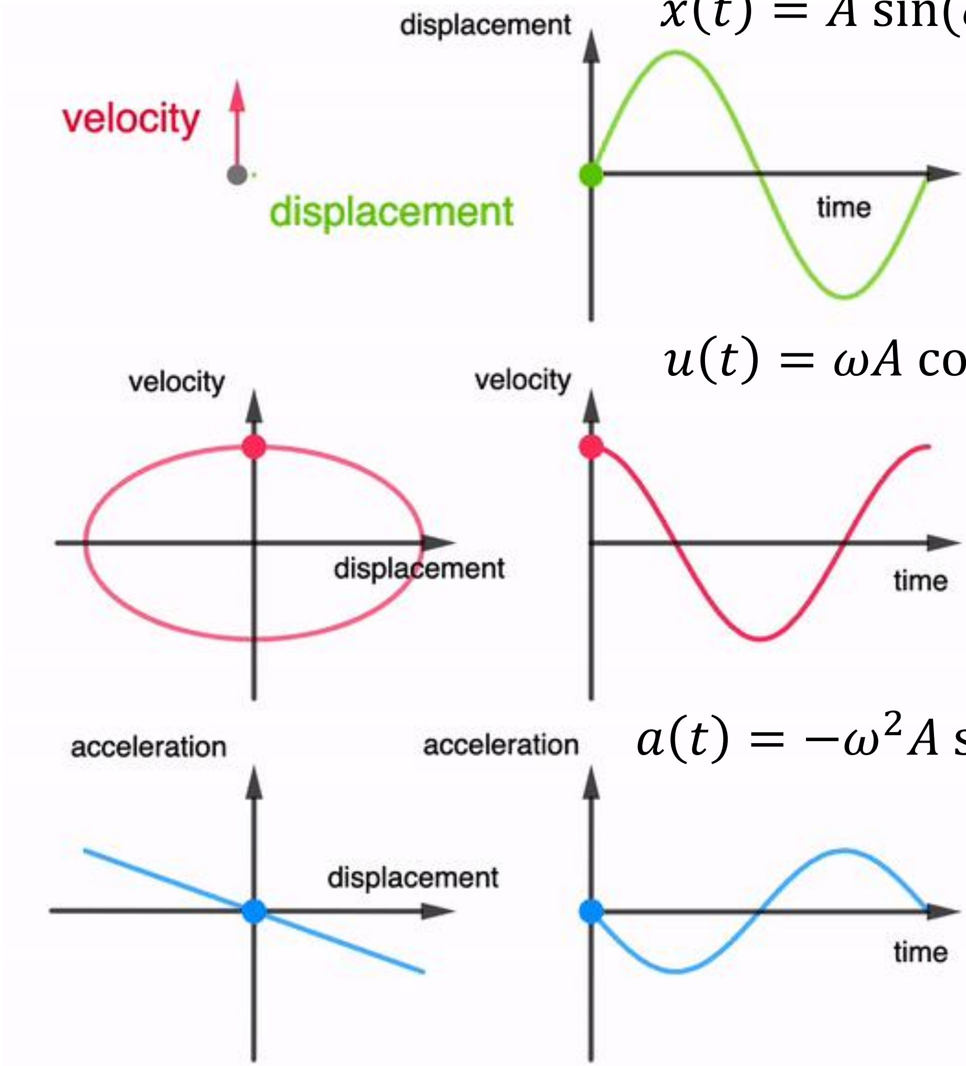
$$x(t) = A\sin(\omega t)$$

$$u(t) = \omega A\cos(\omega t)$$

$$u(x) = \pm\omega\sqrt{A^2 - x(t)}$$

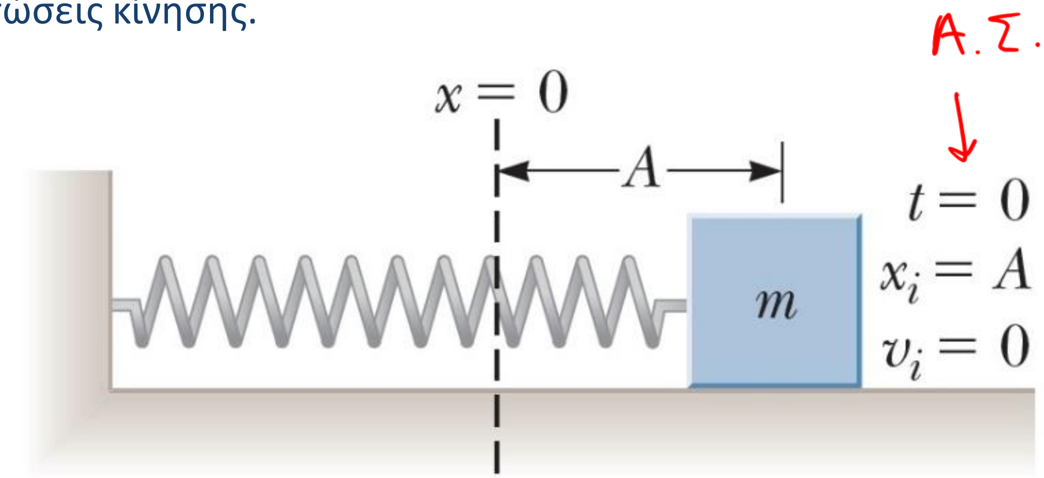
$$a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t)$$

$$a(x) = -\omega^2 x(t)$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
    - Α) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
    - Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
    - Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.
    - Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

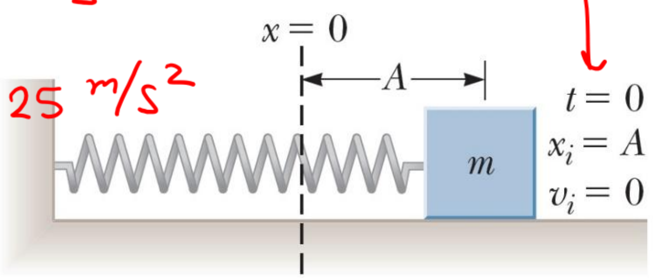
- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
    - A) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
    - B) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
    - Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.

A) $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5}{0.2}} = 5\ \frac{rad}{s}$ και άρα $T = \frac{2\pi}{5}$ sec.

B) Είναι $u_{max} = \omega A = 5 \cdot 0.05 = 0.25\ \frac{m}{s}$

A.Σ.

Γ) Είναι $a_{max} = \omega^2 A = 25 \cdot 0.05 = 1.25\ m/s^2$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
    - Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.

Θέτω $t=0$ στις εξισώσεις, $x(t)\big|_{t=0} = x(0) = A\cos(\varphi) \overset{\text{Α.Σ.}}{=} A \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = 0}$.

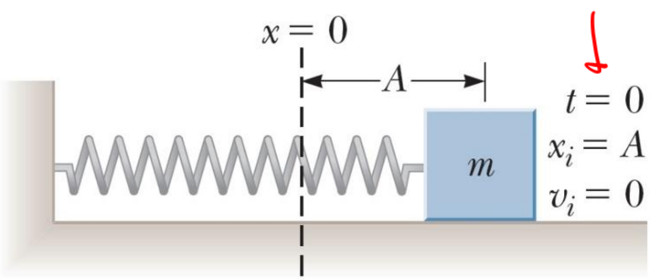
Άρα οι εξισώσεις κίνησης θα είναι

$x(t) = 0.05\cos(5t)$

$u(t) = -0.25\sin(5t)$

$a(t) = -1.25\cos(5t)$

Α.Σ.

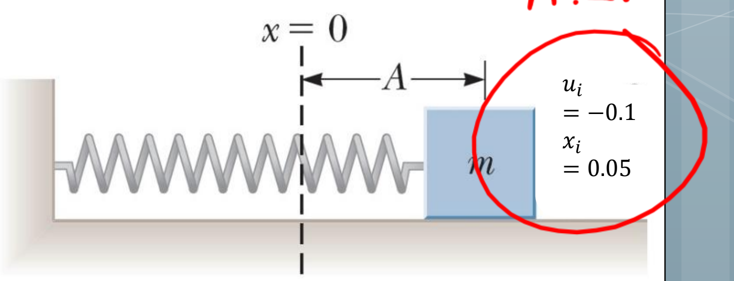


Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και του δίνεται μια **αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{u_i = -0.1}$ m/s**
    - Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

Η διαίσθησή μας λέει ότι το πλάτος ταλάντωσης <u>δε</u> θα είναι πλέον $A = 0.05$ m αλλά μεγαλύτερο, αφού το σώμα λαμβάνει αρχική ταχύτητα και <u>δεν</u> αφήνεται απλά να ταλαντωθεί από την αρχική του θέση.

Α.Σ.



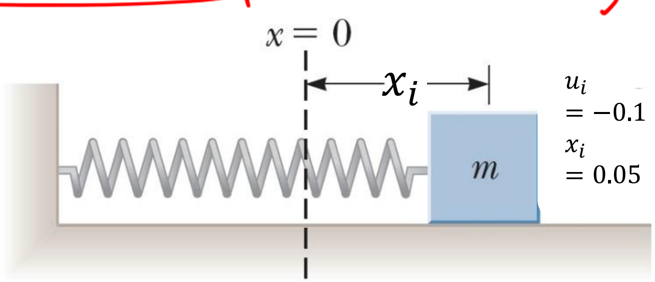
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και του δίνεται μια **αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1$ m/s**
    - Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

Α) Είναι $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5\ \frac{rad}{s}$, $T = \frac{2\pi}{5}$ s

Β) Είναι $u_{max} = \omega A' = ?$ (δε γνωρίζουμε το νέο πλάτος A')

Γ) Είναι $a_{max} = \omega^2 A' = ?$ (—— " ——)



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και του δίνεται μια **αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{u_i = -0.1}$ m/s**
    - Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

Θα έχαμε $x(t) = A'\cos(\omega t + \varphi)$. Θέταμε $t=0$, $x(0) =$

$= A'\cos(0+\varphi) = A'\cos(\varphi) \overset{A.Σ.}{=\!=} 0.05$ (1)

Θέταμε $t=0$, $u(0) = -5A'\sin(0+\varphi) = -5A'\sin(\varphi) \overset{A.Σ.}{=\!=}$

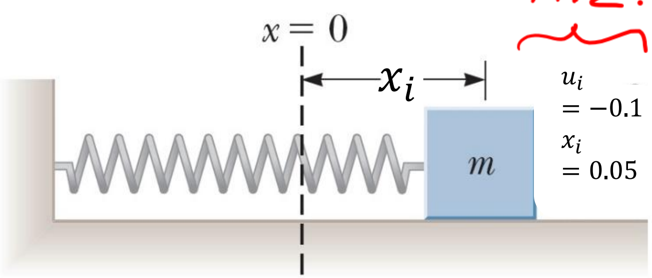
$= -0.1 \Leftrightarrow 5A'\sin(\varphi) = 0.1$ (2)

A.Σ.

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1),(2):

$5\tan(\varphi) = 2 \Rightarrow \tan(\varphi) = \frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\varphi \simeq 0.12\pi.}$ (3)



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και του δίνεται μια **αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{u_i = -0.1}$ m/s**
    - Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

Η ① $\xrightarrow{③}$ $A' \cos(0.12\pi) = 0.05 \Rightarrow A' \cong 0.054$ m

Άρα $(A', \omega, \varphi) = (0.054, 5, 0.12\pi)$.

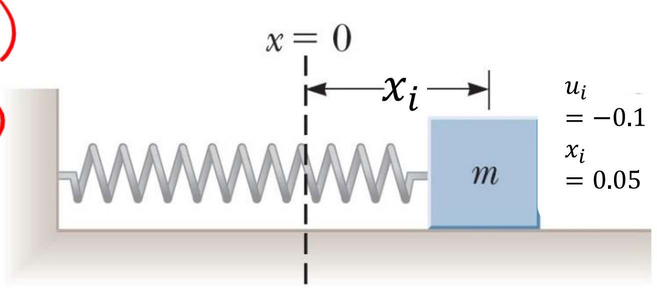
Οπότε $x(t) = 0.054 \cos(5t + 0.12\pi)$, και παραγωγίζοντας

θα έχουμε $u(t) = -0.269 \sin(5t + 0.12\pi)$

$a(t) = -1.35 \cos(5t + 0.12\pi)$

Πίσω στα Β, Γ) έχουμε ότι

$u_{max} = 0.269 \frac{m}{s}$ και $a_{max} = 1.35 \frac{m}{s^2}$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$u(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

- **Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή**
  - **Κινητική Ενέργεια:**

$$K = \frac{1}{2}m\boldsymbol{u}^2 = \frac{1}{2}m\overset{\frac{k}{m}}{\omega^2}A^2\sin^2(\omega t + \varphi) \rightarrow \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

  - **Ελαστική Δυναμική Ενέργεια:**

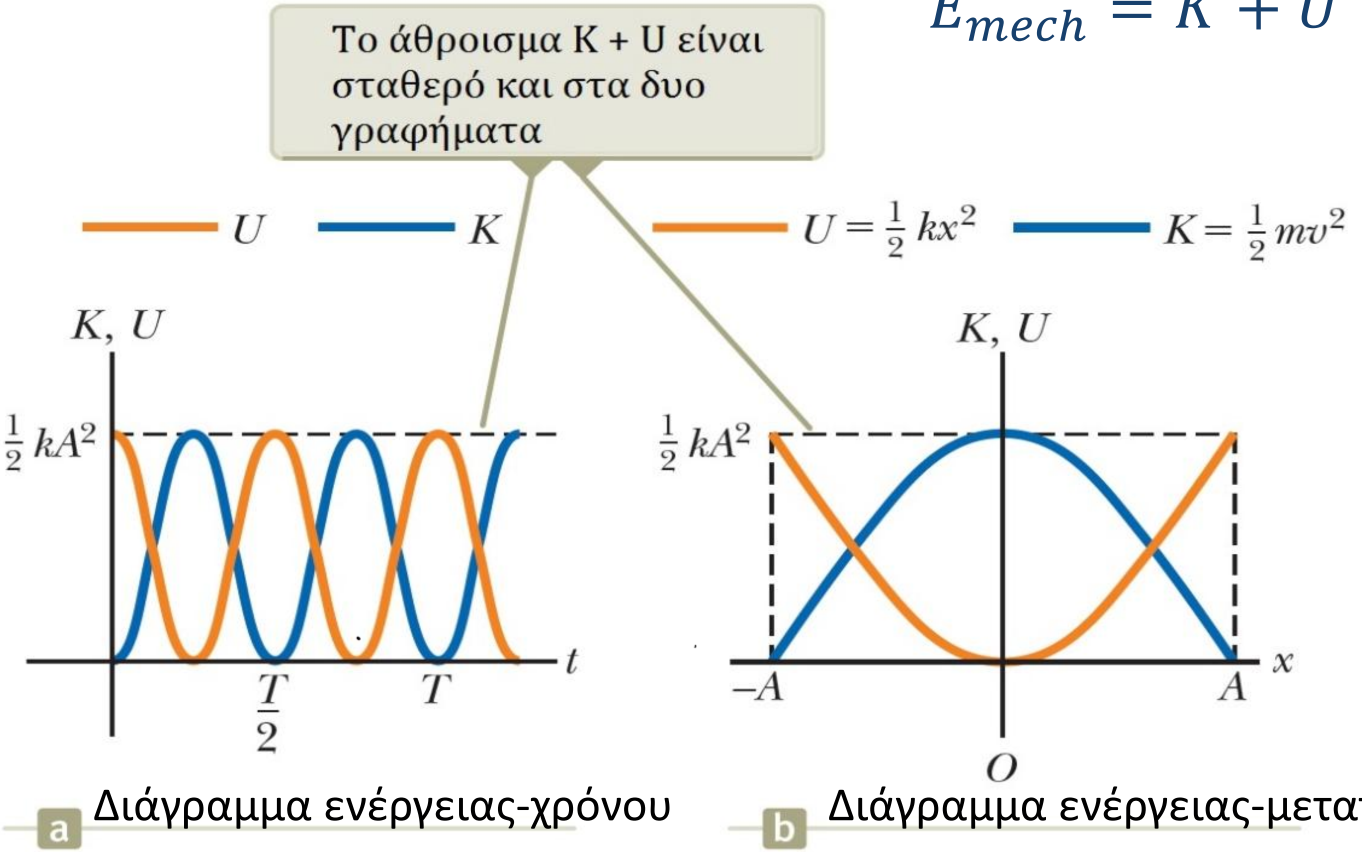
$$U = \frac{1}{2}k\boldsymbol{x}^2 = \frac{1}{2}k\,A^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

- Το σύστημα του ταλαντωτή {ελατήριο, σώμα} είναι απομονωμένο
- Η δύναμη του ελατηρίου είναι εσωτερική & **συντηρητική**!!

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή**
  - Μηχανική Ενέργεια $K + U$ σταθερή – **ΑΔΜΕ**

$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$



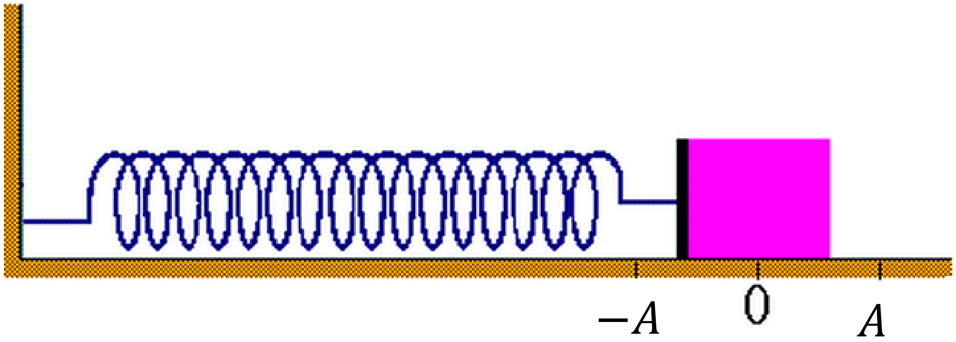
Διάγραμμα ενέργειας-χρόνου

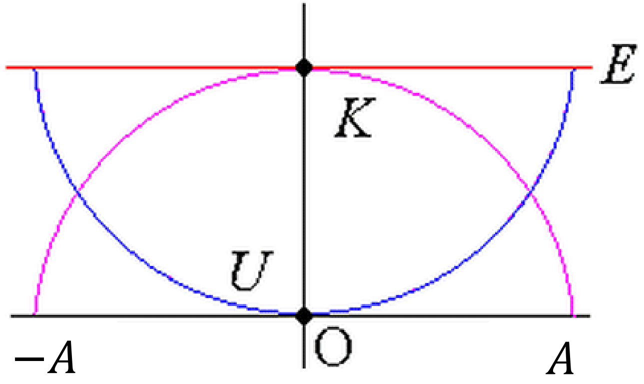
Διάγραμμα ενέργειας-μετατόπισης

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

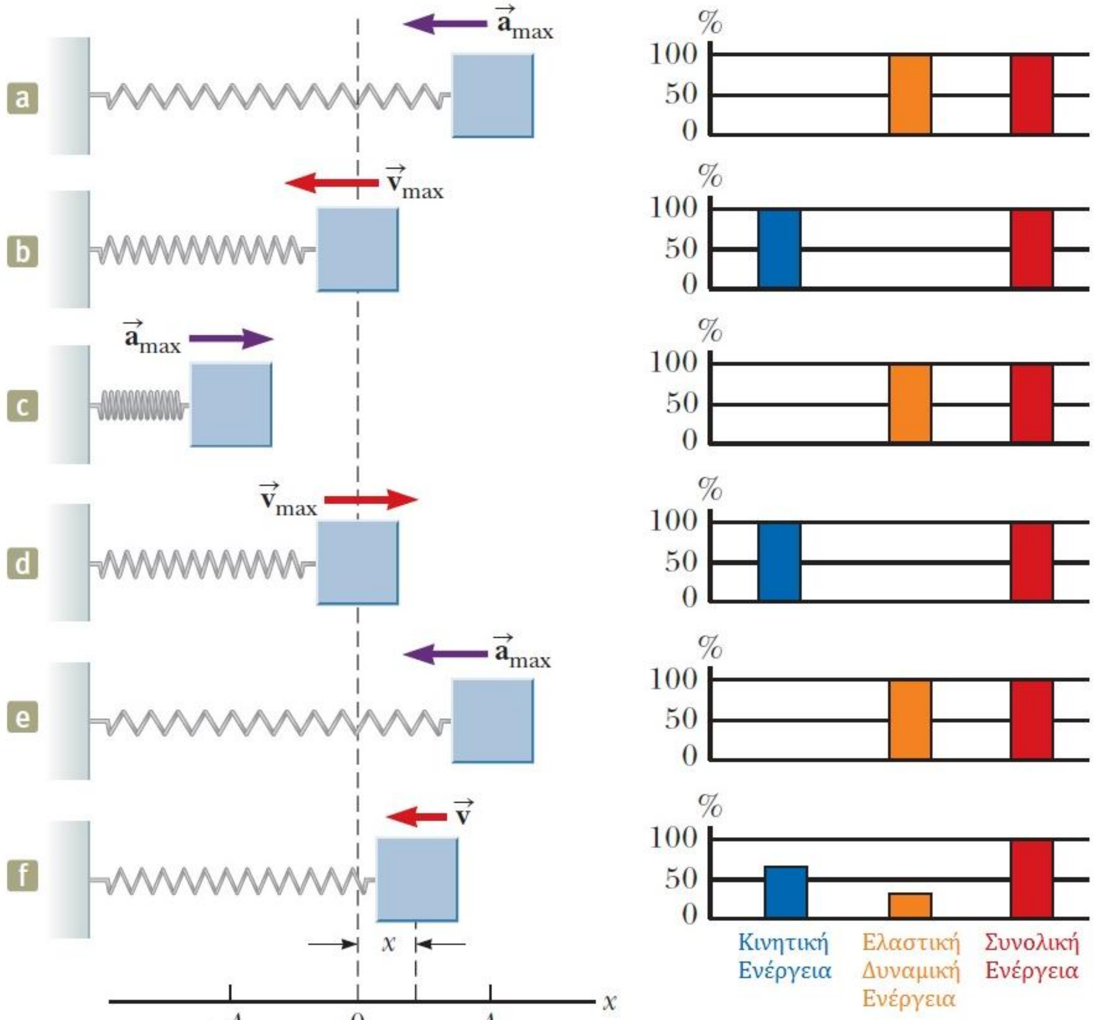
- **Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή**
  - Μηχανική Ενέργεια $K + U$

$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$





Απλή Αρμονική Ταλάντωση

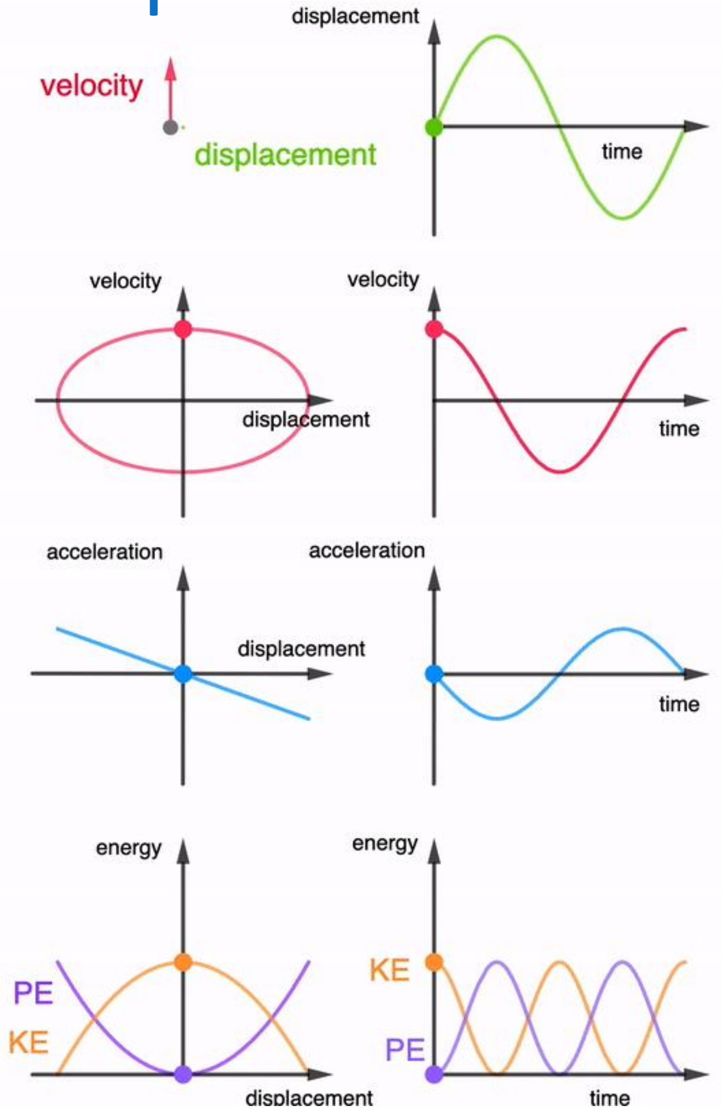


t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

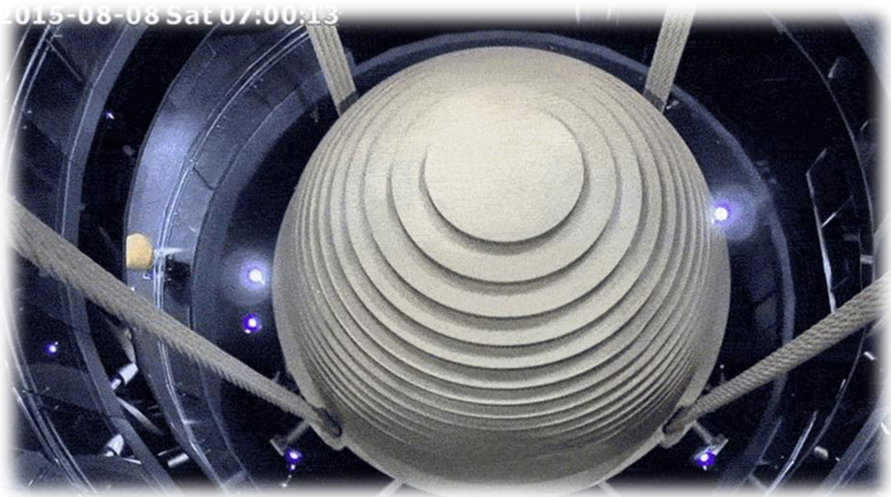
- **Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή**

$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα:**
- Πολλά ψηλά κτήρια έχουν αποσβεστήρες μάζας, οι οποίοι είναι συσκευές που εμποδίζουν το κτήριο να ταλαντωθεί ισχυρά από τη δύναμη του ανέμου. Έστω ότι η συσκευή έχει μάζα $m = 2.72\ x\ 10^5$ kg και έχει σχεδιαστεί να ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10.0\ \mathrm{Hz}$, με πλάτος $A = 0.2$ m.
  - Α) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
  - Β) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Συσκευή μάζας $m = 2.72\ x\ 10^5$ kg, ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10$ Hz, με πλάτος $A = 0.2$ m.
    - Α) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
    - Β) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?

Α) Θεωρούμε ως σύστημα το {σφαίρα, ιμάντες}, απομονωμένο και διμελές. Ξέρουμε ότι $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow$

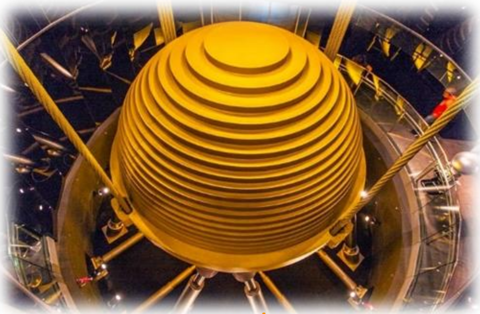
$\Rightarrow k = \omega^2 m = 4\pi^2 f^2 m = 4\pi^2 \cdot 100 \cdot 2.72 \cdot 10^5 \simeq 1.07 \cdot 10^9 \ \frac{N}{m}$.

Άρα $E_{μηχ} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.07 \cdot 10^9 \cdot (0.2)^2 \cong 2.14 \cdot 10^7$ J

Β) Στη θέση ισορροπίας, το σύστημα έχει <u>μόνο</u> κινητική ενέργεια ($U_s^{Θ.Ι.} = 0$). Άρα

$E_{Θ.Ι.} = E_{μηχ} = K_{Θ.Ι.} = \frac{1}{2} m u^2_{Θ.Ι.} = 2.14 \times 10^7$

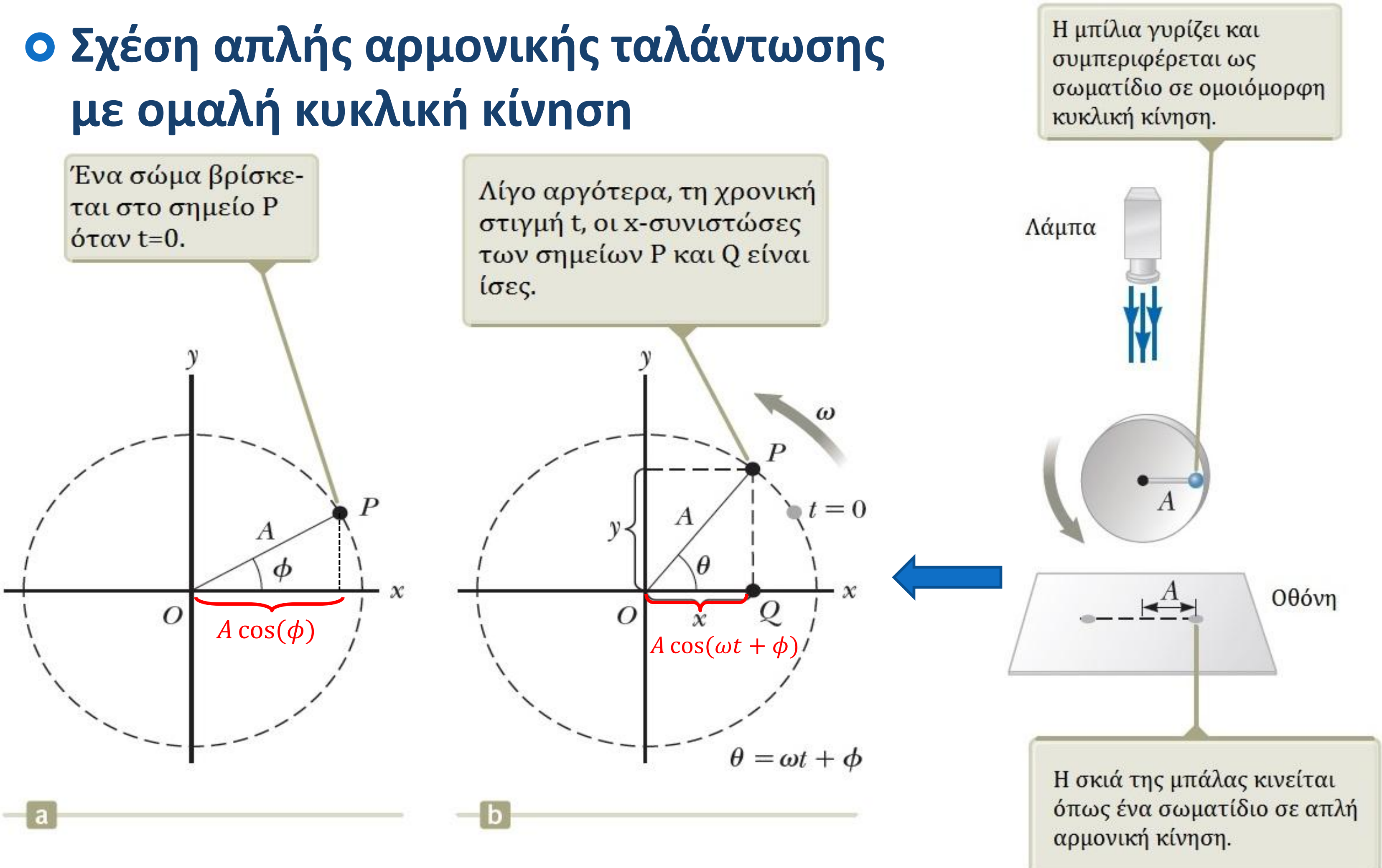
οπότε $u^2 = 2\frac{E_{μηχ}}{m} \Rightarrow u \cong 12.5 \ \frac{m}{s}$



https://www.popularmechanics.com/technology/design/a16819/tapei-101-mass-damper-record/

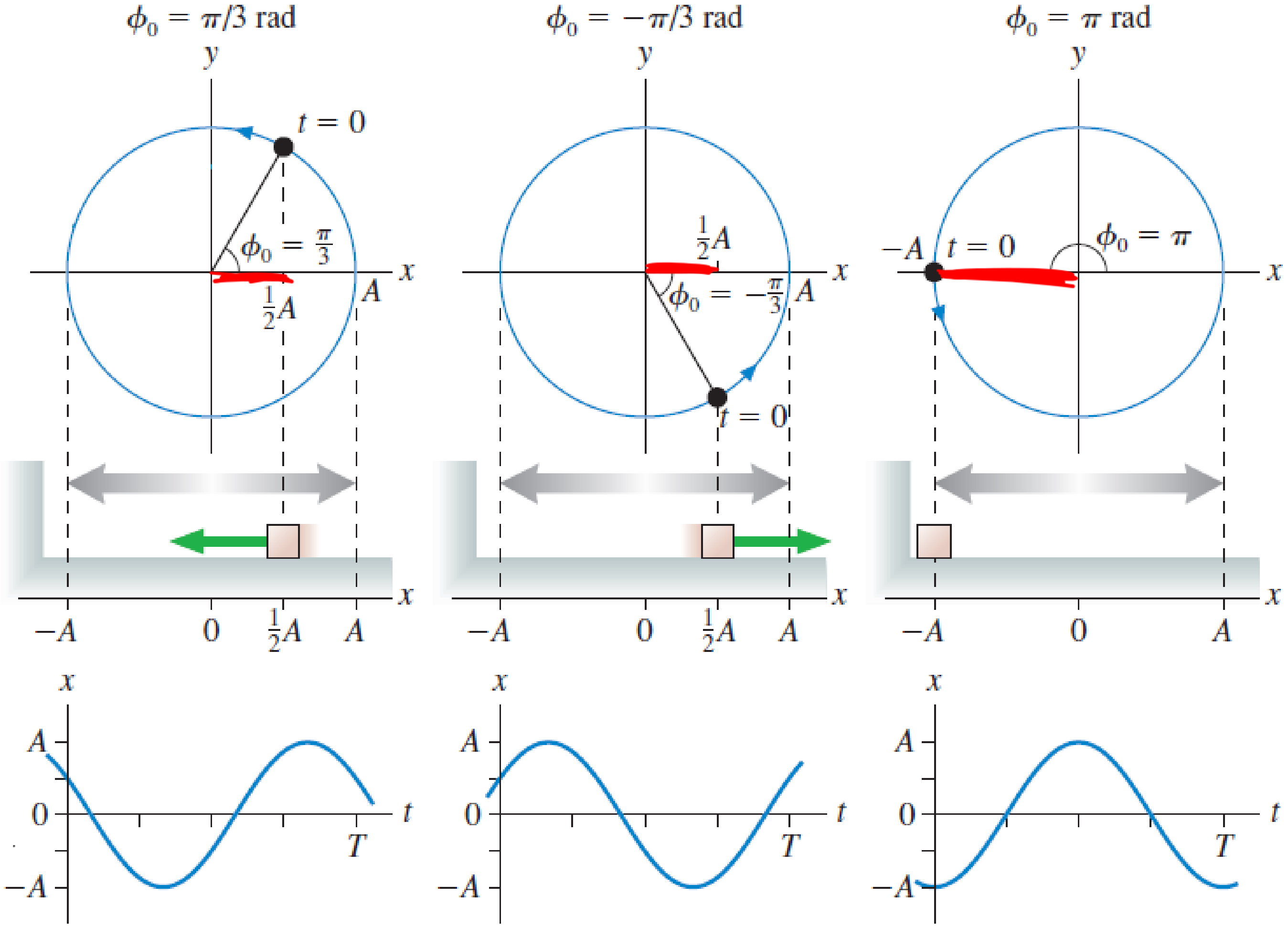
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση**



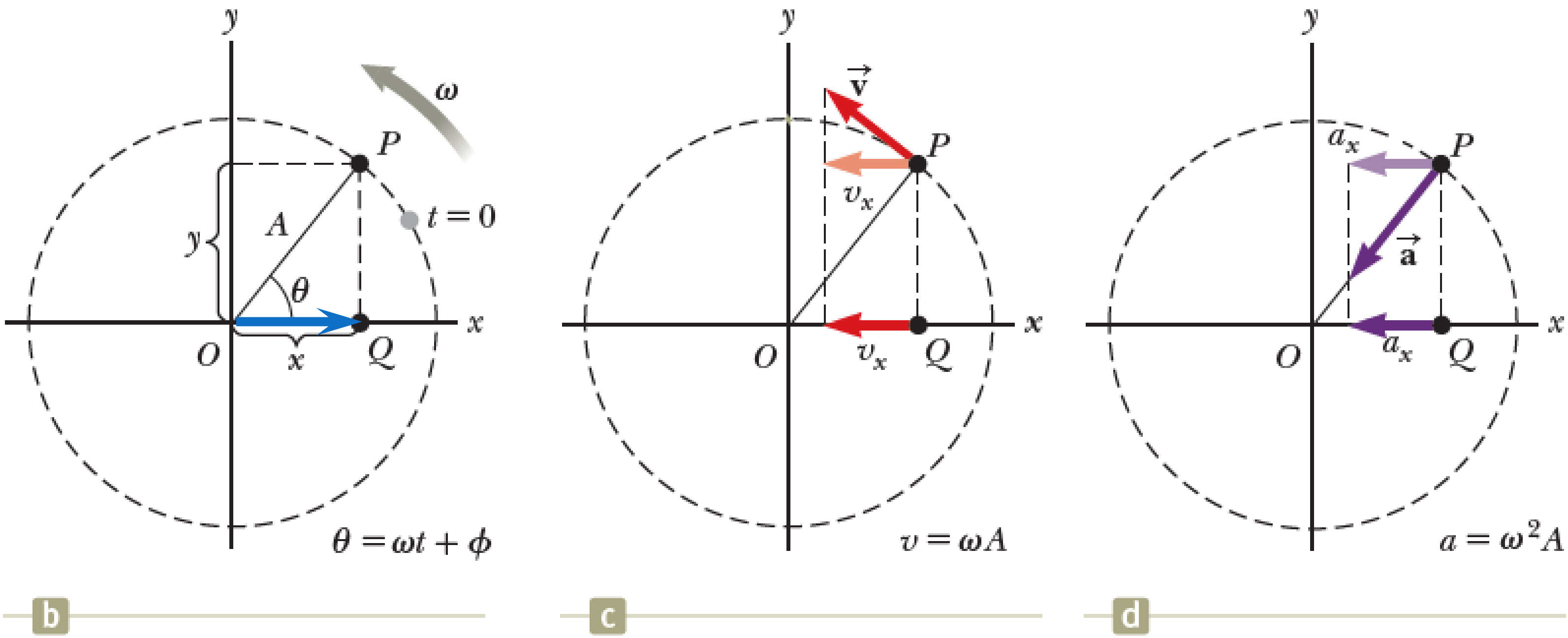
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση**



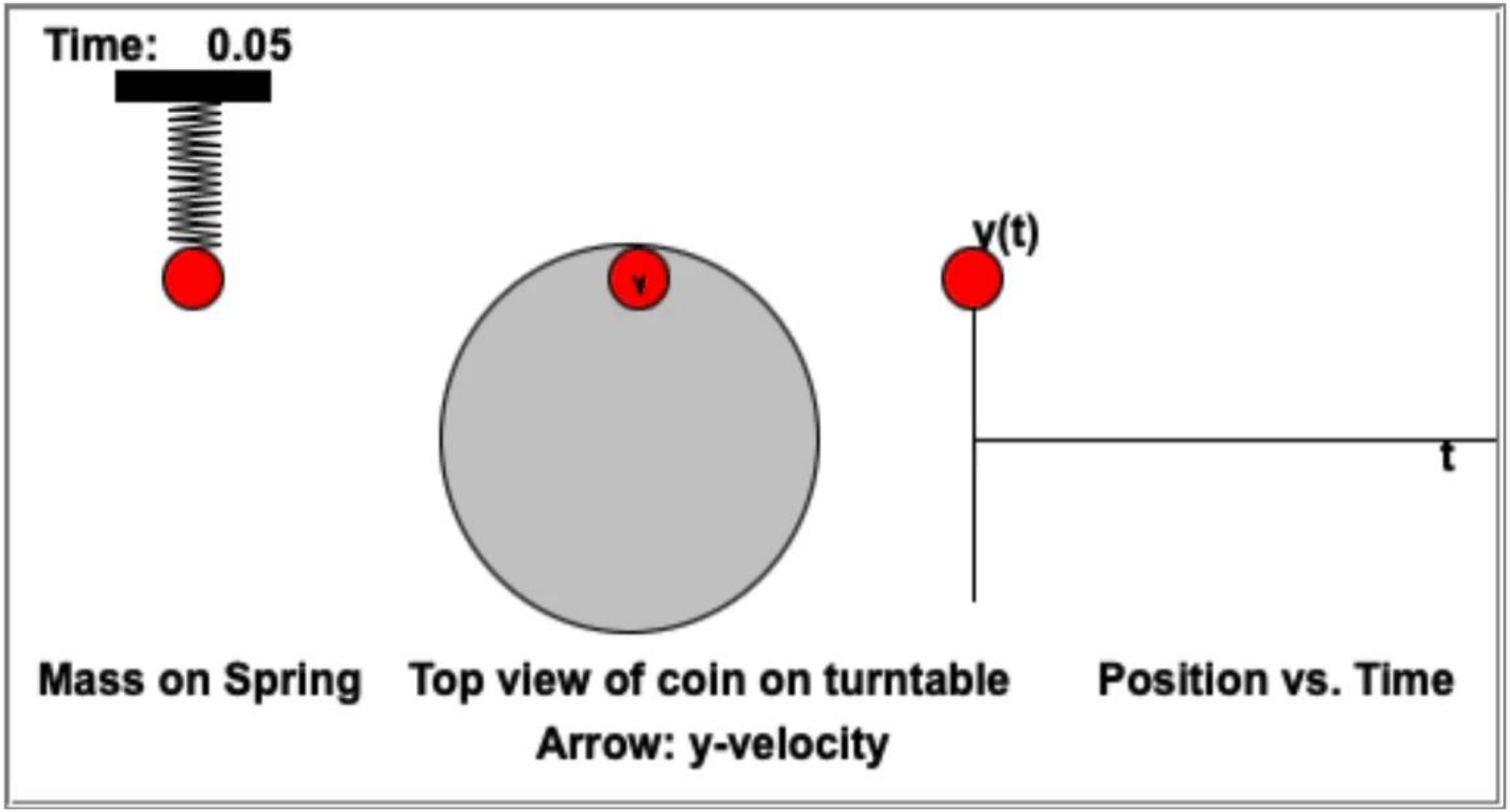
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση**



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση**



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Το εκκρεμές**
  - Όταν η γωνία θ είναι $< 10^o$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί ΑΑΤ
  - Ας κατασκευάσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\vec{F}_{\varepsilon\pi} = m\vec{a}_x \Longrightarrow -mg\sin(\theta) = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

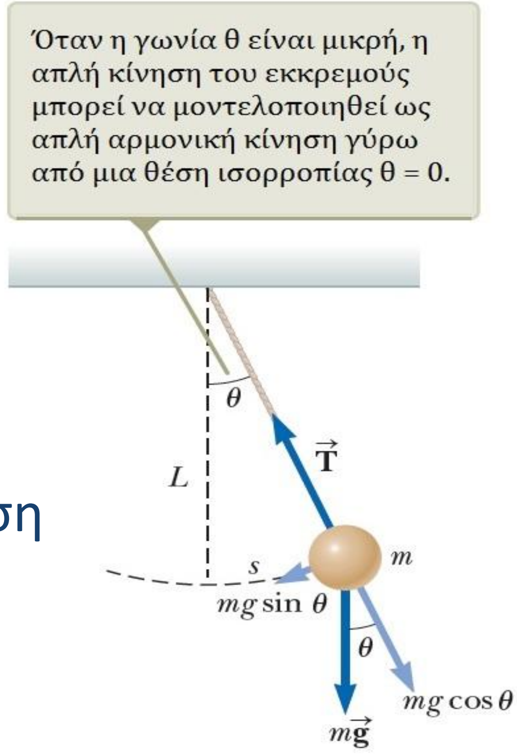
  - Επειδή $s = L\theta$,

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin(\theta) \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin(\theta)$$

  - Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

για μικρές τιμές του θ (σε rad), έχουμε: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{L}\theta$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Το εκκρεμές**
  - Γιατί χρειαστήκαμε την προσέγγιση;
  - Θυμηθείτε για το {ελατήριο, σώμα} που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

  - Για το εκκρεμές, καταλήξαμε σε:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

  - Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι ίδια!!
  - Άρα το εκκρεμές μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση **για μικρό $\boldsymbol{\theta}$** $(< \mathbf{10^o})$!

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Το εκκρεμές**

  - **Γωνιακή συχνότητα**

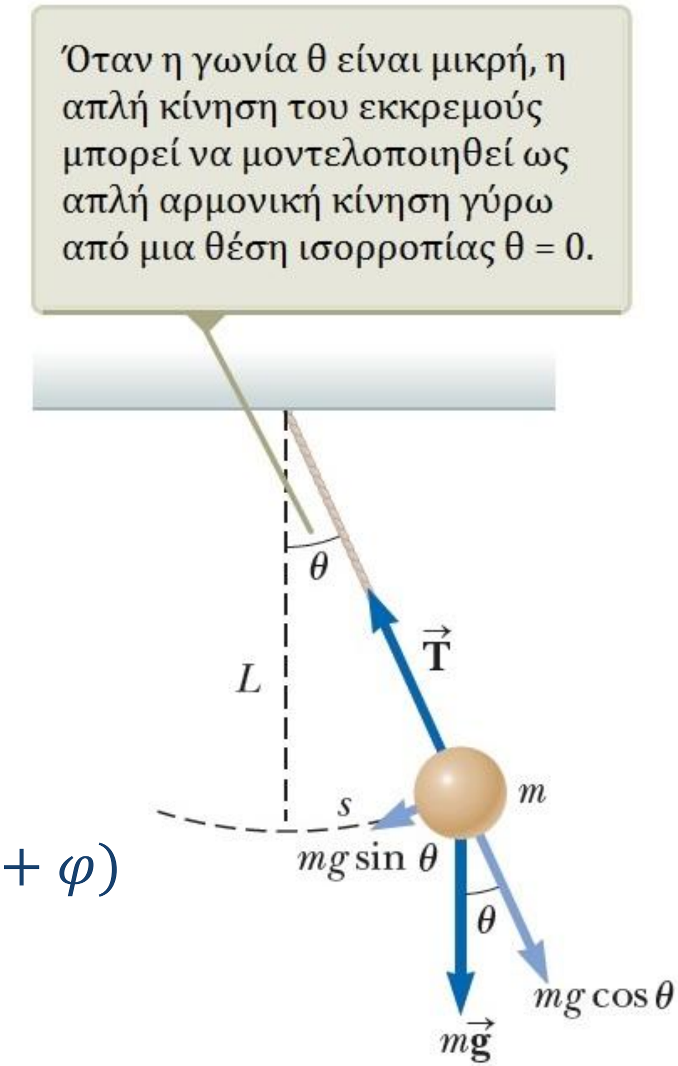
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

  - **Περίοδος**

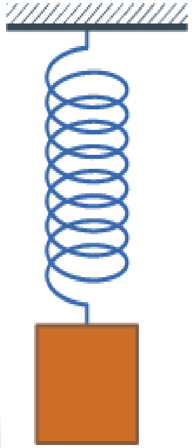
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

  - **Εξίσωση κίνησης**

$$\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega t + \varphi)$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

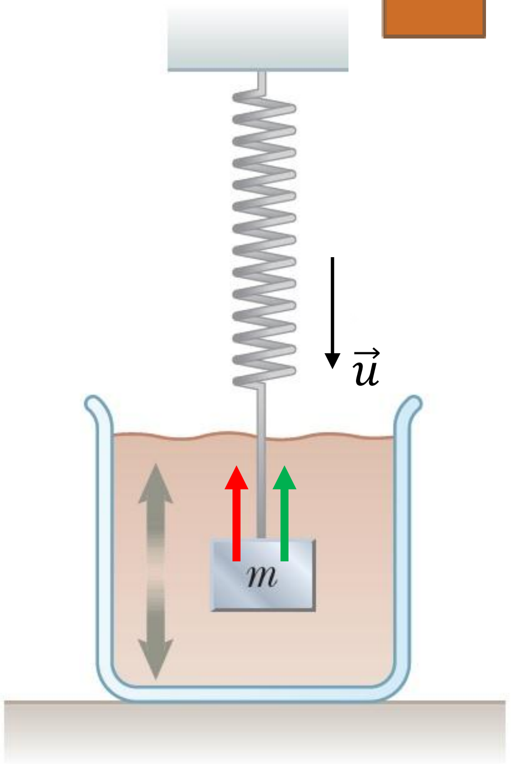


- **Φθίνουσες ταλαντώσεις**
  - Όταν η μηχανική ενέργεια φθίνει με το χρόνο, τότε η κίνηση λέγεται ότι είναι **φθίνουσα ταλάντωση**
    - Πιο κοντά στην πραγματικότητα:
      - τριβές, αντίσταση αέρα

  - **Δύναμη επιβράδυνσης**

$$\vec{R} = -b\vec{u} = -b\frac{d\vec{x}}{dt}$$

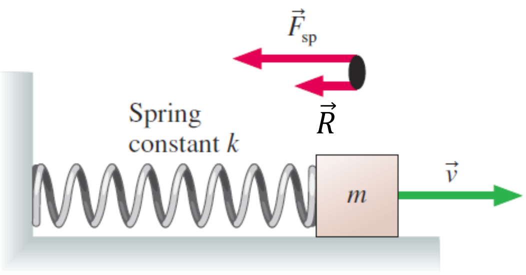
    - Συντελεστής απόσβεσης b
    - Δρα πάντα ***αντίθετα στην ταχύτητα*** του σώματος



  - $\vec{F} = -k\vec{x}$: δύναμη επαναφοράς

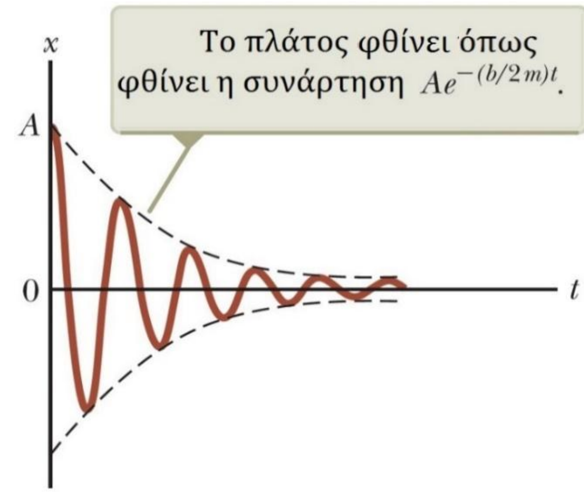
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Φθίνουσες ταλαντώσεις**
  - Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Newton:



$$\sum F_x = -kx - bu = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

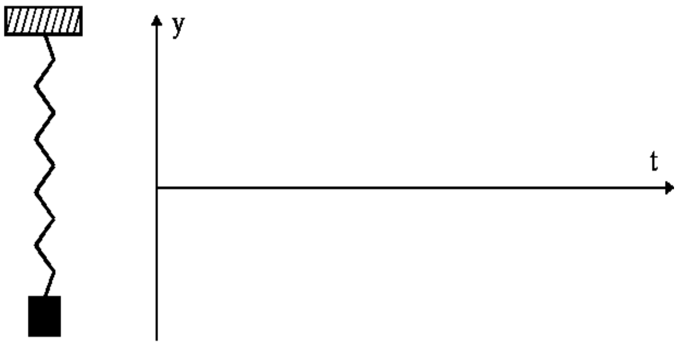


  - Η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x(t) = \boldsymbol{Ae}^{-\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2m}}\right)\boldsymbol{t}}\cos(\boldsymbol{\omega}t + \varphi)$$

  - Εναλλακτικά,

$$x(t) = \boldsymbol{A(t)}\cos(\boldsymbol{\omega}t + \varphi)$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Φθίνουσες ταλαντώσεις**
  - Γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$
  - Η ποσότητα $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι η γωνιακή συχνότητα, απουσία απόσβεσης
  - Άρα $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ και λέγεται

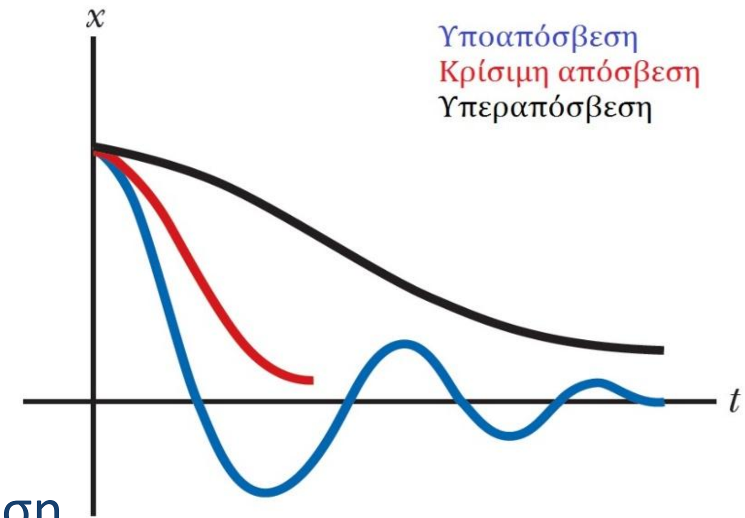
φυσική συχνότητα (ή ιδιοσυχνότητα)

του συστήματος

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Φθίνουσες ταλαντώσεις**

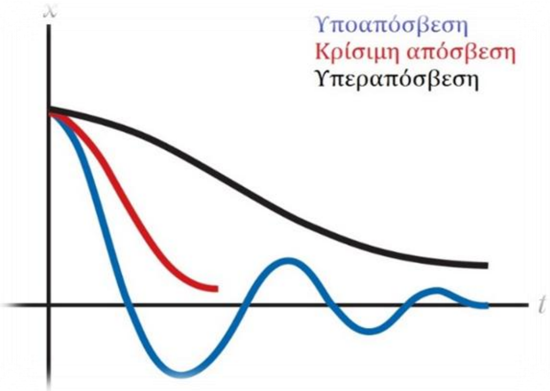
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

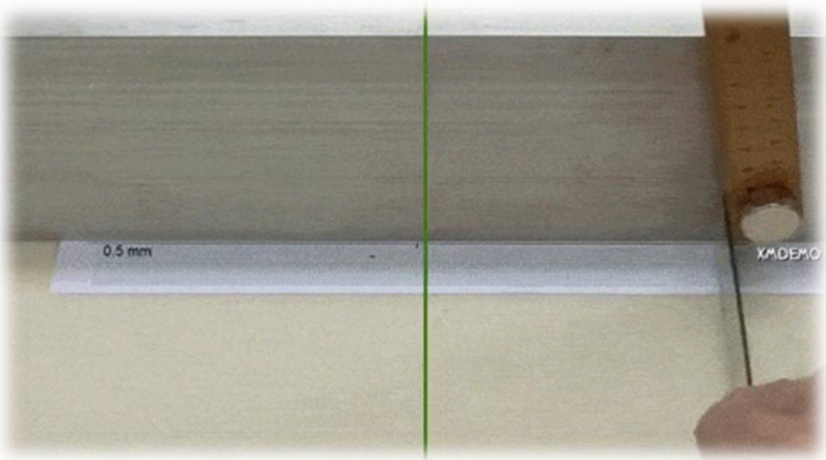


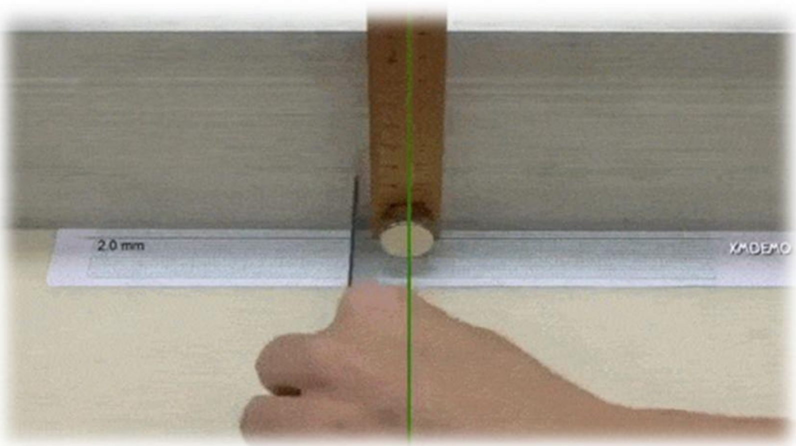
- Αν $\frac{b}{2m} < \omega_0 \rightarrow$ υποαπόσβεση
- Αν $\frac{b}{2m} = \omega_0 \rightarrow$ κρίσιμη απόσβεση
- Αν $\frac{b}{2m} > \omega_0 \rightarrow$ υπεραπόσβεση
  - Για συστήματα κρίσιμης απόσβεσης ή υπεραπόσβεσης, η εξίσωση φθίνουσας ταλάντωσης $x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}\cos(\omega t + \varphi)$ που βρήκαμε δεν ισχύει.

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Φθίνουσες ταλαντώσεις**







Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Φθίνουσες ταλαντώσεις – Μηχανική Ενέργεια**

- Η μηχανική ενέργεια του φθίνοντα ταλαντωτή είναι

$$E_{mech} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 e^{-\frac{b}{m}t} \left[1 + \frac{b}{2m\omega_0} \cos\left(2\omega t - \tan^{-1} \frac{2m\omega}{b} \right) \right]$$

- Για $\frac{b}{m} \ll \omega_0$, έχουμε

$$E_{mech} \approx \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 e^{-\frac{b}{m}t}$$

που δείχνει ότι πράγματι η μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή φθίνει εκθετικά με την πάροδο του χρόνου

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις**
  - Μπορούμε να αντισταθμίσουμε την απώλεια μηχανικής ενέργειας της ταλάντωσης λόγω της δύναμης επιβράδυνσης
    - Ασκώντας μια περιοδική εξωτερική δύναμη στο σύστημα
    - Π.χ. παιδί που κάνει κούνια και ο πατέρας το σπρώχνει περιοδικά για να διατηρήσει την κίνηση του
    - Π.χ. στον έμφωνο στάσιμο λόγο
    - Π.χ. στα μουσικά όργανα
    - Π.χ. σε ηλεκτρικά κυκλώματα

  - Μοντέλο εξωτερική δύναμη διέγερσης: $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$
  - Τότε

$$\sum F_x = m a_x \Leftrightarrow F_0 \sin(\omega t) - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις**

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow F_0 \sin(\omega t) - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

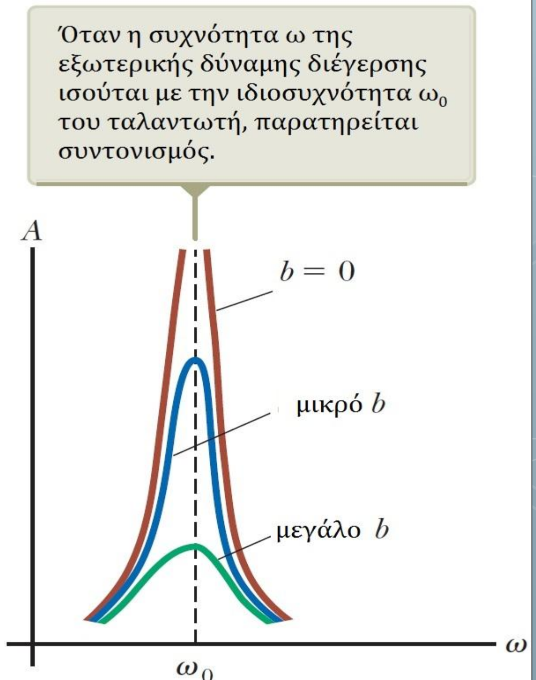
- Λύση:

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi)$$

με

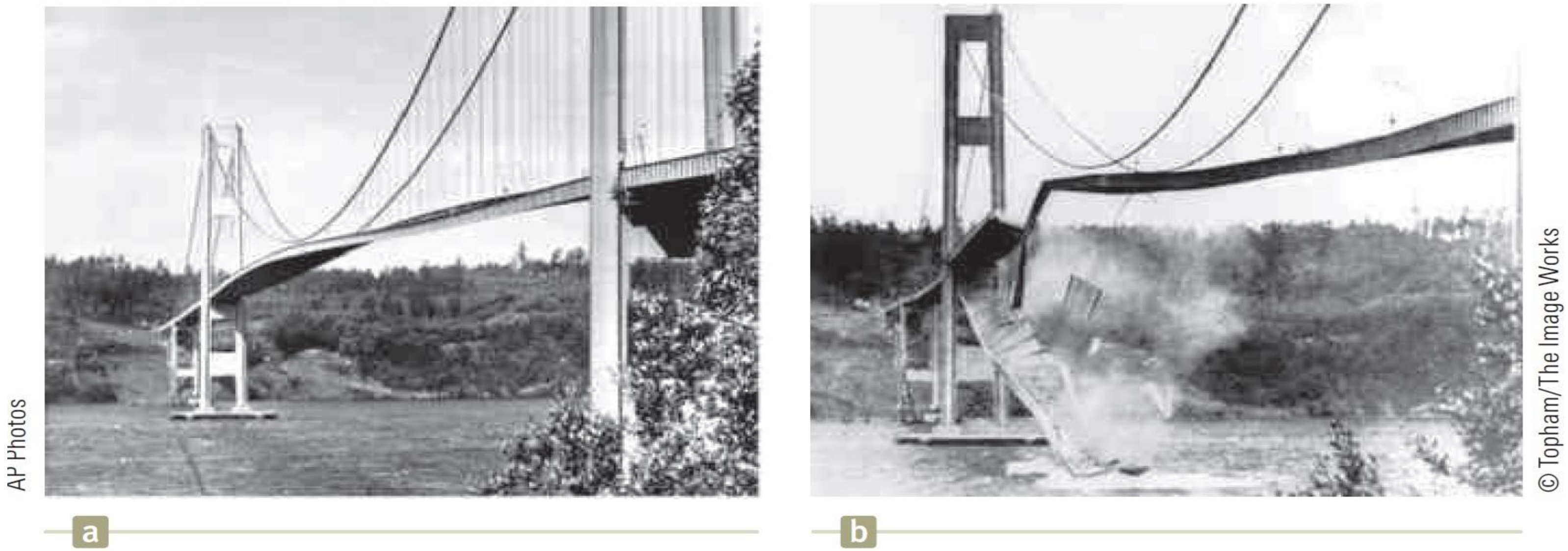
$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

- **Συντονισμός:** Όταν $\omega \approx \omega_0$ το πλάτος A γίνεται πολύ μεγάλο
  - ω_0: **συχνότητα συντονισμού**



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παραδείγματα – Μηχανική:**



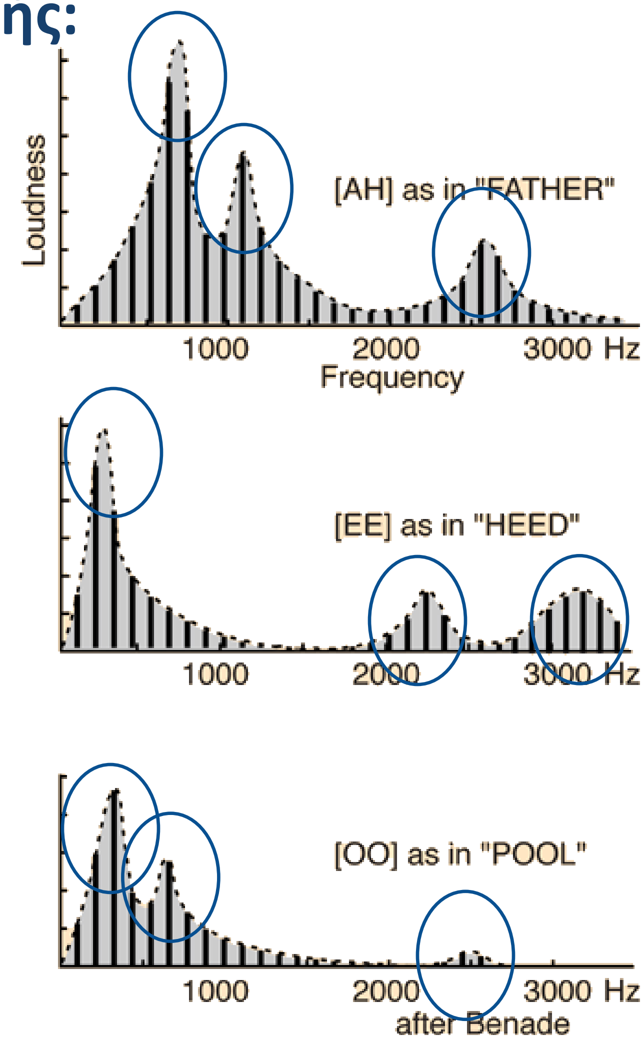
- Η αρχική υπόθεση ήταν ότι ο κυματισμός του ανέμου στο οδόστρωμα δημιούργησε περιοδική δύναμη διέγερσης με συχνότητα ίση με τη συχνότητα συντονισμού της γέφυρας. Το πλάτος ταλάντωσης της γέφυρας αυξήθηκε πολύ με αποτέλεσμα την κατάρρευσή της.

https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

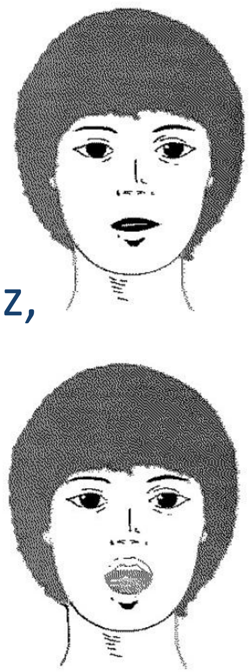
- **Παραδείγματα – Παραγωγή Φωνής:**
  - Διαφορετικές συχνότητες συντονισμού για τα δια-φορετικά φωνήματα
    - /ου/, /α/, /ι/
  - **Φωνοσυντονισμός** (formant)
    - Υψηλά πλάτη σε περιοχές συγκεκριμένων συχνοτήτων
    - Οι περιοχές αυτές εξαρτώνται από τη διάταξη της φωνητικής οδού

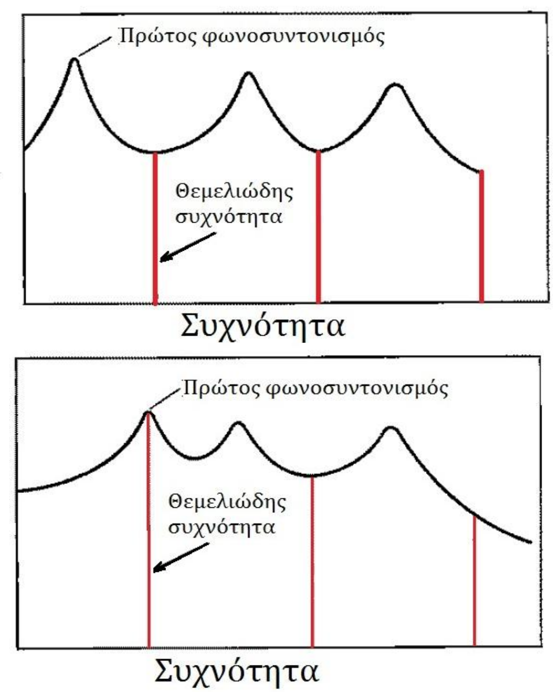


https://en.wikipedia.org/wiki/Formant

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παραδείγματα – Παραγωγή Φωνής:**
  - Οι σοπράνο προσπαθούν να «φτιάξουν» τη φωνητική οδό τους έτσι ώστε η συχνότητα φωνοσυντονισμού να συμπίπτει με τη θεμελιώδη συχνότητα της φωνής τους, όταν θέλουν να παράξουν δυνατή φωνή (Σχήμα)
  - Επίσης, με διαφορετική διαμόρφωση της φωνητικής οδού μπορούν να «φτιάξουν» ένα φωνοσυντονισμό στην περιοχή συχνοτήτων $2500 - 3000$ Hz, όπου τα μουσικά όργανα συνήθως δεν έχουν ενέργεια, ώστε να ακούγονται περισσότερο αυτοί παρά τα μουσικά όργανα





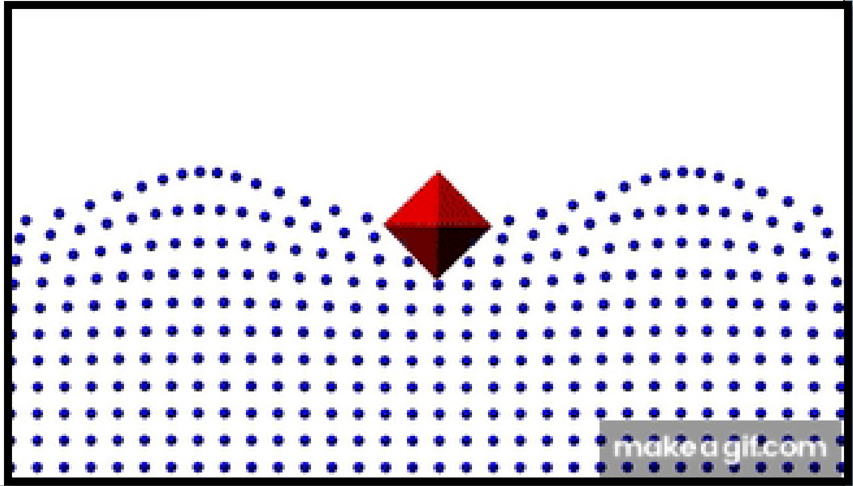
Εικόνα: Ναυαγοσώστες στην Αυστραλία εκπαιδεύονται στην αντιμετώπιση μεγάλων κυμάτων. Τα κύματα που κινούνται στην επιφάνεια του νερού αποτελούν ένα παράδειγμα μηχανικών κυμάτων.

Φυσική για Μηχανικούς

Κύματα

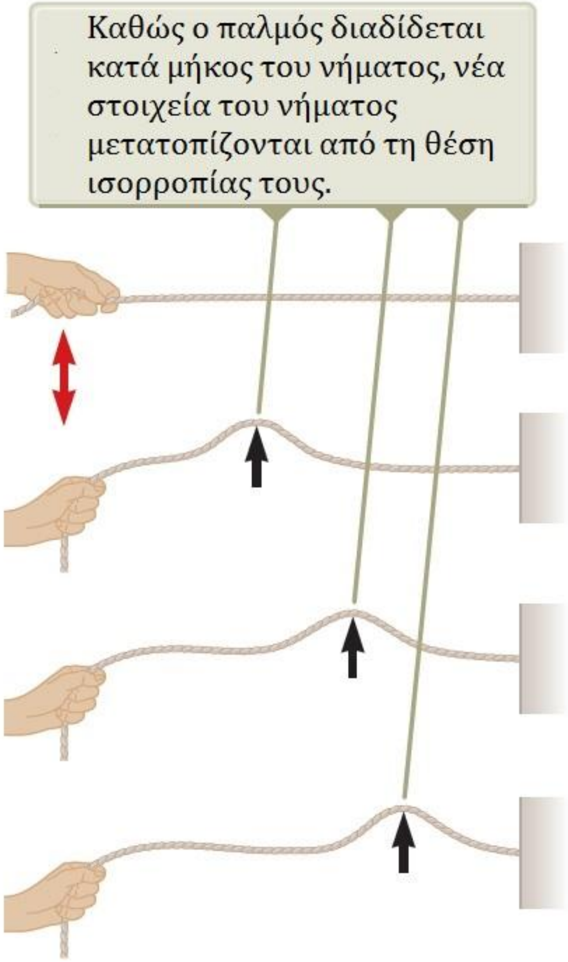
Κύματα

- Ο κόσμος είναι γεμάτος από κύματα!
  - **Μηχανικά** & Ηλεκτρομαγνητικά
- Στα μηχανικά κύματα, απαιτείται ένα ***μέσο διάδοσης***
- Χαρακτηριστικό γνώρισμα μηχανικών κυμάτων
  - Έστω μια σημαδούρα που επιπλέει σε μια λίμνη
  - Αν ρίξουμε κοντά της μια πέτρα, η σημαδούρα θα μετακινηθεί πάνω-κάτω/δεξιά-αριστερά αλλά δε θα μετακινηθεί σε σχέση με το σημείο πτώσης της πέτρας
  - **Κυματική κίνηση: μεταφέρεται ενέργεια αλλά όχι ύλη!**



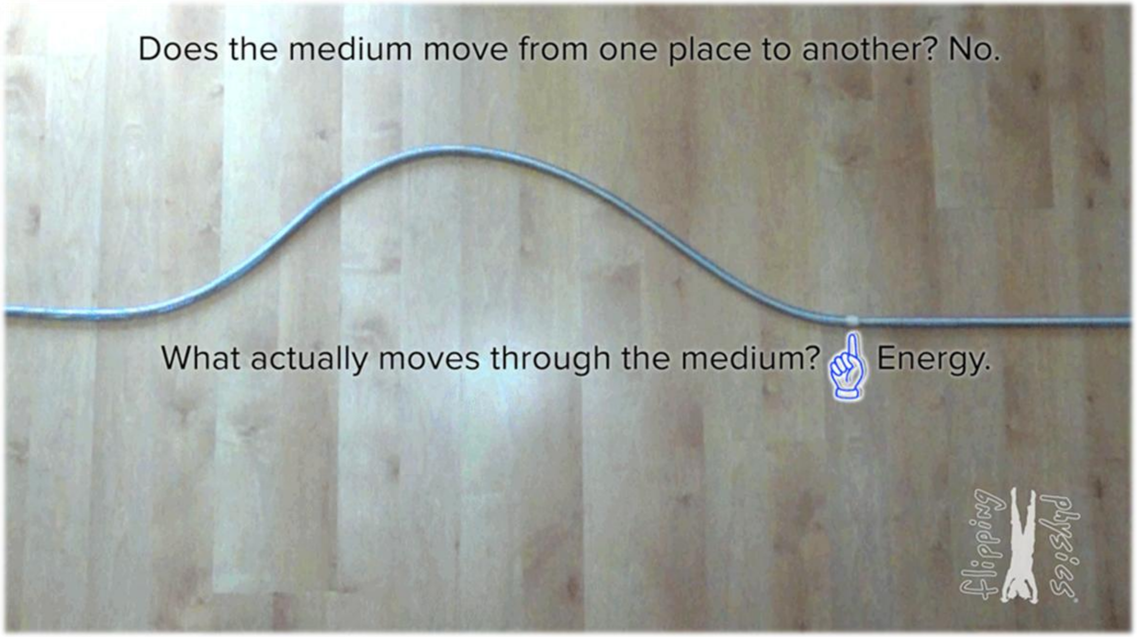
Κύματα

- Όλα τα μηχανικά κύματα προϋποθέτουν
  - **Α)** Κάποια πηγή διαταραχής
  - **Β)** Ένα μέσο με στοιχεία που μπορούν να διαταραχθούν
  - **Γ)** Κάποιο μηχανισμό με τον οποίο τα στοιχεία του μέσου αλληλεπι-δρούν μεταξύ τους



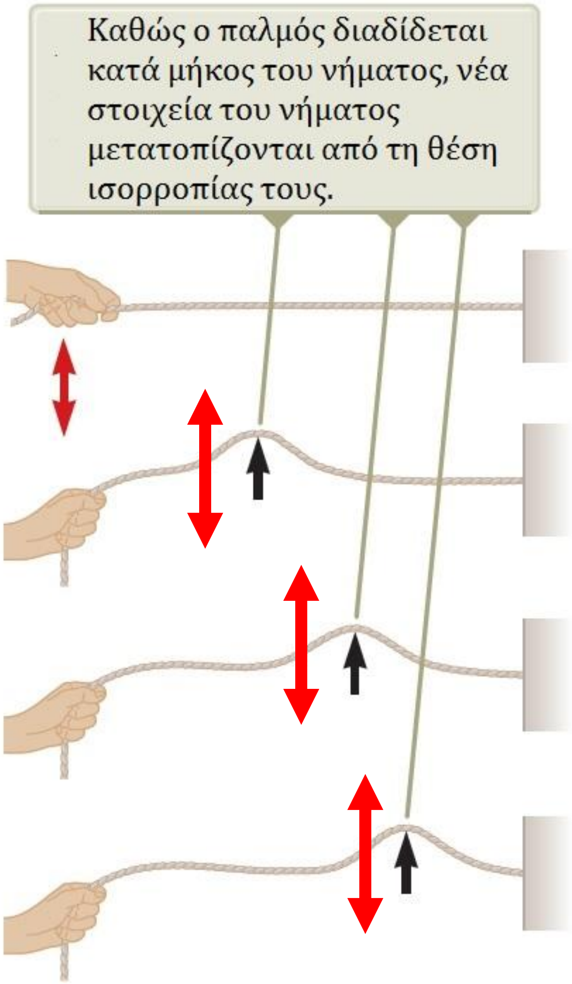
- Κίνηση κύματος
  - Παλμός = διαταραχή
  - Σχήμα σχεδόν απαράλλαχτο
  - Ύψος και ταχύτητα παλμού
    - Ύψος == κατακόρυφη μετατόπιση

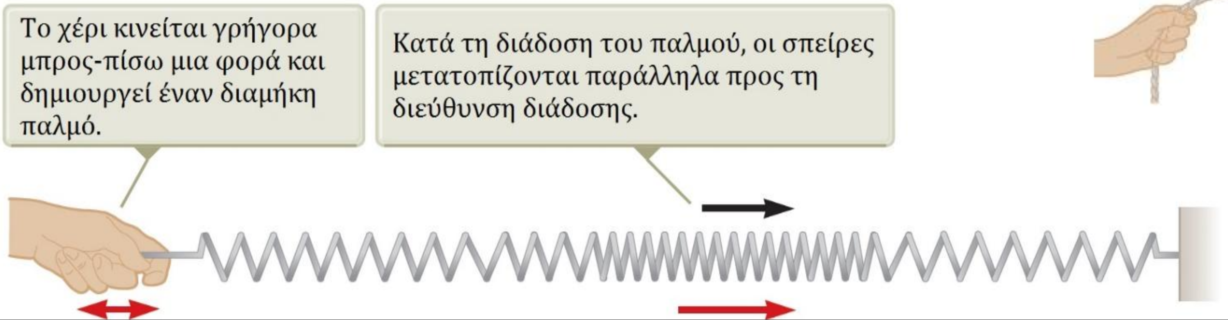
Κύματα


Does the medium move from one place to another? No.
What actually moves through the medium? Energy.
flipping physics

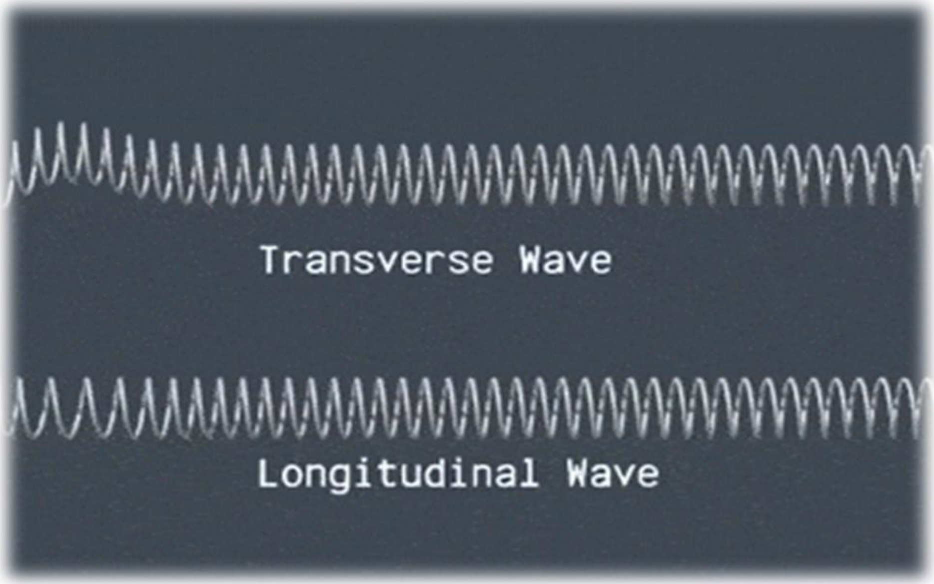
Κύματα

- Προσέξτε την κίνηση των στοιχείων του νήματος
  - Είναι κάθετη προς τη διεύθυνση διάδοσης: ***Εγκάρσιο κύμα***
- Προσέξτε την αντίστοιχη του ελατηρίου
  - Είναι παράλληλη προς τη διεύ-θυνση διάδοσης: ***Διάμηκες κύμα***





Κύματα

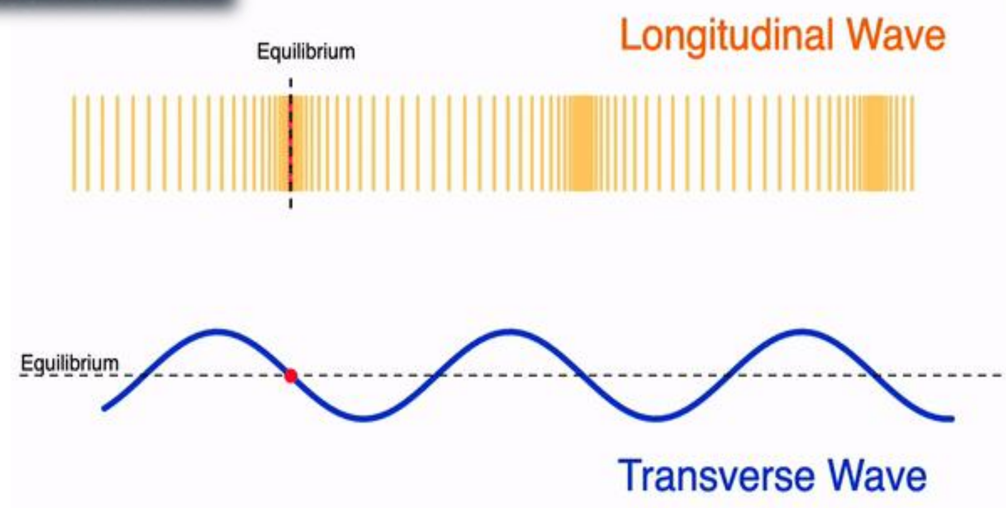


Εγκάρσιο κύμα

Διάμηκες κύμα

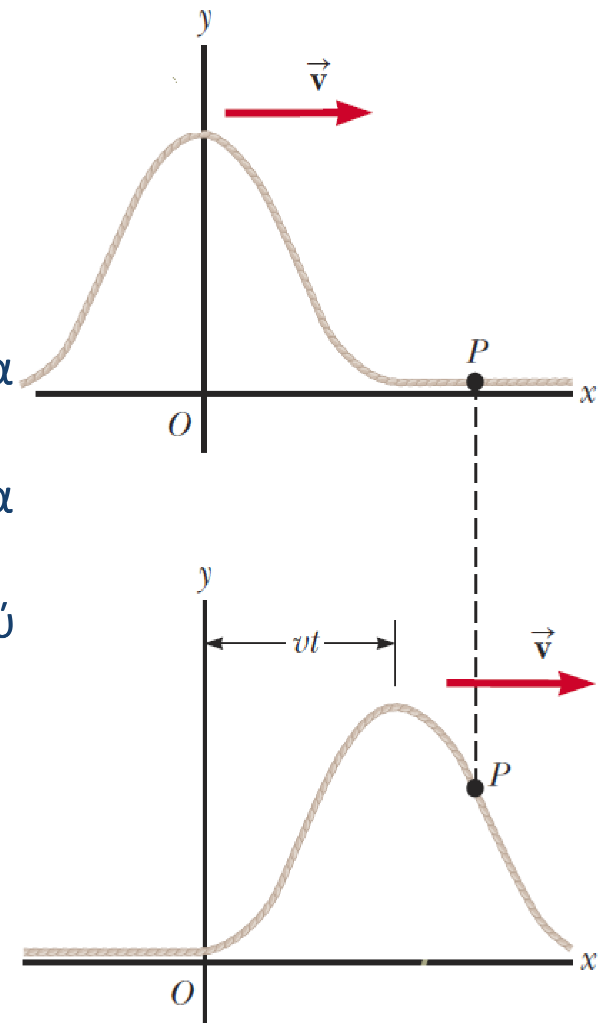
Περιοδικό διάμηκες κύμα

Περιοδικό εγκάρσιο κύμα



Κύματα

- **Κυματοσυνάρτηση – Συνάρτηση Κύματος** $y(x,t)$
- **Μετατόπιση** $\boldsymbol{y}$ **του στοιχείου** $\boldsymbol{x}$ **ενός κύματος τη χρονική στιγμή** $\boldsymbol{t}$
  - $y(x,t) = f(x - ut)$ ⟹ κίνηση προς τα δεξιά
  - $y(x,t) = f(x + ut)$ ⟹ κίνηση προς τα αριστερά
    - όπου u η ταχύτητα διάδοσης του παλμού
  - Για $t = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$, παρατηρούμε μια «**φωτογραφία**» του **όλου** κύματος για μια χρονική στιγμή
  - Για $x = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$, παρατηρούμε την κίνηση **ενός στοιχείου** του κύματος με την πάροδο του χρόνου



Κίνηση προς τα δεξιά

- Μελετάμε περιπτώσεις όπου δεν έχουν μεταβληθεί οι ιδιότητες του μέσου διάδοσης (όπως θα συνέβαινε σε κάποια έκρηξη)
- Άρα η μορφή της διαταραχής παραμένει σταθερή:

$$\frac{d}{dt}f(x-ut)=0$$

$$\frac{df}{dt}\frac{d(x-ut)}{dt}=0$$

$$\frac{d(x-ut)}{dt}=0$$

$$\frac{dx}{dt}-u=0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt}=u$$

- Όπου φυσικά για θετικό u, το κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά
- Όμοια φυσικά μπορούμε να δείξουμε και για $f(x+ut)$

Κύματα

- **Παράδειγμα:**
  - Έστω ένας παλμός που κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του άξονα x και περιγράφεται ως

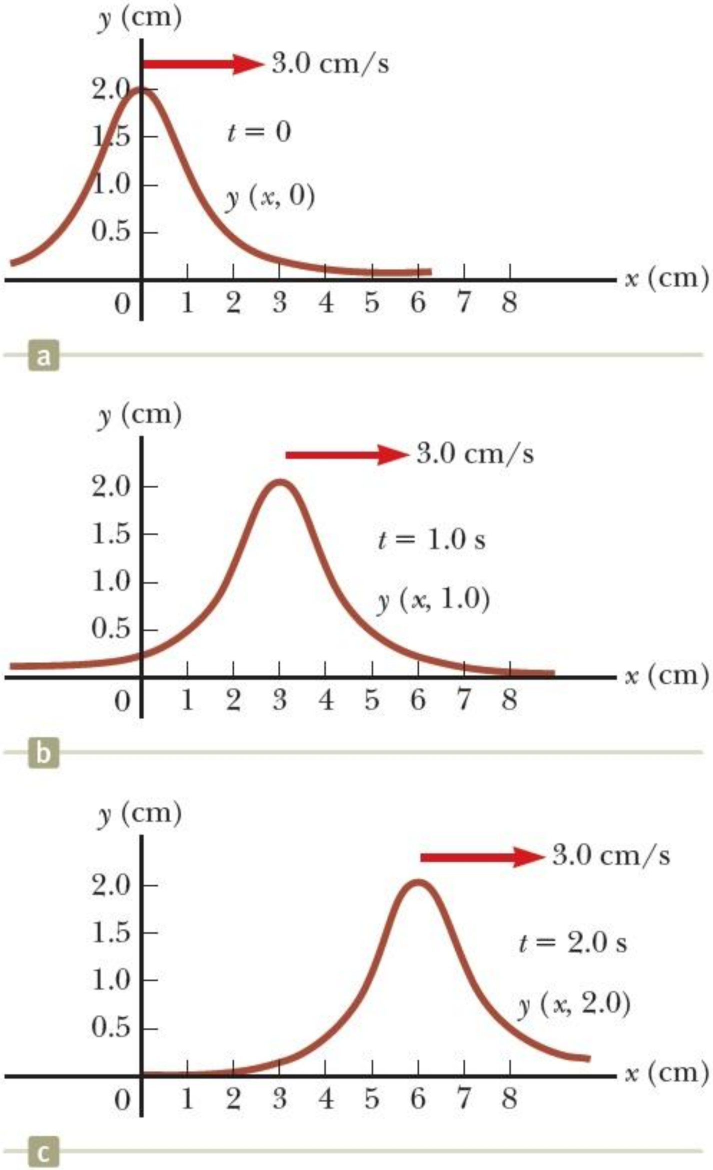
$$y(x,t) = \frac{2}{(x-3t)^2+1}$$

όπου x, y σε εκατοστά και το t σε δευτερόλεπτα.

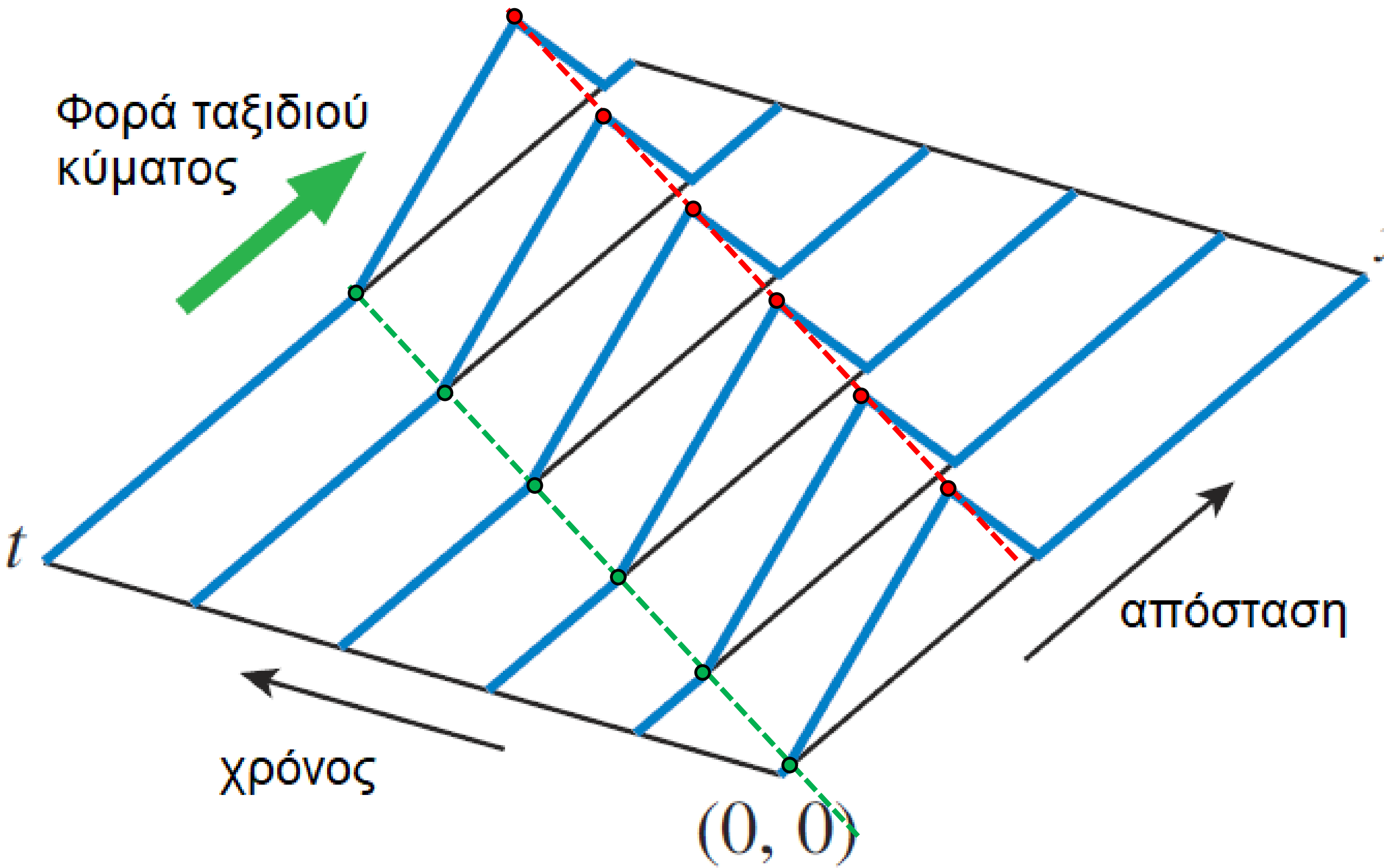
- Παλμοί για $t = 0, 1, 2$ s

Κύματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Έστω ένας παλμός που κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του άξονα x και περιγράφεται ως
    $$y(x,t) = \frac{2}{(x-3t)^2+1}$$
    όπου x, y σε εκατοστά και το t σε δευτερόλεπτα.
- Παλμοί για $t = 0, 1, 2$ s

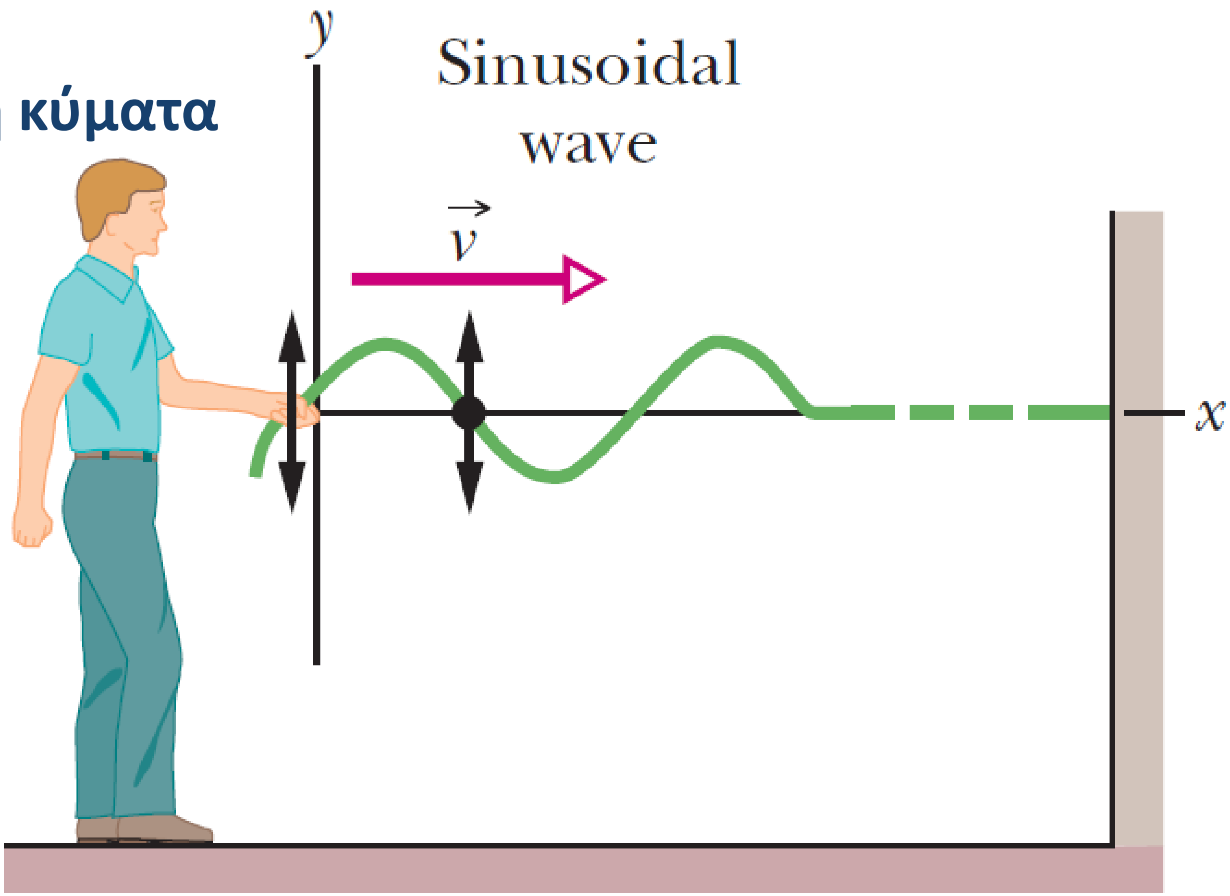


Κύματα



Κύματα

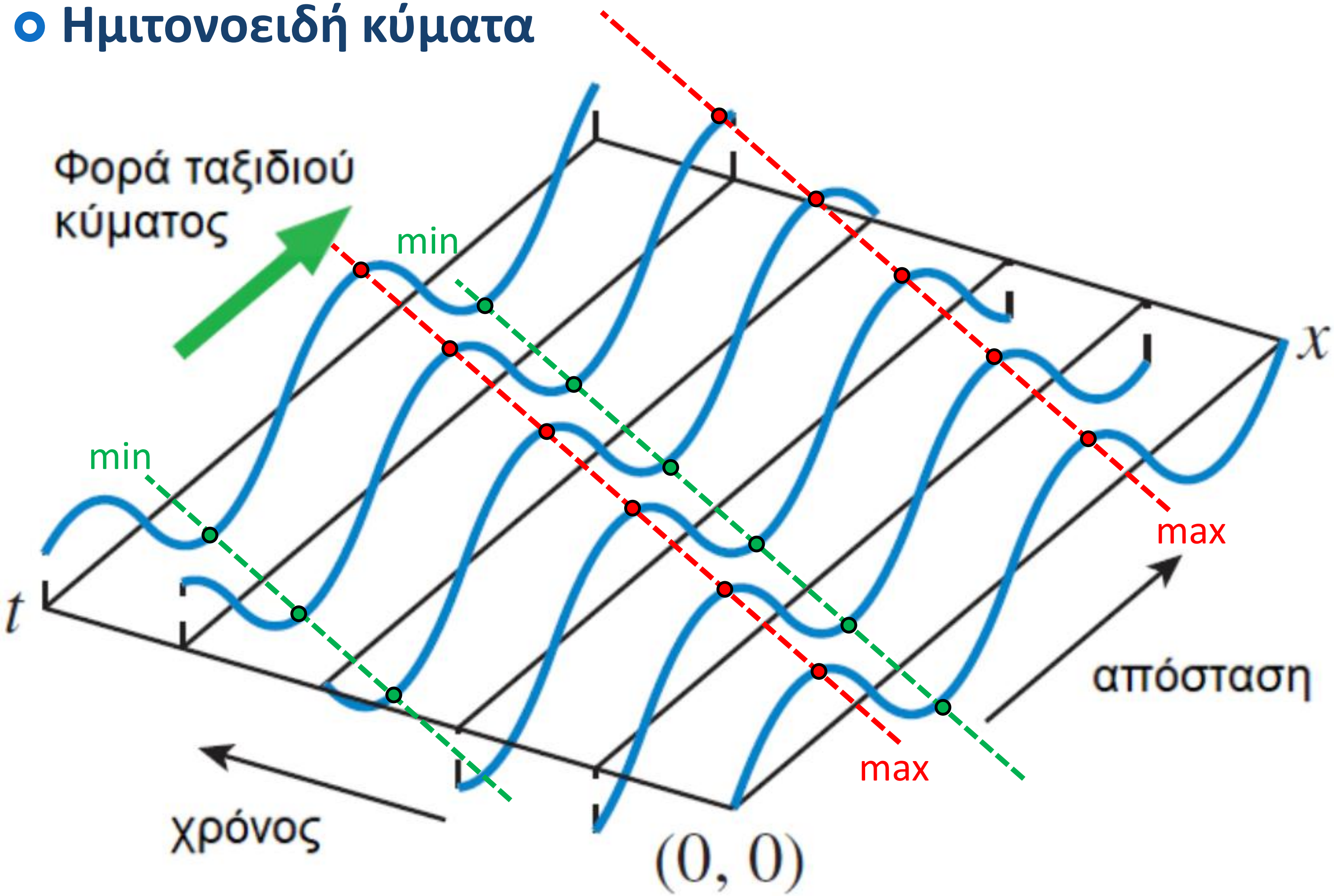
- **Ημιτονοειδή κύματα**



Όταν ένα ημιτονοειδές κύμα δημιουργείται σε ένα μέσο διάδοσης, κάθε στοιχείο του μέσου διάδοσης εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση!

Κύματα

- **Ημιτονοειδή κύματα**



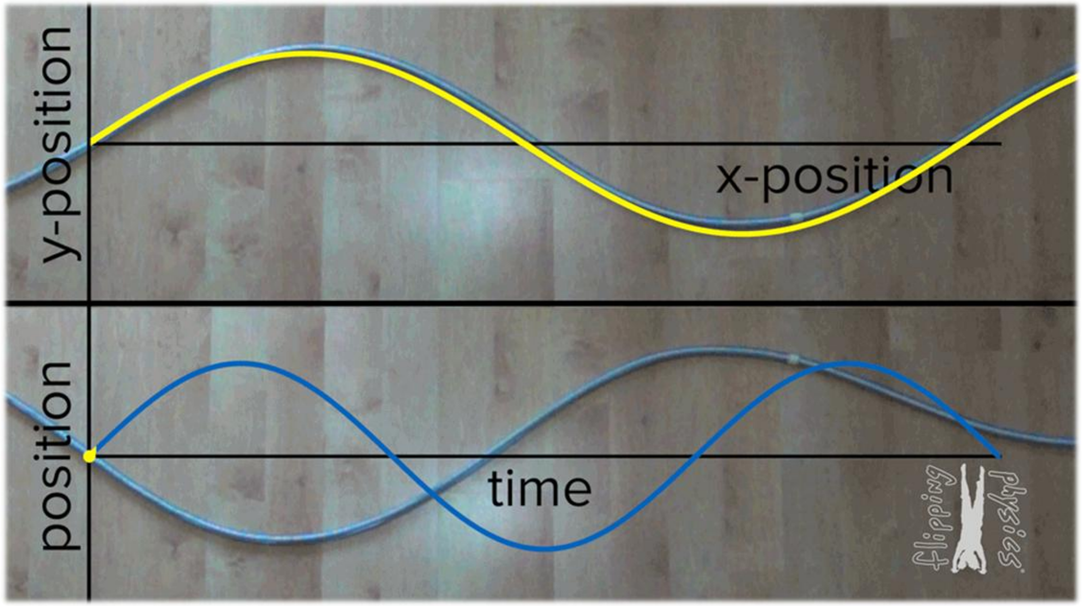
Κύματα

- **Ημιτονοειδή κύματα**

t σταθερό:
βλέπουμε <u>όλα</u> τα στοιχεία
για αυτό το t

$y(x, t_0)$

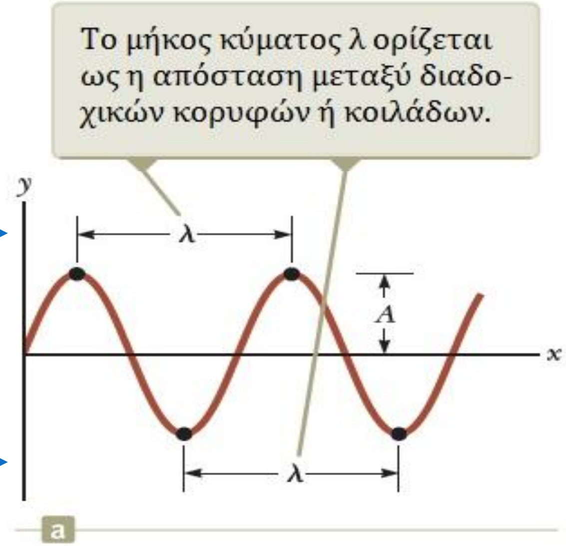
$y(x_0, t)$

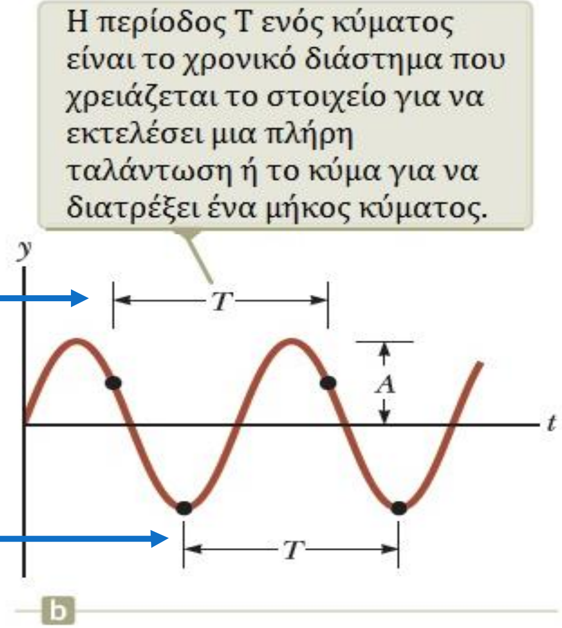


x σταθερό:
βλέπουμε <u>ένα</u> στοιχείο
για κάθε t

Κύματα

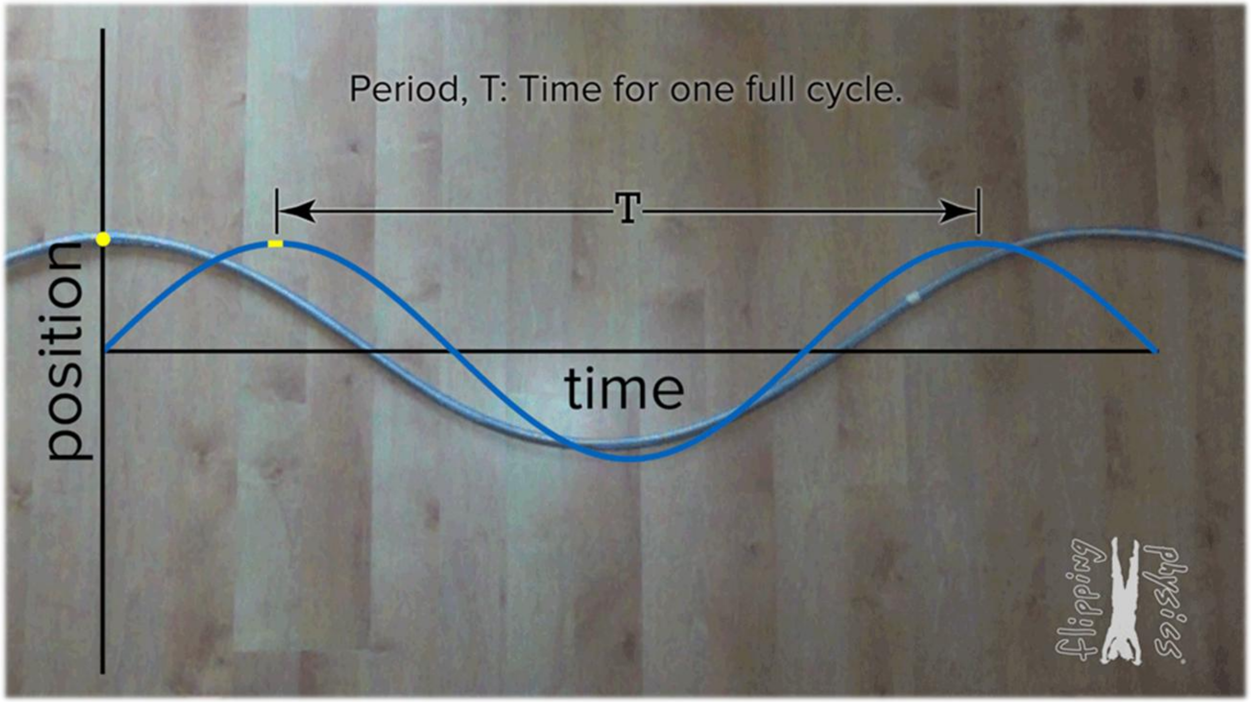
- **Ημιτονοειδή κύματα**
- **Μήκος κύματος λ**
  - Απόσταση!
- **Περίοδος T**
  - Χρονικό διάστημα!
- **Συχνότητα f**
  - Αριθμός κορυφών ανά μονάδα χρόνου
  - $f = {}^{1}/_{T}$
  - Μετριέται σε Hertz (Hz)





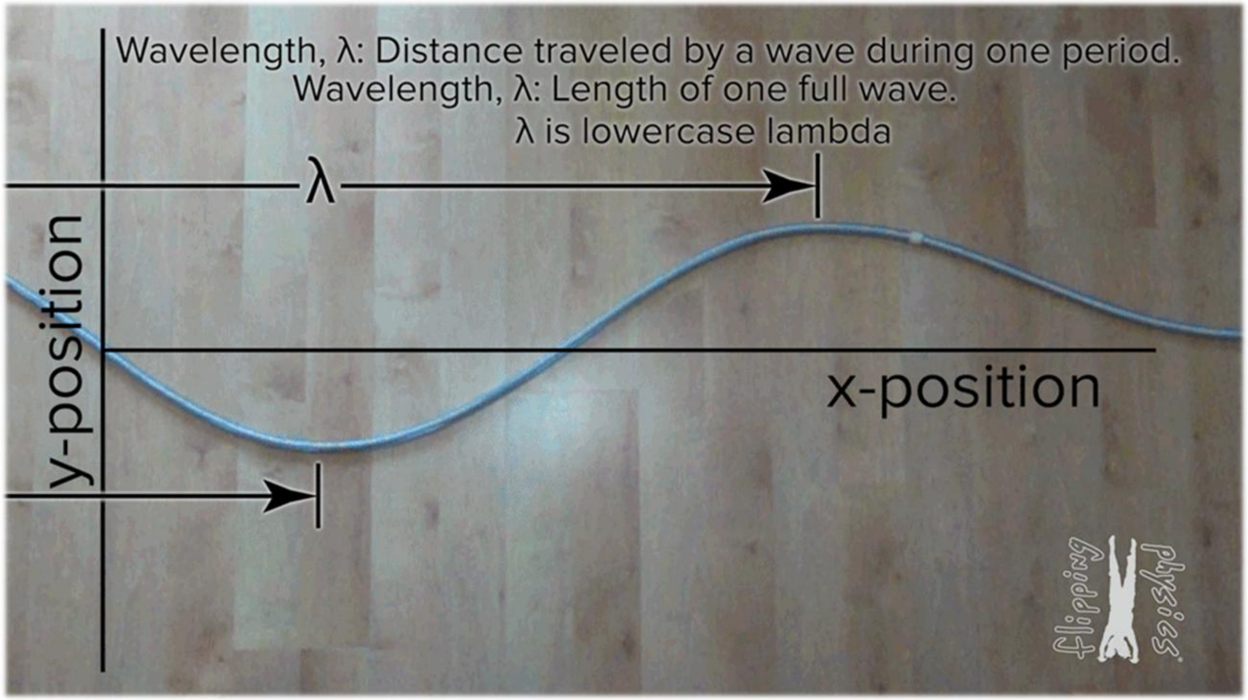
Κύματα

- **Ημιτονοειδή κύματα**



Κύματα

- **Ημιτονοειδή κύματα**



Κύματα

- Χρειαζόμαστε μια 3Δ συνάρτηση για την περιγραφή κύματος
- **Κυματοσυνάρτηση**

$$y(x,t) = A\sin\left(2\pi\frac{(x \pm ut)}{\lambda} + \varphi\right)$$

- **Ταχύτητα διάδοσης**

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

- **Κυματαριθμός**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- **Γωνιακή συχνότητα**

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

- **Οπότε**

$$y(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

Κύματα

- **Κυματοσυνάρτηση**

$$y(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

- Φωτογραφία για κάποια χρονική στιγμή t (έστω $t = 0$)

$$y(x,0) = y(x) = A\sin(kx + \varphi)$$

  - Περιγράφει **όλο το κύμα – κάθε στοιχείο x !**
  - Κόβουμε μια «φέτα» της 3Δ αναπαράστασης για κάποιο t_0 (εδώ, το $t = 0$)

- «Κλειδώνουμε» ένα στοιχείο x (έστω $x = 0$)

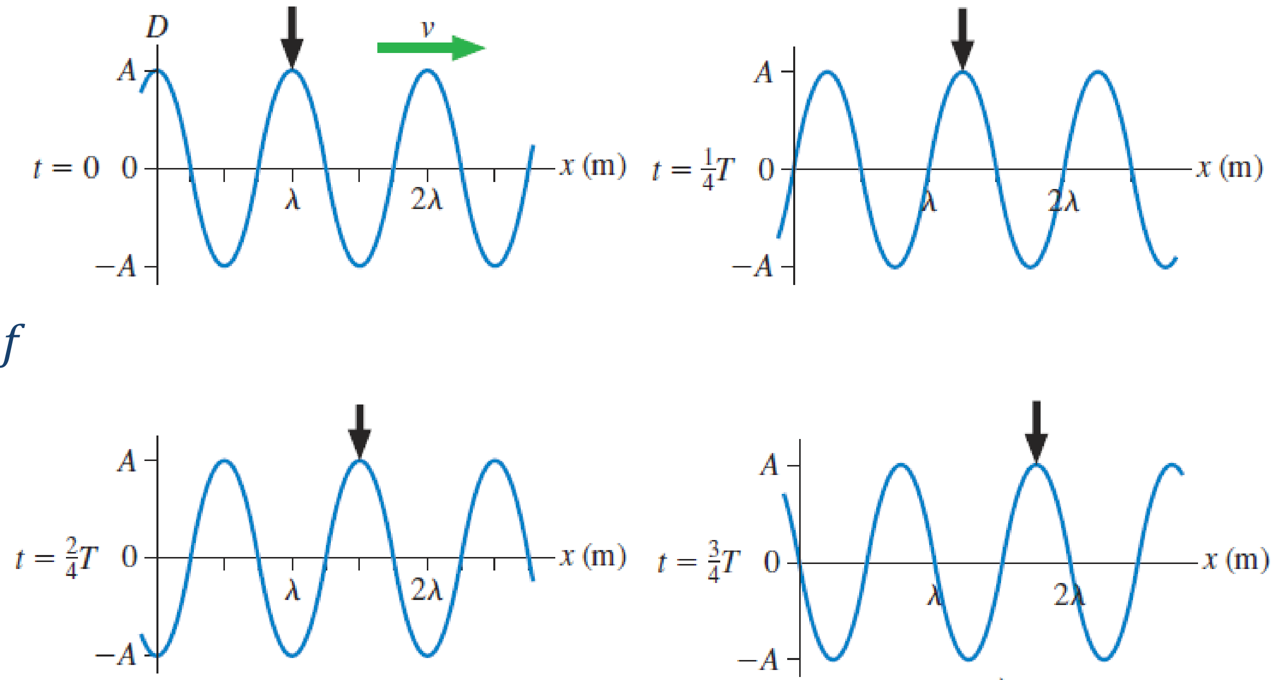
$$y(0,t) = y(t) = A\sin(\pm\omega t + \varphi)$$

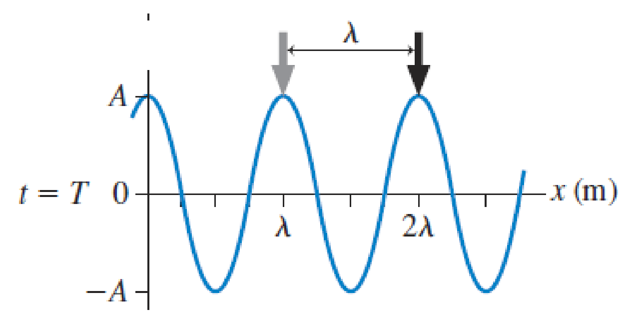
  - **Περιγράφει ένα στοιχείο (το $x = 0$ εδώ) του κύματος για κάθε t !**
  - Απλός αρμονικός ταλαντωτής!
  - Κόβουμε μια «φέτα» της 3Δ αναπαράστασης για κάποιο x_0 (εδώ, το $x_0 = 0$)

Κύματα

- **Ταχύτητα διάδοσης**

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

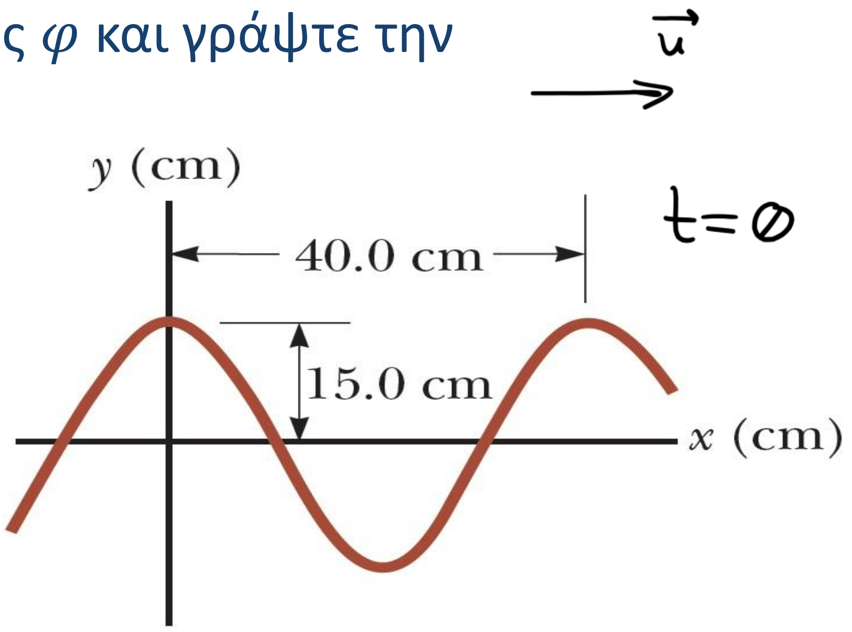




Το μήκος κύματος αποτελεί «συνέπεια» ενός κύματος συχνότητας f που ταξιδεύει σε μέσο στο οποίο η ταχύτητα του κύματος ισούται με u

Κύματα

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x-άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα $f = 8$ Hz. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.
  - A) Βρείτε τα k, T, ω, u.
  - B) Βρείτε τη σταθερά φάσης φ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση.



Κύματα

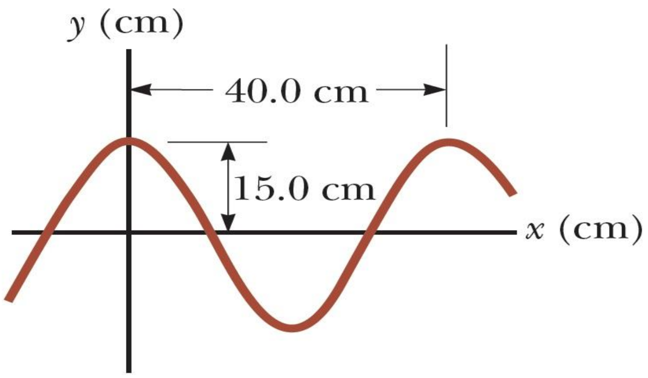
- **<u>Παράδειγμα – Λύση:</u>**
  - Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x-άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.
    - Α) Βρείτε τα k, T, ω, u.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \ \frac{rad}{m}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = 0.125 \ s$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 8 = 16\pi \ \frac{rad}{s}$$

$$u = \lambda f = 0.4 \cdot 8 = 3.2 \ \frac{m}{s}$$



Κύματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x-άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.
    - Β) Βρείτε τη σταθερά φάσης φ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση.

* Άρα $0.15\cos(5\pi x - 16\pi t)$.

$y(x,t) = 0.15\sin\left(5\pi x - 16\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

Είναι $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi) = 0.15\sin(5\pi \cdot x - 16\pi t + \varphi)$

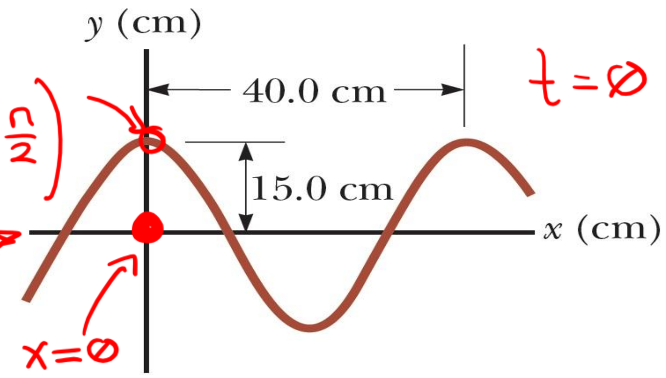
Είναι $y(x,0) = 0.15\sin(5\pi x - 0 + \varphi)$

— " — $y(0,0) = 0.15\sin(\varphi) = 0.15$, από σχήμα.

Άρα $\sin(\varphi) = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ ή $\frac{3\pi}{2}$ (ή $-\frac{\pi}{2}$)

Επιλέγω $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ γιατί

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ *



Κύματα

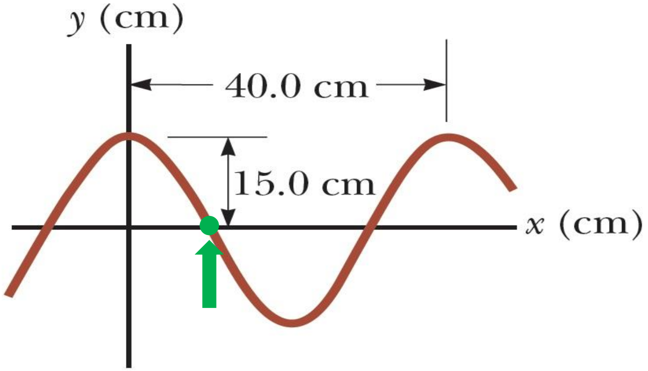
- **Παράδειγμα – Λύση:**

1. $2\pi = k\lambda$
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

Στην ερώτηση «***αν παίρναμε άλλο σημείο στο σχήμα, θα παίρναμε την ίδια απάντηση?***», η απάντηση είναι «***ναι***», αν και δεν έχουμε πληροφορία για όλα τα υπόλοιπα σημεία. Μπορούμε όμως να πάρουμε για παράδειγμα το «**πράσινο**» σημείο στο σχήμα. Έχει $x = \lambda/4$ και $y = 0$ και έτσι μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς:

Homework!

Κάντε το και συζητήστε με το διδάσκοντα αν αντιμετωπίσατε προβλήματα.



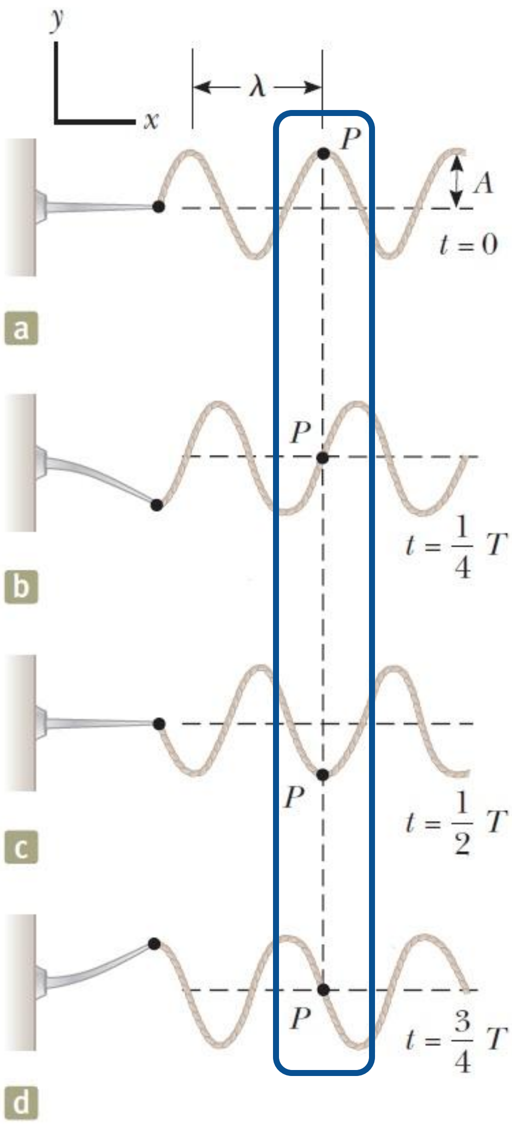
Κύματα

- **Ημιτονοειδή κύματα**

  - Κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το κύμα του διπλανού σχήματος:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

  - Άρα περιγράφει και την κίνηση κάθε σημείου του, όπως π.χ. το *P*



Κύματα

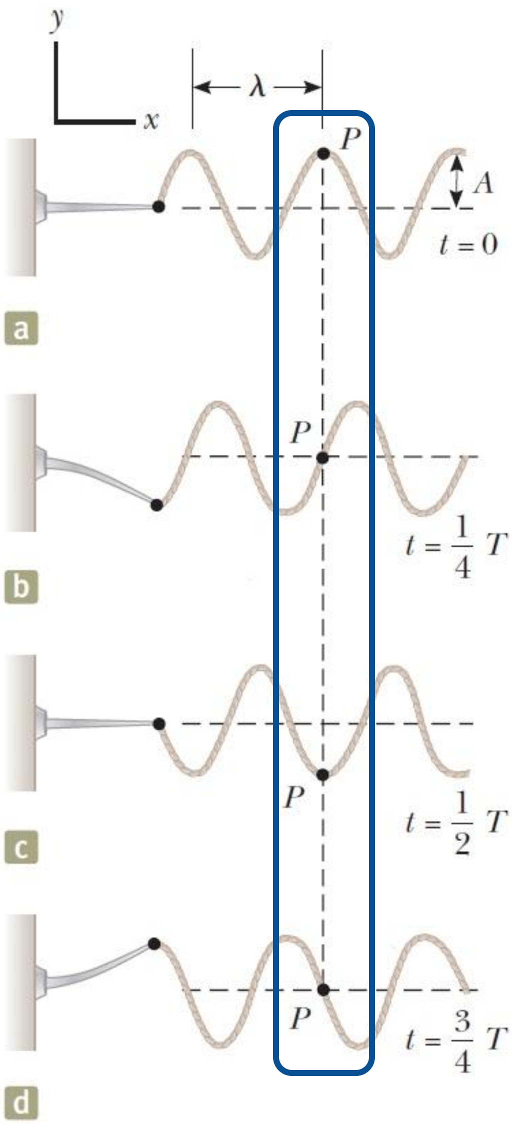
- **Ημιτονοειδή κύματα**
  - Εγκάρσια μετατόπιση του στοιχείου P από τη θέση ισορροπίας

$$y(t) = y(x_P, t) = A\sin(kx_p - \omega t)$$

  - Εγκάρσια ταχύτητα και επιτάχυνση του στοιχείου P

$$v_y(t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx_P - \omega t)$$

$$a_y(t) = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A\sin(kx_P - \omega t)$$



Κύματα

- **Ταχύτητα Διάδοσης $\boldsymbol{u}$ κύματος σε τεντωμένο νήμα**

$$u = \sqrt{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{\mu}}}$$

όπου $\boldsymbol{T}$ η τάση του νήματος, και $\boldsymbol{\mu}$ η μάζα του νήματος ανά μονάδα μήκους

- **Μάζα ανά μονάδα μήκους**

$$\mu = \frac{m}{l}$$

  - Λέγεται και γραμμική πυκνότητα μάζας

Κύματα

- **Παράδειγμα:**

Κύμα διαδίδεται σε νήμα και περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$y(x,t) = 0.02\sin(12.57x - 638t)$$

Μετατοπίσεις και χρόνος εκφράζονται σε μονάδες του S.I.
Η γραμμική πυκνότητα μάζας του νήματος είναι $\mu = 0.005$ kg/m.

Α) Βρείτε την τάση του νήματος

Β) Βρείτε τη μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου του νήματος

Γ) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα ενός στοιχείου του νήματος

Κύματα

$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$y(x,t) = 0.02\sin(12.57x - 638t)$$

$\mu = 0.005$ kg/m.

Α) Βρείτε την τάση του νήματος

Β) Βρείτε τη μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου του νήματος

Γ) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα ενός στοιχείου του νήματος

Α) Ξέρουμε $u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow u^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow T = u^2 \cdot \mu$ (1)

— " — $u = \lambda f$

— " — $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 12.57 \, \frac{rad}{m} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{12.57}$ m

— " — $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{638}{2\pi}$ Hz

$\Rightarrow u = \lambda f \cong 50.75 \, \frac{m}{s}$ (2) . Η (1) $\xRightarrow{(2)}$ $T = u^2 \mu \simeq 12.88$ N

Κύματα

$A \cdot \sin(kx - \omega t)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$y(x,t) = 0.02\,\sin(12.57x - 638t)$$

$\mu = 0.005$ kg/m.

Α) Βρείτε την τάση του νήματος

Β) Βρείτε τη μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου του νήματος

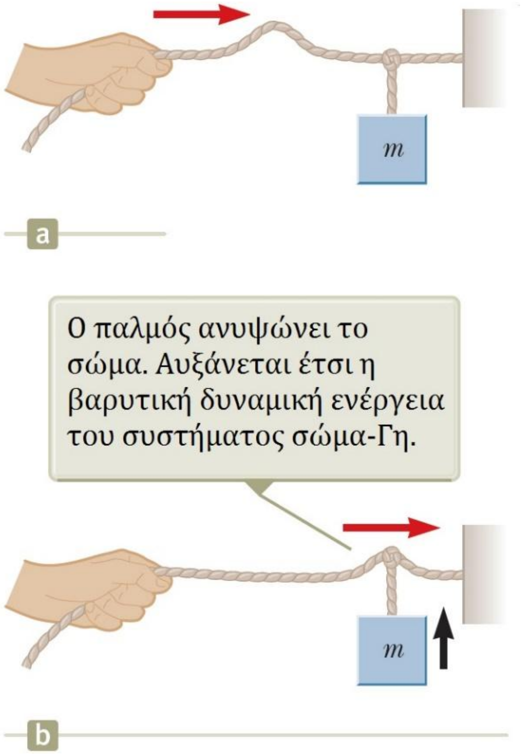
Γ) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα ενός στοιχείου του νήματος

Β) Είναι $y_{max} = A = 0.02$ m

Γ) Επειδή κάθε στοιχείο του κύματος εκτελεί ΑΑΤ, ξέρουμε ότι $u_{max} = \omega A = 12.76 \frac{m}{s}$.

Κύματα

- **Μεταφορά ενέργειας σε νήμα**
  - Είπαμε (και είδαμε) ότι στα μηχανικά κύματα μεταφέρεται **ενέργεια**
  - Που πηγαίνει αυτή η ενέργεια;
  - **Παράδειγμα**:
    - Έστω το {σώμα, Γη} ως **μη απομονωμένο σύστημα**
    - **Ενέργεια** λόγω έργου (χέρι)
      - **Εξωτερική** στο σύστημα
    - Διάδοση παλμού κατά **μήκος** του νήματος
    - **Ανύψωση** σώματος
      - **Μεταβολή δυναμικής ενέργειας συστήματος {Γη, σώμα}**



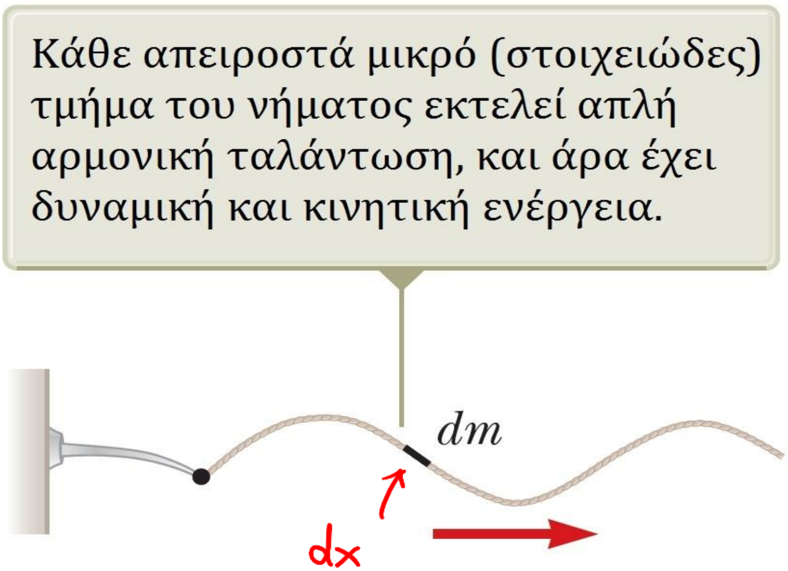
Κύματα

- **Μεταφορά ενέργειας σε νήμα**

  - Ας θεωρήσουμε ένα απειροστά μικρό τμήμα του νήματος μήκους dx και μάζας dm

  - Εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (y-άξονα)!

  - Άρα έχει **κινητική και δυναμική** ενέργεια!



Κύματα

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{dm}{dx}$$

- **Μεταφορά ενέργειας σε νήμα**
  - **Κινητική ενέργεια για ένα απειροστά μικρό στοιχείο νήματος**

$$dK = \frac{1}{2}(dm){v_y}^2 = \frac{1}{2}(\mu dx){v_y}^2 \overset{(t=0)}{=} \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx)dx$$

  - Ολοκληρώνοντας για ένα μήκος κύματος

$$K_\lambda = \int dK = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx)dx = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

  - **Δυναμική ενέργεια (με όμοιο τρόπο)**

$$U_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

Κύματα

- **Μεταφορά ενέργειας σε νήμα**

  - Η συνολική ενέργεια <u>σε ένα μήκος κύματος</u> ισούται με το άθροισμα κινητικής και δυναμικής

$$E_{mech} = K_{\lambda} + U_{\lambda} = E_{\lambda} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

  - **Ρυθμός μεταφοράς ενέργειας (= Μέση Ισχύς)**

$$P = \frac{E_{\mu\eta\chi.\kappa\upsilon\mu.}}{\Delta t} = \frac{E_{\lambda}}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 u$$

με $\boldsymbol{u}$ **την ταχύτητα διάδοσης** του κύματος

Εικόνα: Τα αυτιά του ανθρώπου έχουν εξελιχθεί να ακούν και να ερμηνεύουν ηχητικά κύματα ως φωνή ή ως ήχους. Κάποια ζώα, όπως το είδος αλεπούς με τα αυτιά νυχτερίδας, έχουν αυτιά που είναι προσαρμοσμένα να ακούν πολύ αδύναμους ήχους.

Φυσική για Μηχανικούς

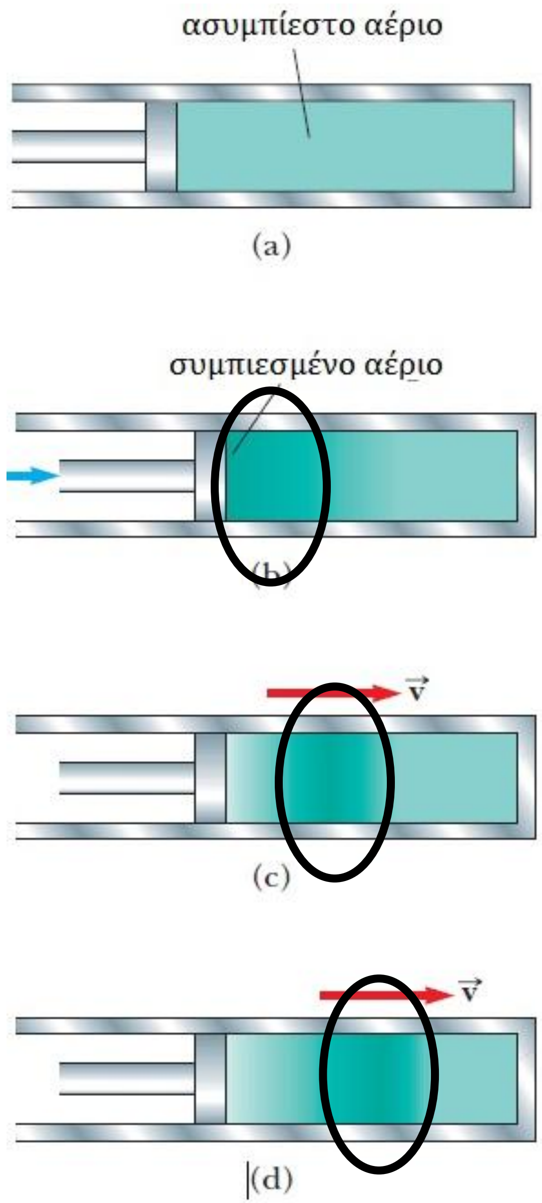
Ηχητικά Κύματα

Ηχητικά Κύματα

- **Τρεις κατηγορίες ηχητικών κυμάτων**
  - ***Ακουστικά κύματα***
    - Μουσική, φωνή
  - ***Κύματα υποήχων (υπόηχοι)***
    - Ελέφαντες, φάλαινες, και άλλα ζώα επικοινωνούν με υπόηχους
    - Έντονα φυσικά φαινόμενα παράγουν υπόηχους
      - Καταιγίδες, κατολισθήσεις, σεισμοί, ηφαιστειακή δραστηριότητα κ.α.
  - ***Κύματα υπερήχων (υπέρηχοι)***
    - Σφυρίχτρες σκύλων, επικοινωνία νυχτερίδων
    - Ιατρική απεικόνιση

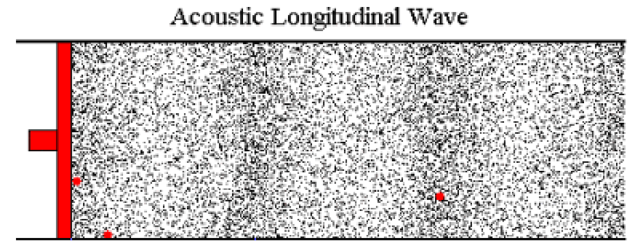
Ηχητικά Κύματα

- Έμβολο σε ακινησία – (a)
  - Αέριο **ασυμπίεστο** και σε ομοιόμορφη κατανομή
- Έμβολο σε κίνηση προς τα δεξιά – (b)
  - **Πίεση** και **πυκνότητα** αερίου μπροστά στο έμβολο είναι **μεγαλύτερη** απ’ ό,τι στο υπόλοιπο μέρος του
- Έμβολο σε ακινησία – (c)
  - **Διάμηκες κύμα** διαδίδεται με ταχύτητα $\vec{u}$
- Η διάδοση συνεχίζεται – (d)

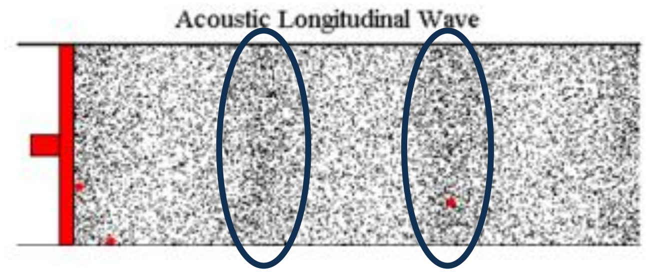


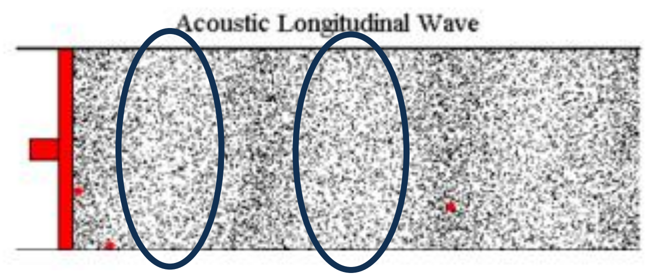
Ηχητικά Κύματα

- **Έμβολο σε απλή αρμονική ταλάντωση**

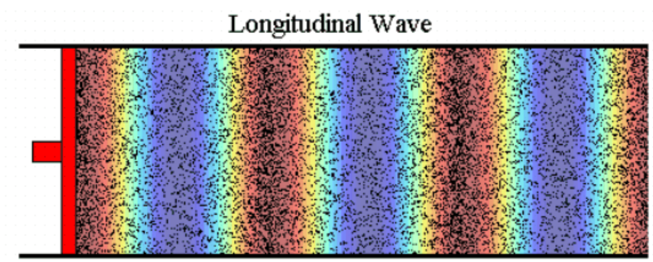


  - Πίεση προς τα εμπρός
    - Περιοχές συμπίεσης (σκούρο)
      - **Πυκνώματα**
  - Τράβηγμα προς τα πίσω
    - Περιοχές αραίωσης (ανοιχτό)
      - **Αραιώματα**



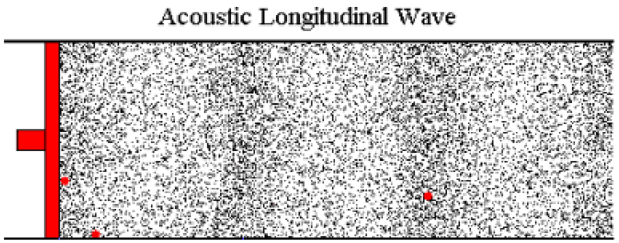


- Διάδοση με ταχύτητα ήχου στο μέσο

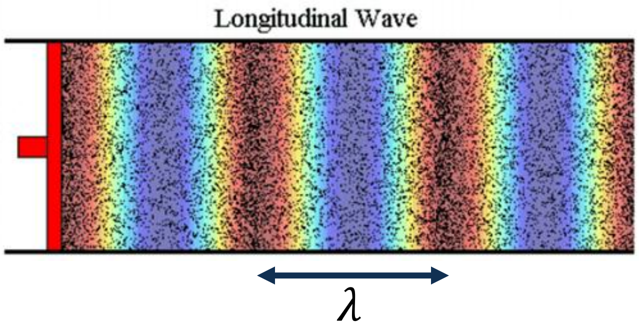


Ηχητικά Κύματα

- **Έμβολο σε απλή αρμονική ταλάντωση**



- Απόσταση μεταξύ διαδοχικών πυκνωμάτων ή αραιωμάτων
  - **Μήκος κύματος λ**

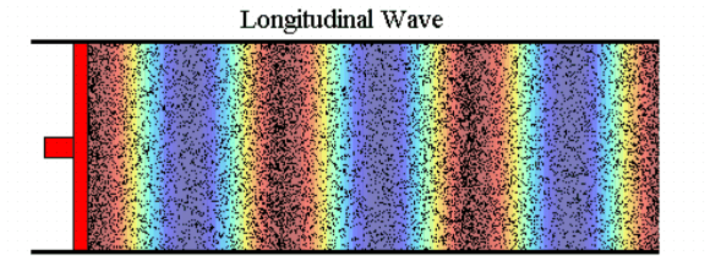


- Κάθε μικρός όγκος αερίου εκτελεί απλή αρμονική κίνηση **παράλληλη** προς τη διεύθυνση διάδοσης

$$s(x,t) = s_{max}\cos(kx - \omega t)$$

- Ο όρος s_{max} δηλώνει το **πλάτος μετατόπισης**
  - Είναι η μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου από τη θέση ισορροπίας

Ηχητικά Κύματα



- **Μεταβολή πίεσης αερίου ΔP**

- Η **πίεση** σε κάθε θέση x μεταβάλλεται γύρω από μια τιμή ισορροπίας

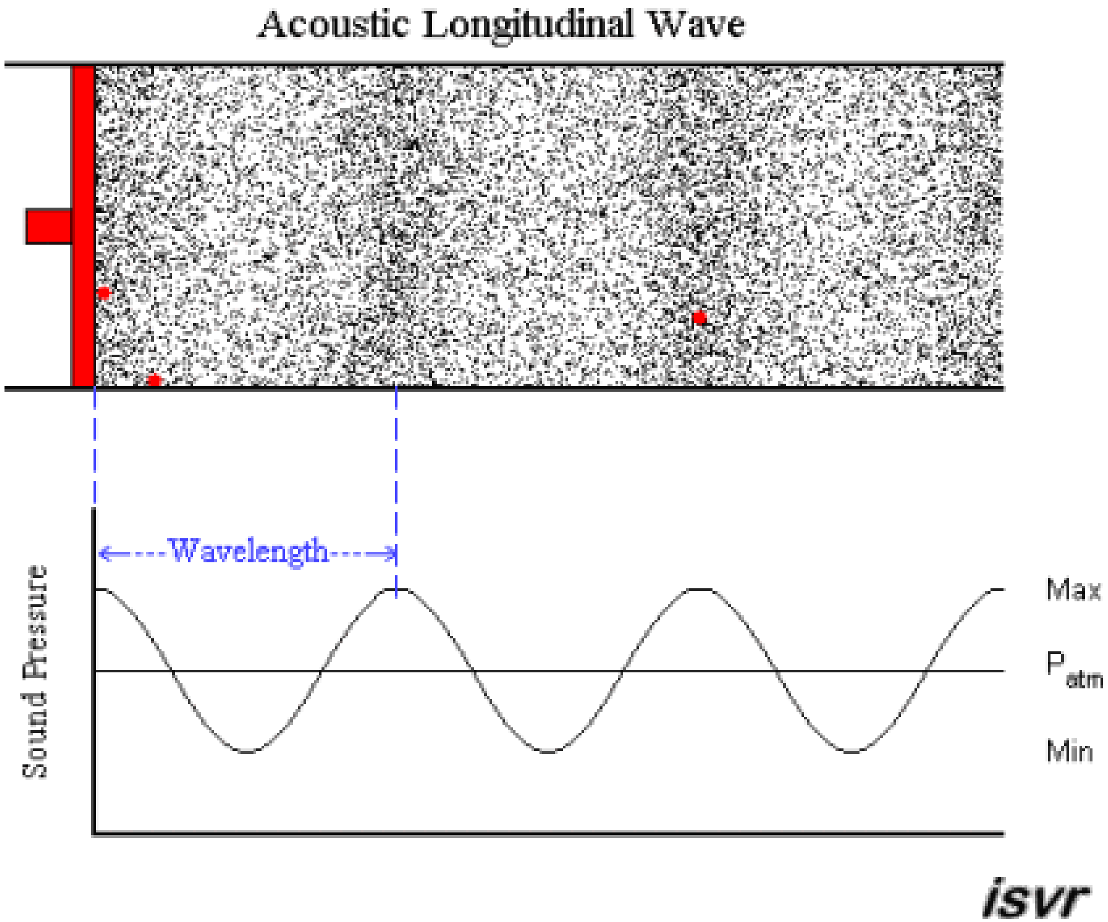
$$\Delta P(x,t) = \Delta P_{max}\sin(kx - \omega t)$$

όπου ΔP_{max} η μέγιστη μεταβολή της πίεσης γύρω από την τιμή ισορροπίας

- Ο όρος ΔP_{max} ονομάζεται **πλάτος πίεσης**

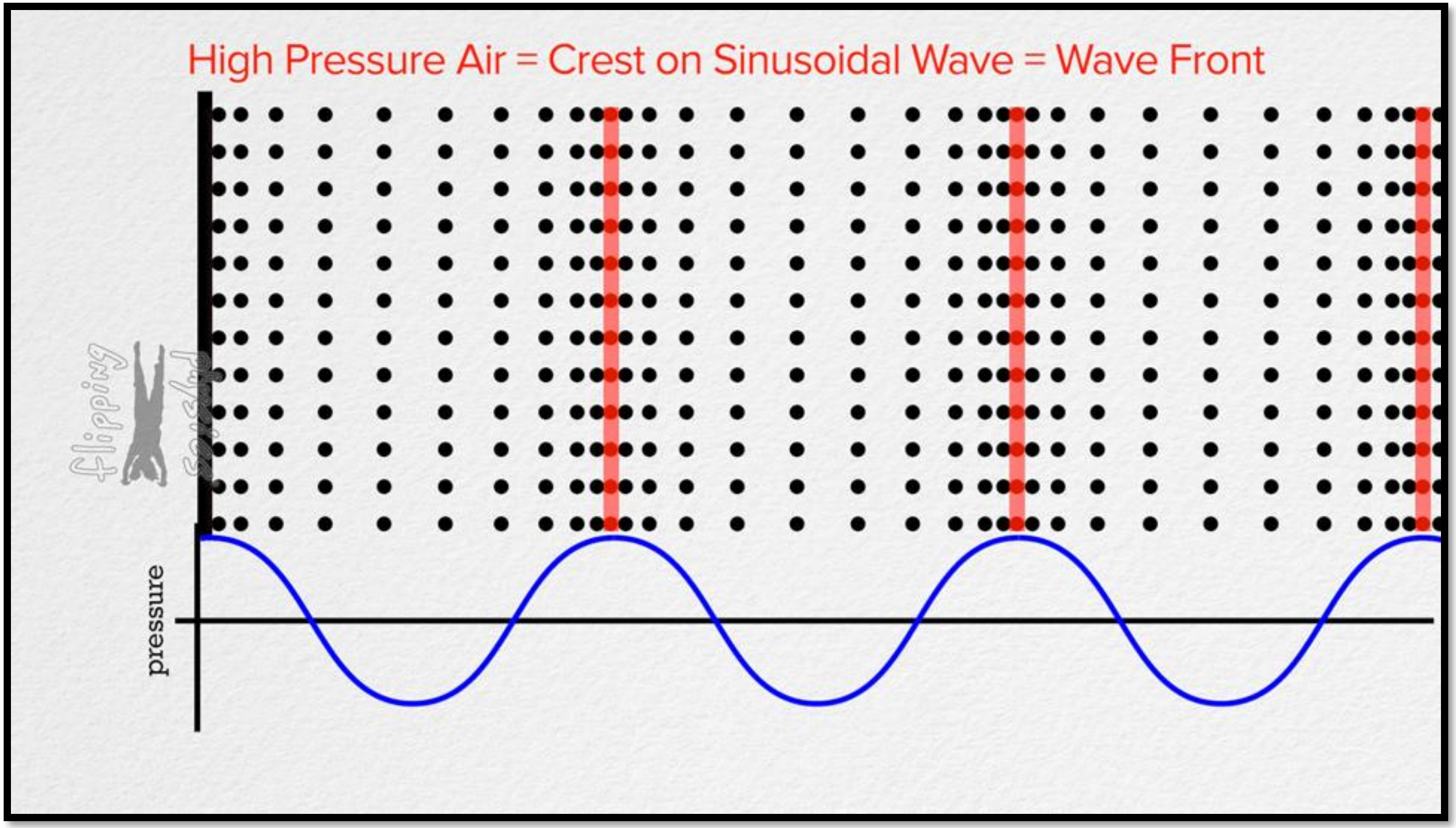
Ηχητικά Κύματα

- **Μεταβολή πίεσης αερίου ΔP**



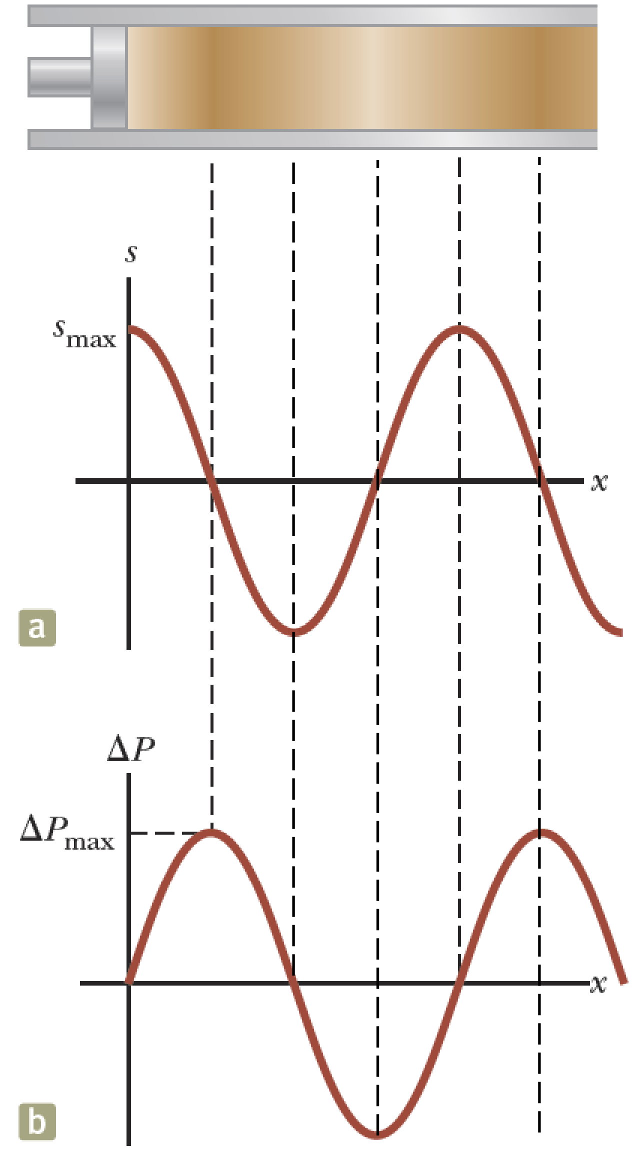
Ηχητικά Κύματα

- **Μεταβολή πίεσης αερίου ΔΡ**



Ηχητικά Κύματα

- **Μεταβολή πίεσης αερίου $\Delta P(x,t)$ και μετατόπισης $s(x,t)$**



- Η μετατόπιση που περιγράψαμε ως συνημιτονοειδής συνάρτηση οδηγεί σε μεταβολή πίεσης ως ημιτονοειδή συνάρτηση
- Διαφορά φάσης $\pi/2$
- Μεταβολή πίεσης μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή) → μετατόπιση μηδενική!
- Μετατόπιση μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή) → μεταβολή πίεσης μηδενική!

Ηχητικά Κύματα

- **Ταχύτητα διάδοσης ήχου στον αέρα**

$$u = 331\sqrt{1 + \frac{T_c}{273}}$$

όπου T_c η θερμοκρασία του αέρα (σε βαθμούς C)

- **Παράδειγμα:**
- Πώς θα μετρήσουμε σε πόση απόσταση από μας έπεσε ένας κεραυνός που μόλις είδαμε, αν ακούσουμε τον κρότο του (βροντή) σε t δευτερόλεπτα?

Ηχητικά Κύματα

Γιατί συμβαίνει αυτό???

- **Ταχύτητα διάδοσης ήχου σε άλλα υλικά**

Table 17.1 **Speed of Sound in Various Media**

Medium	v (m/s)	Medium	v (m/s)	Medium	v (m/s)
Gases		**Liquids at 25°C**		**Solids**[a]	
Hydrogen (0°C)	1 286	Glycerol	1 904	Pyrex glass	5 640
Helium (0°C)	972	Seawater	1 533	Iron	5 950
Air (20°C)	343	Water	1 493	Aluminum	6 420
Air (0°C)	331	Mercury	1 450	Brass	4 700
Oxygen (0°C)	317	Kerosene	1 324	Copper	5 010
		Methyl alcohol	1 143	Gold	3 240
		Carbon tetrachloride	926	Lucite	2 680
				Lead	1 960
				Rubber	1 600

[a]Values given are for propagation of longitudinal waves in bulk media. Speeds for longitudinal waves in thin rods are smaller, and speeds of transverse waves in bulk are smaller yet.

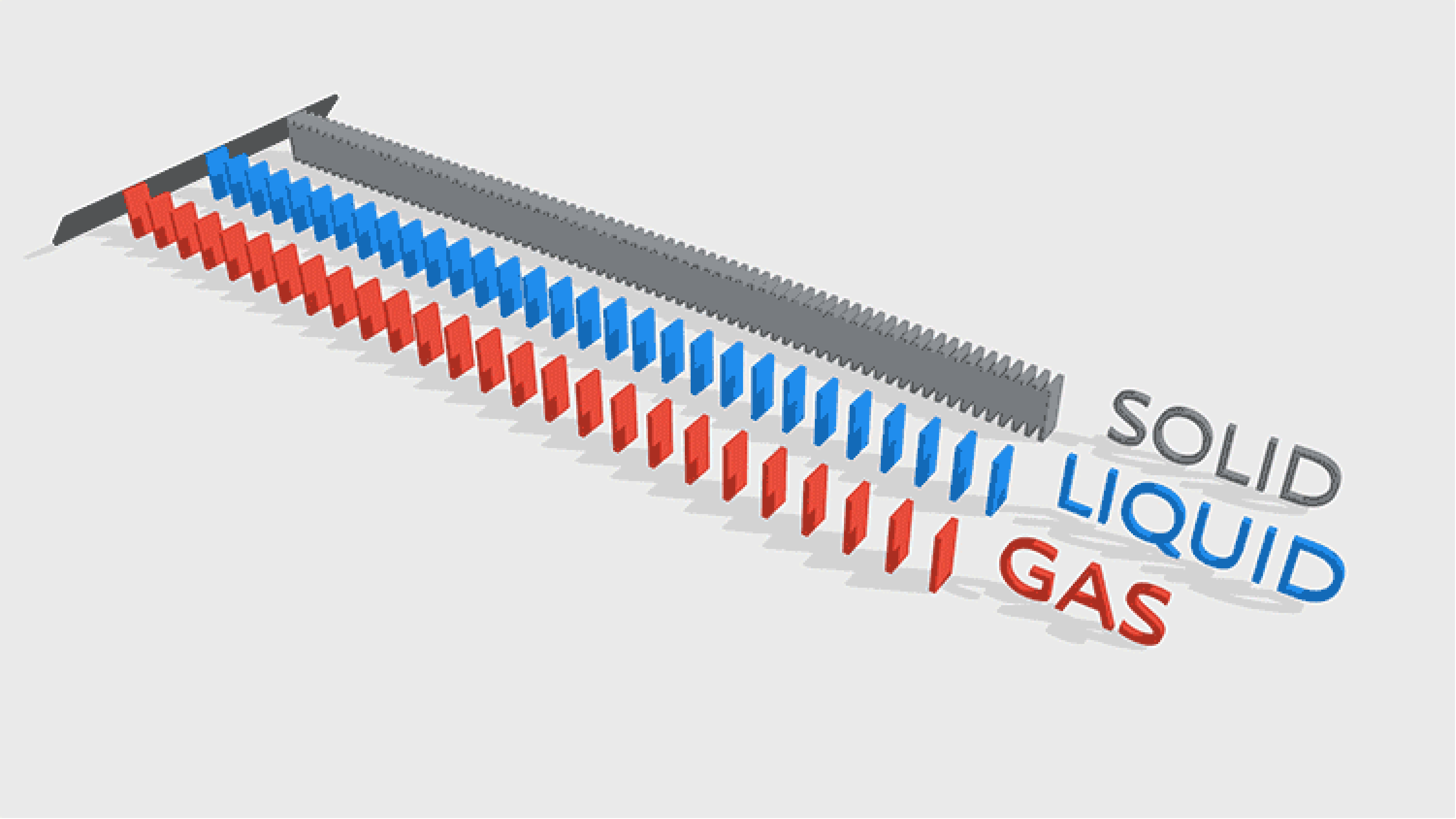
Αύξηση θερμοκρασίας ⟹ αύξηση
κινητικής ενέργειας μορίων

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

B = μέτρο ελαστικότητας όγκου
ρ = πυκνότητα

Ηχητικά Κύματα

- **Ταχύτητα διάδοσης ήχου σε άλλα υλικά**
- Ο πίνακας μας δείχνει ότι $u_{στερεα} > u_{υγρα} > u_{αερια}$. Γιατί??



Ηχητικά Κύματα

- **Ένταση περιοδικών ηχητικών κυμάτων**

$$I = \frac{\text{Μέση Ισχύς}}{A} = \frac{\mathrm{P_{avg}}}{A}$$

όπου $\mathrm{P_{avg}}$ η μέση ισχύς του κύματος και A το εμβαδό της επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση διάδοσης

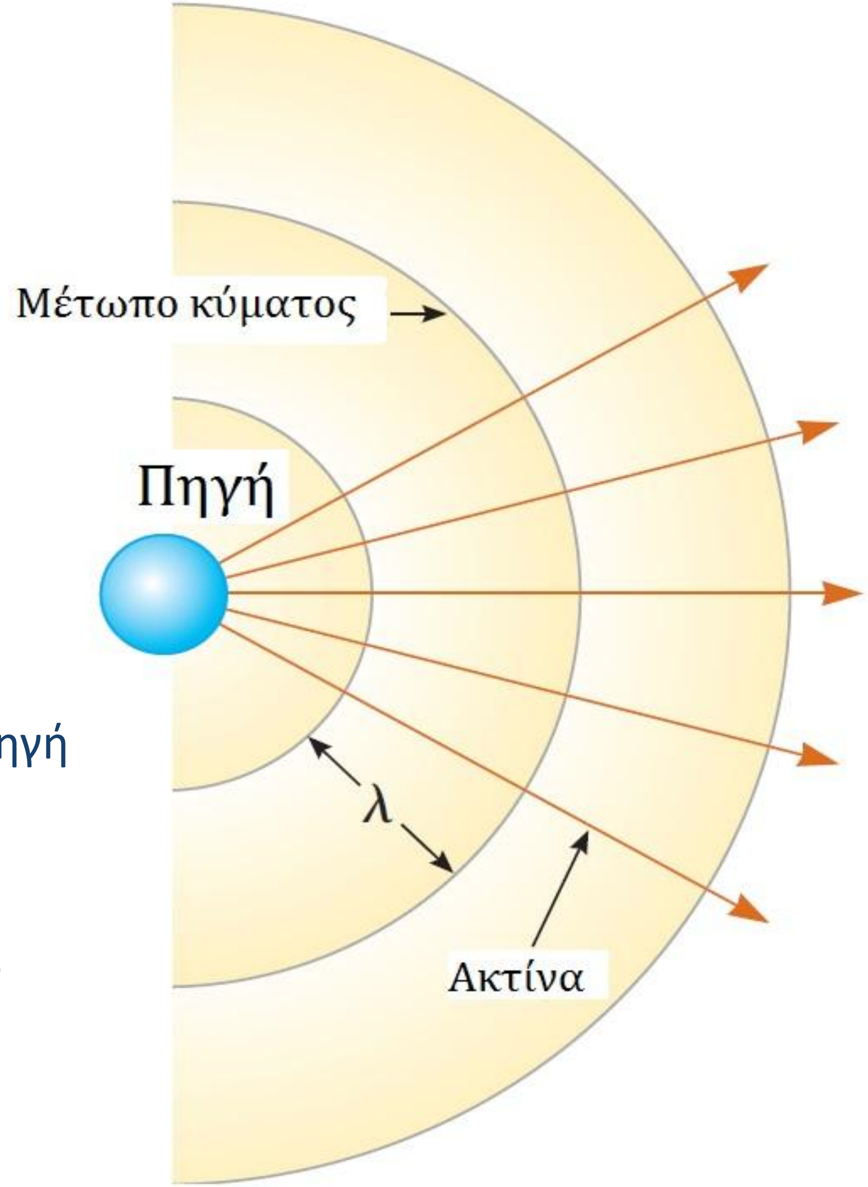
- Τα κύματα που είδαμε ως τώρα μοντελοποιούνταν ως διαμήκη κύματα
  - Διαδίδονταν σε ευθεία γραμμή
- Στην πράξη, τα ηχητικά κύματα διαδίδονται προς όλες τις κατευθύνσεις
  - **Σφαιρικά κύματα**
  - **Ισοτροπική διάδοση → ίδια ένταση προς κάθε κατεύθυνση**

Ηχητικά Κύματα

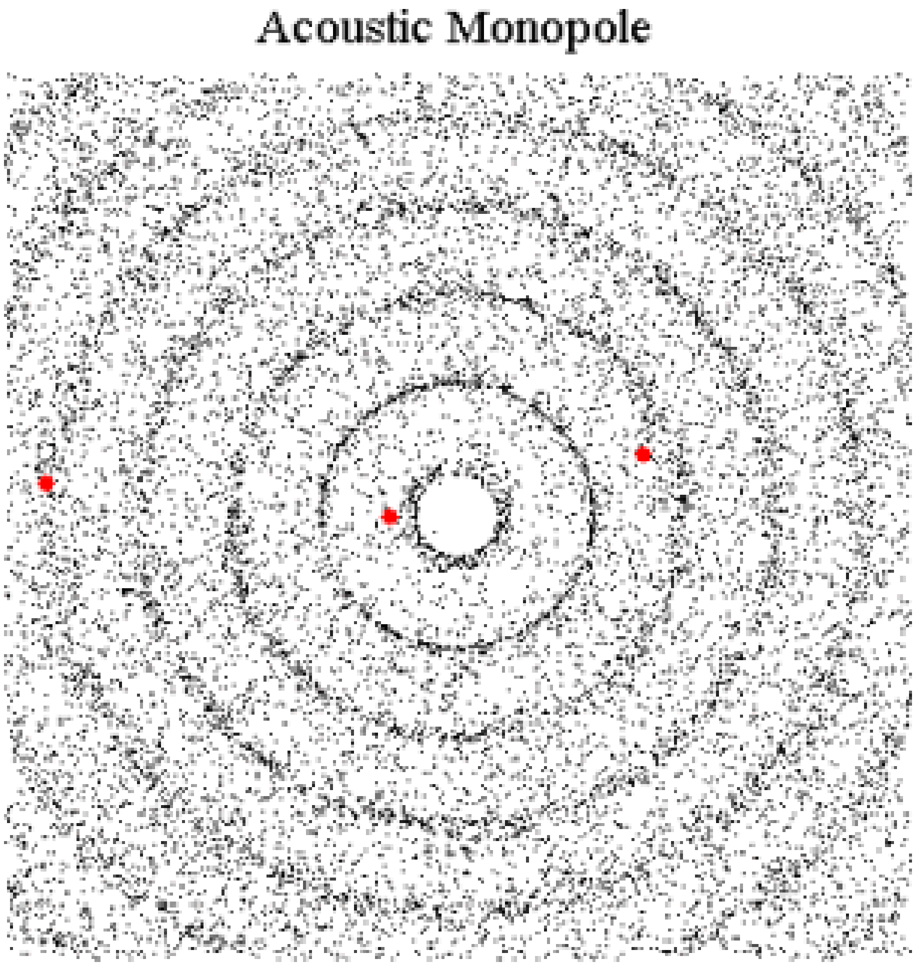
- **Σφαιρικό κύμα**
  - Ομόκεντρα κυκλικά τόξα
- **Μέτωπο κύματος**
  - Επιφάνεια όπου η φάση
    $$(kr - \omega t + \varphi)$$
    του κύματος έχει ίδια τιμή
- **Ακτίνες**
  - Ευθείες που ξεκινούν απ'την πηγή
  - Δείχνουν την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος
- **Ένταση κύματος σε απόσταση r**

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Εμβαδό μετώπου

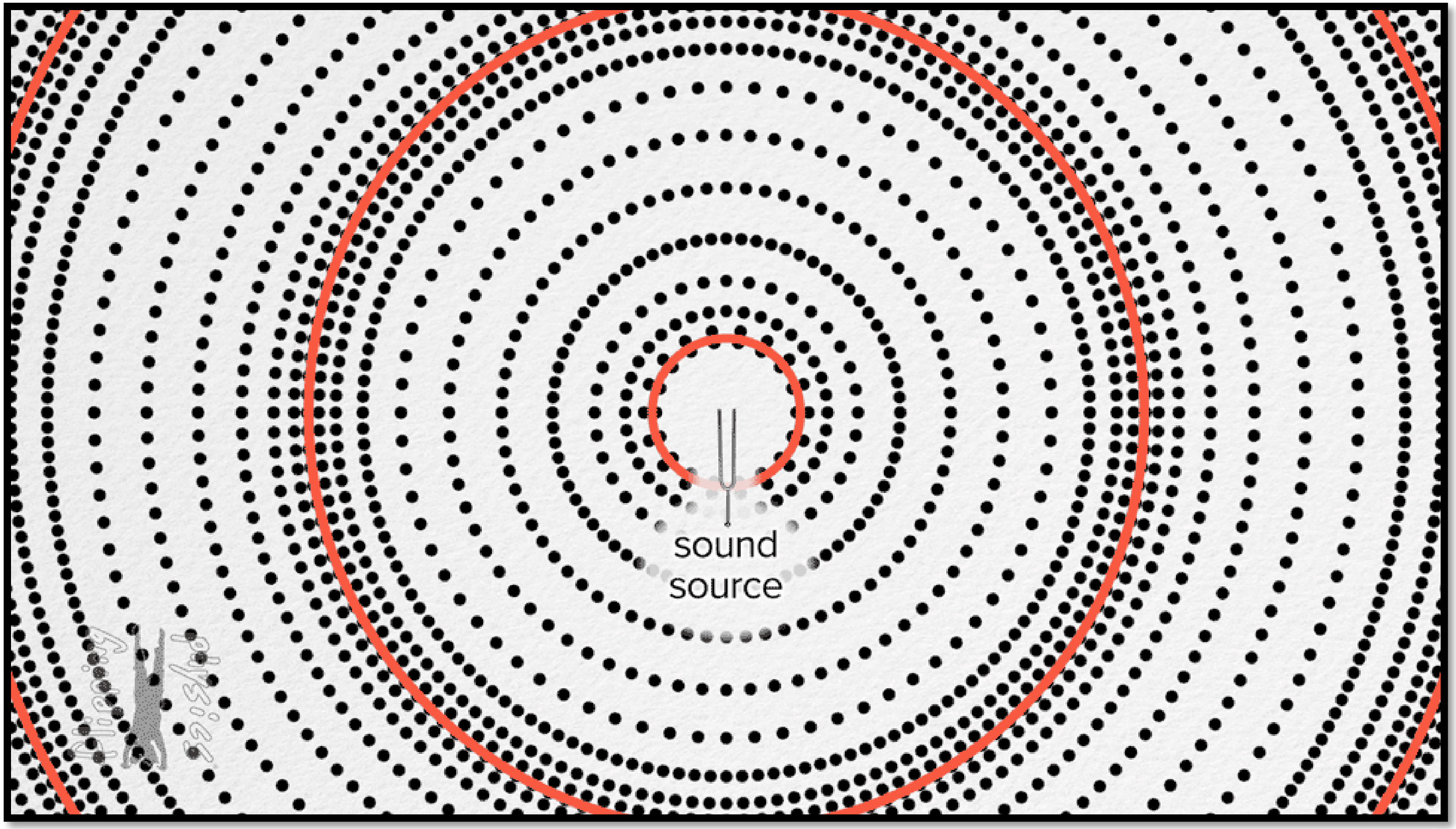


Ηχητικά Κύματα

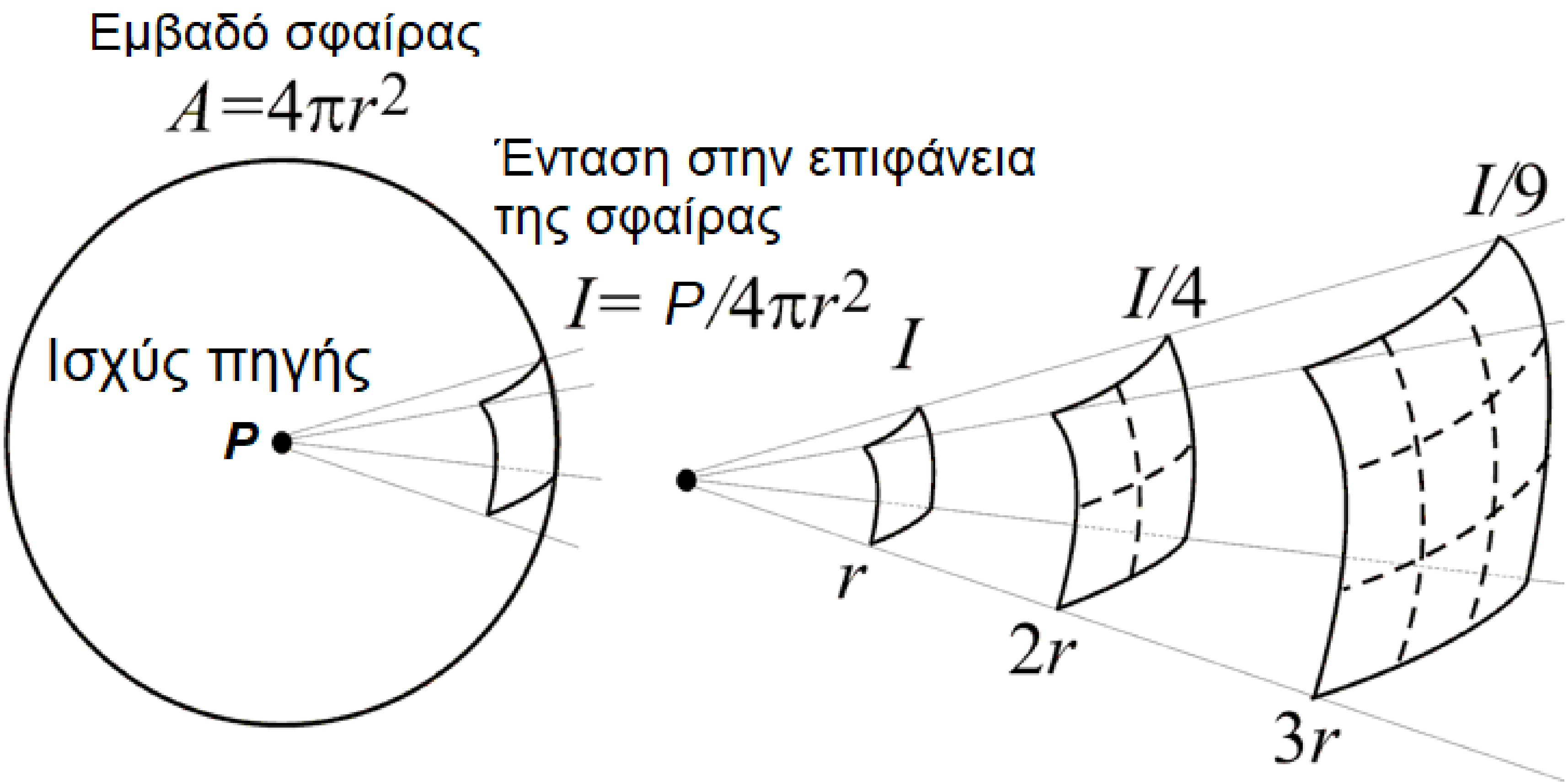


isvr

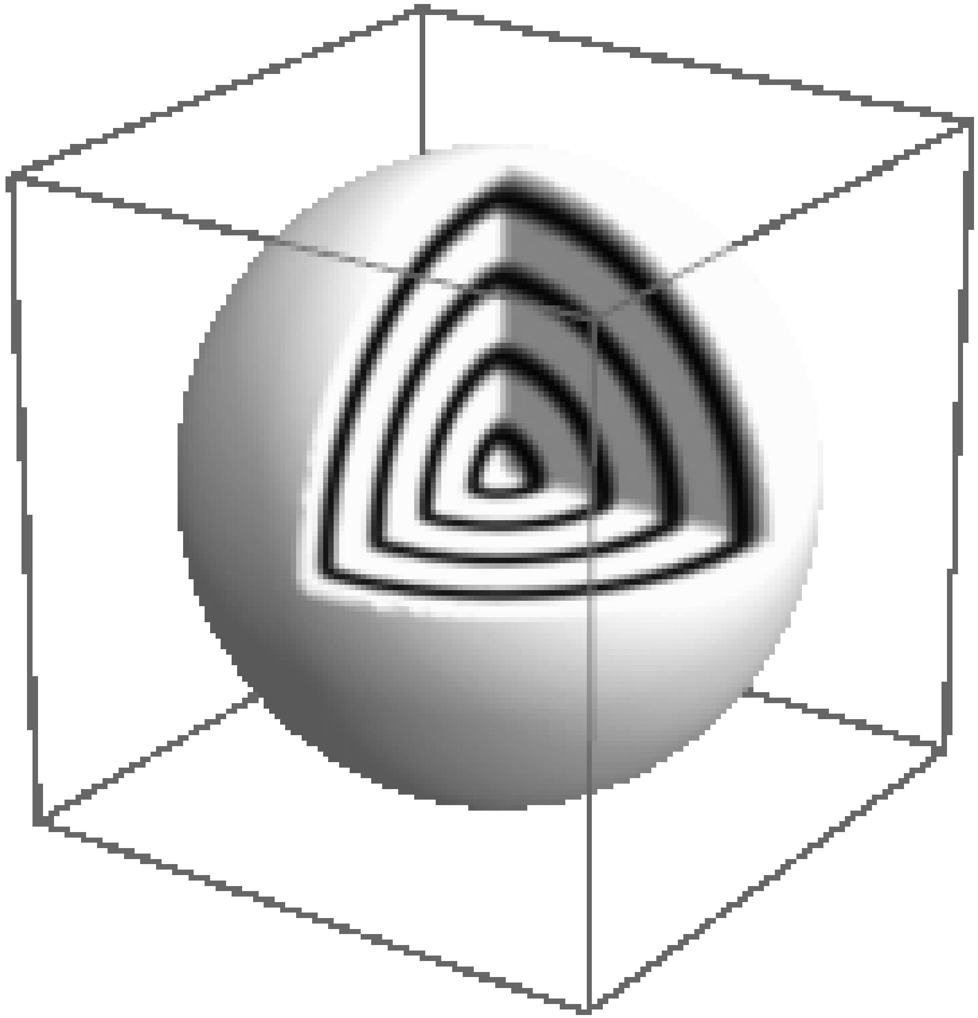
Ηχητικά Κύματα



Ηχητικά Κύματα



Ηχητικά Κύματα



Ηχητικά Κύματα

- Οι ασθενέστεροι ήχοι που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί στη συχνότητα των 1000 Hz έχουν ένταση περίπου $10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$
- Αυτό είναι το λεγόμενο **κατώφλι ακοής (στα 1000 Hz)**.
- Οι δυνατότεροι ήχοι που μπορούμε να ακούσουμε (χωρίς πόνο) είναι έντασης $1\,\frac{W}{m^2}$
- Λόγος μέγιστης προς ελάχιστη ένταση: 10^{12} !!!

Ηχητικά Κύματα

Click here for a more interesting dB range ☺

- **Ηχοστάθμη**
  - Μεγάλο εύρος εντάσεων αντιληπτό απ' το αυτί μας
  - Μια λογαριθμική κλίμακα είναι βολικότερη
  - **Ηχοστάθμη (sound level)**

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

  - I_0 : **ένταση αναφοράς** (κατώφλι ακοής)
  - $I_0 = 1 \times 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$
    - Για συχνότητες 1000 Hz
    - Στην πραγματικότητα, είναι μεταβλητή
  - β : μετριέται σε Decibel (dB)
    - Προς τιμήν του A. G. Bell

  - Κατώφλι ακοής: 0 dB
  - Όριο πόνου: 120-130 dB

Sound Levels

Source of Sound	β (dB)
Nearby jet airplane	150
Jackhammer; machine gun	130
Siren; rock concert	120
Subway; power lawn mower	100
Busy traffic	80
Vacuum cleaner	70
Normal conversation	60
Mosquito buzzing	40
Whisper	30
Rustling leaves	10
Threshold of hearing	0

Ηχητικά Κύματα

- **Παράδειγμα:**
- Δυο **ίδιες** μηχανές βρίσκονται στην ίδια απόσταση από έναν εργάτη. Η ένταση του ήχου που λαμβάνει ο εργάτης κατά τη λειτουργία κάθε μηχανής είναι ίση με $2 \cdot 10^{-7}$ W/m².
  Α) Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργεί η μια μηχανή.
  Β) Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργούν και οι δυο μηχανές.
  Γ) Αν ο εργάτης δε λαμβάνει την ίδια ένταση ήχου από κάθε μηχανή αλλά γνωρίζει ότι αυτές βρίσκονται σε απόσταση $r_1 = 10$ m και $r_2 = 20$ m αντίστοιχα, τότε ποιός είναι ο λόγος των εντάσεών τους?

Ηχητικά Κύματα

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$$
$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$
$$\log(a^b) = b\log(a)$$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Δυο ίδιες μηχανές βρίσκονται στην ίδια απόσταση από έναν εργάτη. Η ένταση του ήχου κατά τη λειτουργία κάθε μηχανής είναι ίση με $2 \cdot 10^{-7}$ W/m².
  Α) Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργεί η μια μηχανή.

Είναι $\left.\begin{array}{l} \beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} \\ I_0 = 10^{-12}\ \frac{W}{m^2} \\ I = 2\cdot 10^{-7}\ \frac{W}{m^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 10\log_{10}\frac{2\cdot 10^{-7}}{10^{-12}}$

$= 10\log_{10}(2\cdot 10^{-7}\cdot 10^{12})$

$= 10\log_{10}(2\cdot 10^{5})$

$= 10\cdot\log_{10}2 + 10\log_{10}10^{5} = 10\cdot\log_{10}2 + 50\log_{10}10$

$= 10\log_{10}2 + 50\cdot 1 = 50 + \cancel{10\log_{10}2} \simeq 53\ dB$

$\simeq 3$

Ηχητικά Κύματα

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$$
$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$
$$\log(a^b) = b\log(a)$$

Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ίδιες μηχανές βρίσκονται στην ίδια απόσταση από έναν εργάτη. Η ένταση του ήχου κατά τη λειτουργία κάθε μηχανής είναι ίση με $2 \cdot 10^{-7}$ W/m².
  Β) Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργούν και οι δυο μηχανές.

Είναι

$$\left.\begin{array}{l} \beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} \\ I_0 = 10^{-12}\ \frac{W}{m^2} \\ I = 4\cdot 10^{-7}\ \frac{W}{m^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = 10\log_{10}\frac{4\cdot 10^{-7}}{10^{-12}}$$

$$= 10\log_{10}(4\cdot 10^{-7}\cdot 10^{12})$$

$$= 10\log_{10}(4\cdot 10^{5})$$

$$= 10\cdot\log_{10}4 + 10\log_{10}10^{5} = \underbrace{10\log_{10}4}_{\simeq 6} + 50 \simeq 56\ dB$$

Ηχητικά Κύματα

$$I = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2}$$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Γ) Αν ο εργάτης δε λαμβάνει την ίδια ένταση ήχου από κάθε μηχανή αλλά γνωρίζει ότι αυτές βρίσκονται σε απόσταση $r_1 = 10$ m και $r_2 = 20$ m αντίστοιχα, τότε ποιός είναι ο λόγος των εντάσεών τους?

Θα είναι

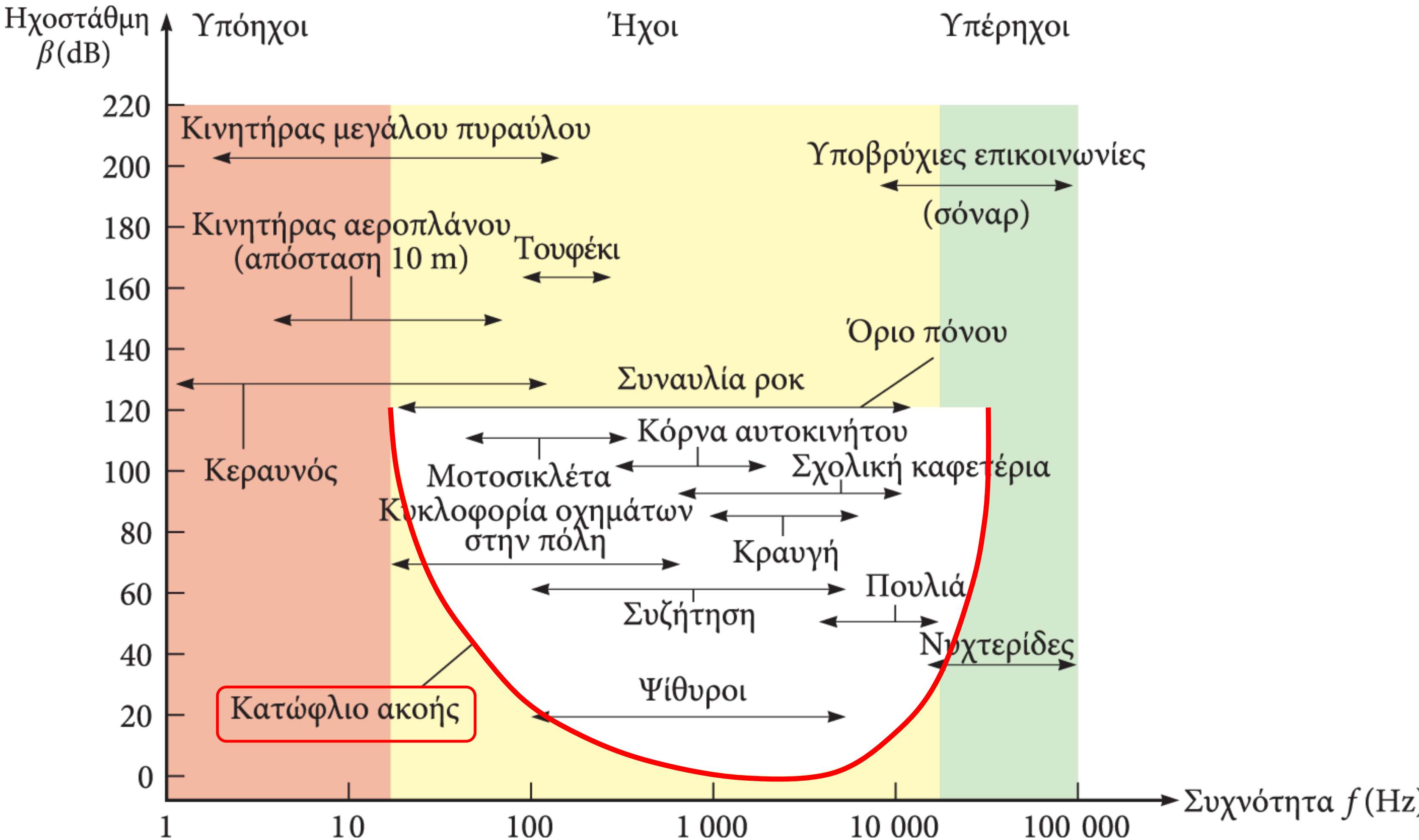
$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{P}{4\pi r_1^2} \\ I_2 &= \frac{P}{4\pi r_2^2} \\ r_1 &= 10 \text{ m} \\ r_2 &= 20 \text{ m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{\cancel{P}}{\cancel{4\pi} r_1^2}}{\frac{\cancel{P}}{\cancel{4\pi} r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Άρα $\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{20}{10}\right)^2 = 4.$

Άρα $\frac{I_1}{I_2} = 4.$

Ηχητικά Κύματα

- **Ακουστότητα και Συχνότητα – Ψυχοακουστική**



Ηχητικά Κύματα

- **Ψυχοακουστική:**
  - Η επιστήμη που μελετά πως αντιλαμβάνονται οι άνθρωποι τον ήχο
  - Δεν ακούμε όλοι με τον ίδιο τρόπο! ☺
  - Παίζει μεγάλο ρόλο το τι **νομίζουμε** ότι ακούμε

  - Δυο συνιστώσες:
    - Φυσιολογία του ήχου (πως το σώμα μας λαμβάνει τον ήχο)
    - Ψυχολογία του ήχου (πως ερμηνεύει ο εγκέφαλός μας τον ήχο)

  - Ακούμε μόνο ένα μικρό τμήμα του ακουστικού φάσματος
  - Από 20 Hz ως περίπου 20000 Hz

Ηχητικά Κύματα

- **Ψυχοακουστική:**
  - Παράγοντες που επηρεάζουν την αντίληψη του ήχου

  - Ηλικία
  - Σχήμα και μέγεθος αυτιού
  - Οστική πυκνότητα
  - Σωματικό βάρος

  - Φυσιολογικοί παράγοντες επηρεάζουν το «**τι**» μπορούμε να ακούσουμε…
  - …αλλά ο εγκέφαλός μας αποφασίζει «**πως**» το ακούμε! ☺
    - Π.χ. «πτώση ενός ποτηριού σε ένα μπαρ» vs «πτώση ενός ποτηριού τη νύχτα στο σπίτι μας» → **context (πλαίσιο)**

Ηχητικά Κύματα

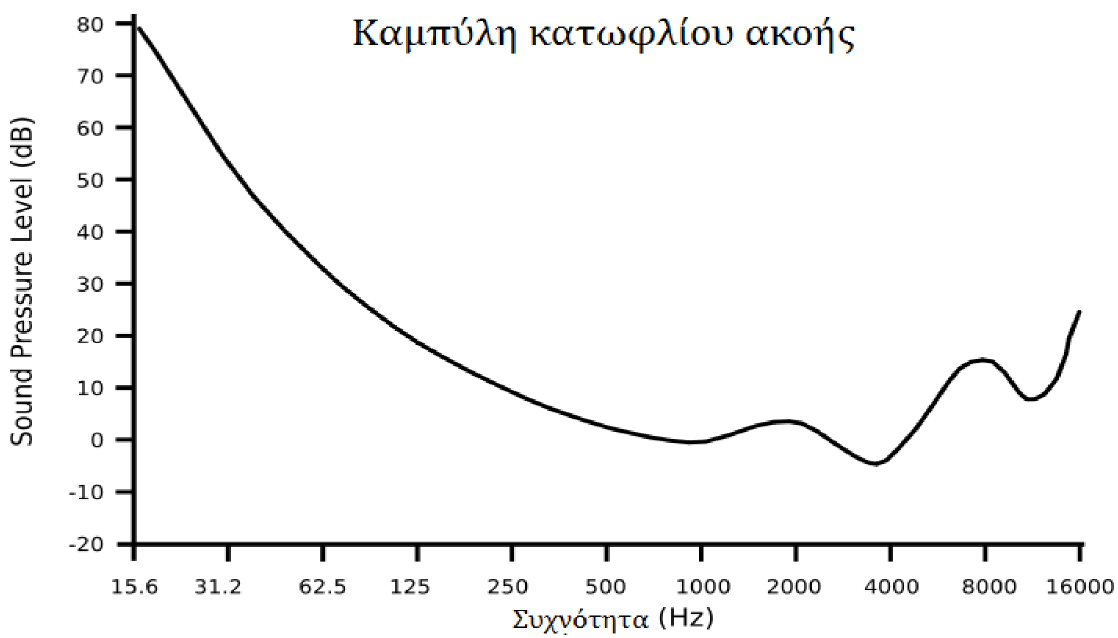
- Ψυχοακουστική: **context (πλαίσιο)**
- Ακούστε μια-μια τις παρακάτω δυο ακολουθίες ήχων
- Επικεντρωθείτε στους **δυο τελευταίους** τόνους (θα τους αναγνωρίσετε από μια παύση που μεσολαβεί μεταξύ διαδοχικών τόνων και των δυο τελευταίων) καθεμιάς
- Πιστεύετε ότι το ζεύγος των τελευταίων τόνων της $1^{ης}$ ηχογράφησης είναι συχνοτικά/ακουστικά το ίδιο με της $2^{ης}$;
- Ακούστε τους τώρα **απομονωμενους** από τους υπόλοιπους

Ηχητικά Κύματα

- **Παράδειγμα εφαρμογής:**
  - Συμπίεση ήχου (MPEG3 standard – MP3)
  - Τρεις σημαντικοί παράγοντες
    - Α. Εξάλειψη ήχων που δεν ακούγονται (< κατώφλι ακοής)
      - Μπορούμε να τους αφαιρέσουμε (μην αποθηκεύσουμε)
    - Β. Κάποιοι ήχοι είναι πιο «ευαίσθητοι» από άλλους
      - Χρήση κρίσιμων ευρών ζώνης (critical bands)
    - Γ. Κάποιοι ήχοι επικαλύπτουν άλλους γειτονικούς
      - Το φαινόμενο του masking (masking effect)

Ηχητικά Κύματα

- **Παράδειγμα εφαρμογής:**
  - Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
  - Α. Εξάλειψη ήχων που δεν ακούγονται (< κατώφλι ακοής)
    - Μπορούμε να τους αφαιρέσουμε
    - Ό,τι βρίσκεται κάτω από το κατώφλι, δε χρειάζεται να απο-θηκευτεί



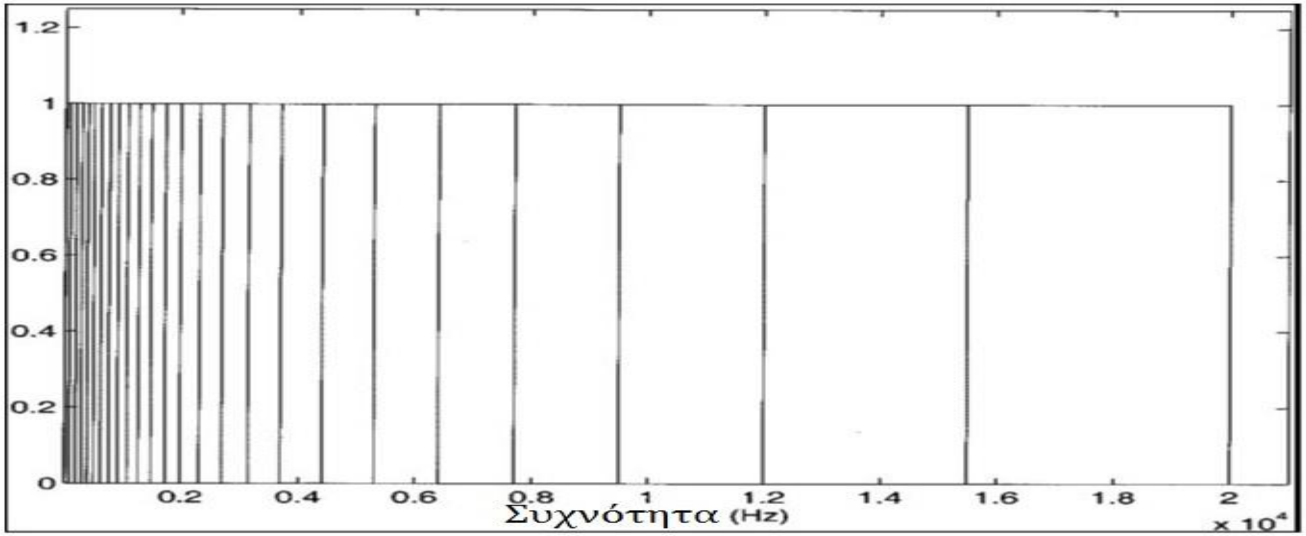
Ηχητικά Κύματα

Ρυθμίστε μέτρια προς χαμηλά την ένταση των ηχείων σας!

- **Παράδειγμα εφαρμογής:**
  - Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
  - Α. Εξάλειψη ήχων που δεν ακούγονται (< κατώφλι ακοής)
  - Μπορείτε να ακούσετε τους ήχους αριστερά?
  - Αυτούς δεξιά?
  - Κάθε γραμμή είναι ένας τόνος στην ίδια συχνότητα αλλά σε διαφορετική ηχοστάθμη (**πάνω** από το κατώφλι ακοής (αριστερή στήλη), **κάτω** από το κατώφλι ακοής (δεξιά στήλη))

Ηχητικά Κύματα

- **Παράδειγμα εφαρμογής:**
  - Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
  - Β. Κάποιοι ήχοι είναι πιο «ευαίσθητοι» από άλλους
    - Χρήση κρίσιμων ευρών ζώνης (critical bands)
    - Διαφορετική «βαρύτητα» σε κάθε ζώνη
    - Διαφορετική «ευαισθησία» του αυτιού σε κάθε ζώνη



Ηχητικά Κύματα

Ρυθμίστε μέτρια προς χαμηλά την ένταση των ηχείων σας!

- **Παράδειγμα εφαρμογής:**
  - Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
  - B. Κάποιοι ήχοι είναι πιο «ευαίσθητοι» από άλλους

500 Hz

550 Hz

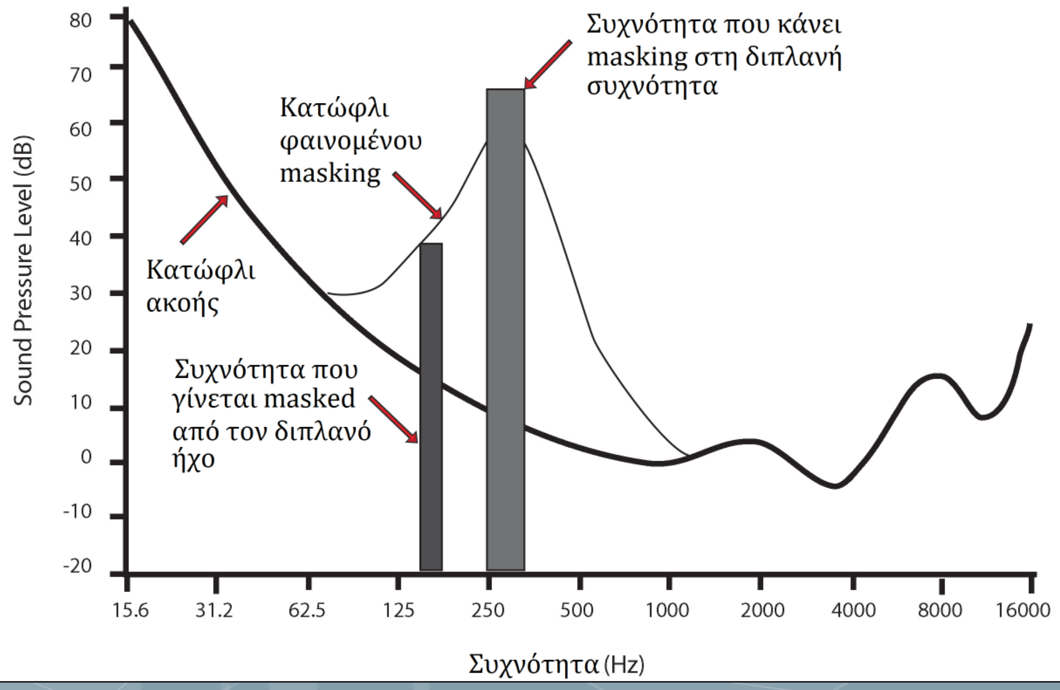
6300 Hz

6500 Hz

- Διακρίνετε με την ίδια **ευκολία** τη διαφορά των 50 Hz στο πρώτο ζεύγος και τη διαφορά των 200 Hz στο δεύτερο ζεύγος?

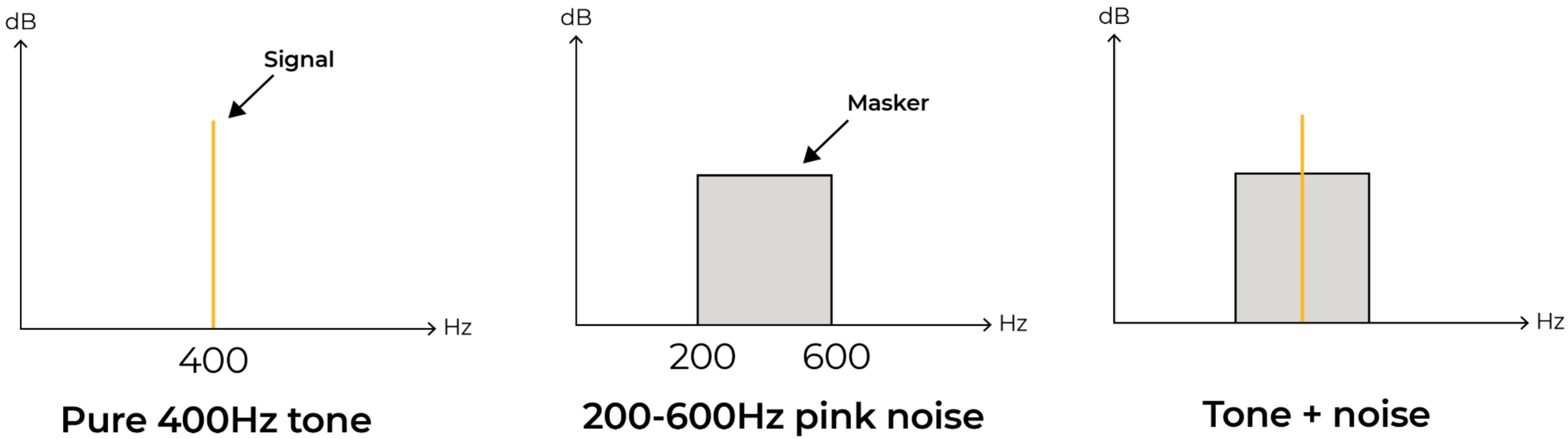
Ηχητικά Κύματα

- **Παράδειγμα εφαρμογής:**
  - Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
  - Γ. Masking effect (σε χρόνο και συχνότητα)
    - Ένας πιο δυνατός ήχος μπορεί να επικαλύψει ένα γειτονικό του
    - Η πληροφορία του γειτονικού ήχου δε χρειάζεται να αποθηκευτεί



Ηχητικά Κύματα

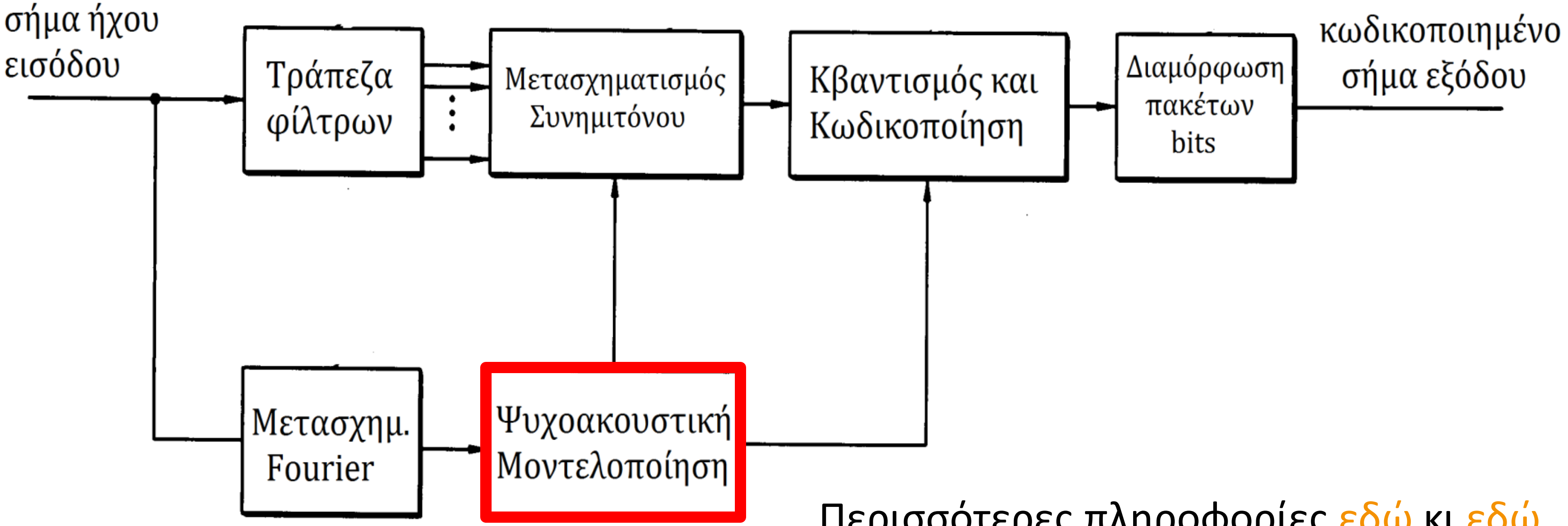
- **Παράδειγμα εφαρμογής:**
  - Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
  - Γ. Masking effect (σε χρόνο και **συχνότητα**)



- Ακούστε τα παραπάνω από αριστερά → δεξιά. Μπορείτε να ακούσετε τον τόνο των 400 Hz στην $3^{η}$ περίπτωση?

Ηχητικά Κύματα

- **Παράδειγμα εφαρμογής:**
  - Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
  - Απλοποιημένο διάγραμμα



Περισσότερες πληροφορίες εδώ κι εδώ (**ΔΕΝ** είναι «εύπεπτα» κείμενα).

Εικόνα: Τα αυτιά του ανθρώπου έχουν εξελιχθεί να ακούν και να ερμηνεύουν ηχητικά κύματα ως φωνή ή ως ήχους. Κάποια ζώα, όπως το είδος αλεπούς με τα αυτιά νυχτερίδας, έχουν αυτιά που είναι προσαρμοσμένα να ακούν πολύ αδύναμους ήχους.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηχητικά Κύματα

Το φαινόμενο Doppler

Εικόνα: Τα αυτιά του ανθρώπου έχουν εξελιχθεί να ακούν και να ερμηνεύουν ηχητικά κύματα ως φωνή ή ως ήχους. Κάποια ζώα, όπως το είδος αλεπούς με τα αυτιά νυχτερίδας, έχουν αυτιά που είναι προσαρμοσμένα να ακούν πολύ αδύναμους ήχους.

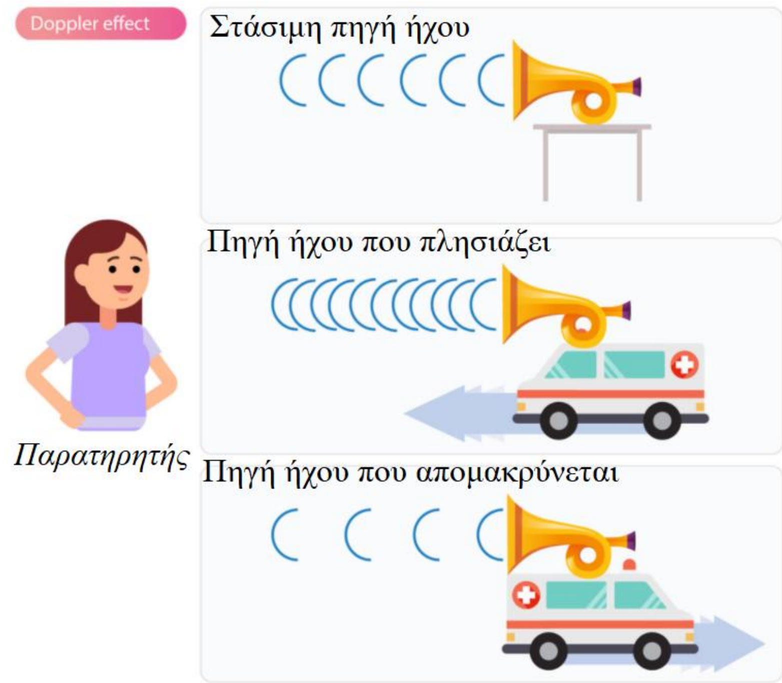
Φυσική για Μηχανικούς

Ηχητικά Κύματα

Το φαινόμενο Doppler

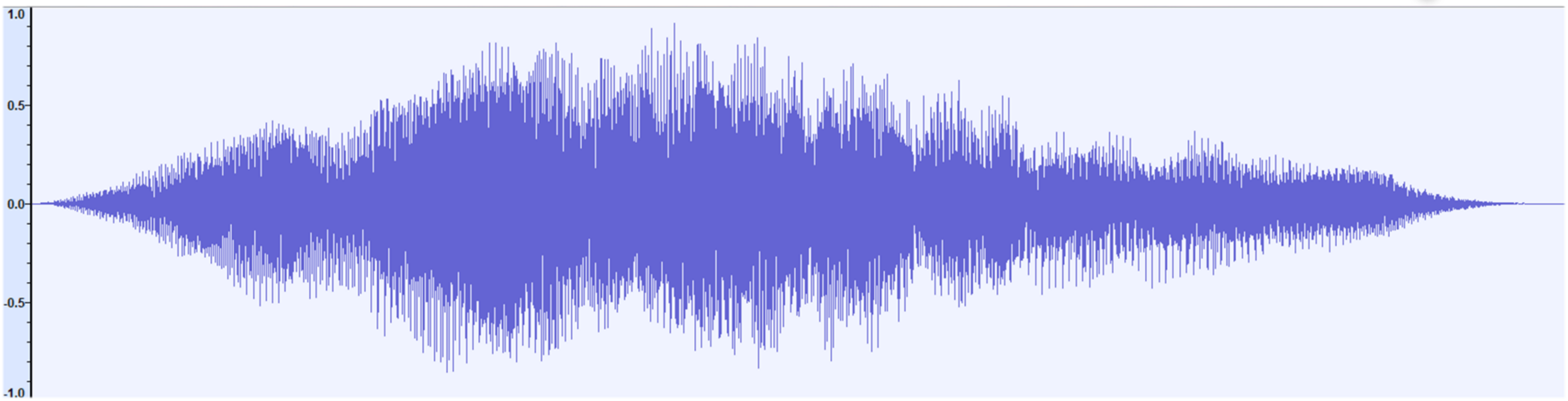
Ηχητικά Κύματα

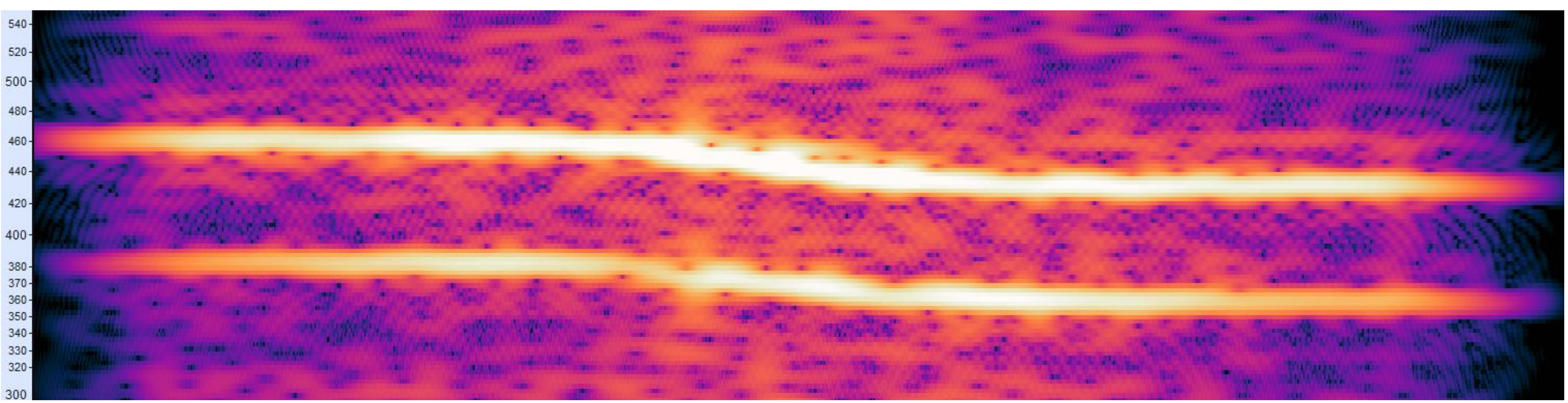
- **Το φαινόμενο Doppler**
  - Άκρως συχνή εμπειρία!
  - Ένα όχημα με σειρήνα μας πλησιάζει και απομακρύνεται από μας
    - Το ακούμε με υψηλότερη συχνότητα καθώς έρχεται προς εμάς
    - Το ακούμε με χαμηλότερη συχνότητα καθώς απομακρύνεται



Ηχητικά Κύματα

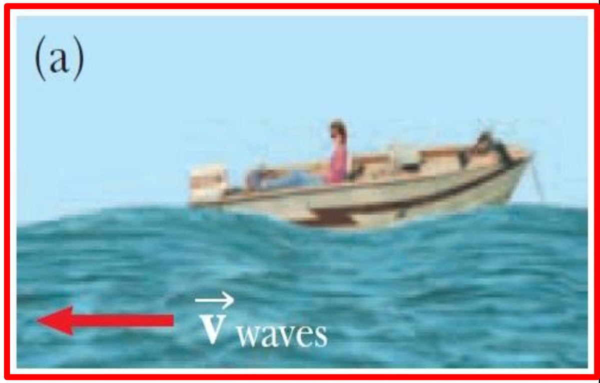
- **Το φαινόμενο Doppler**

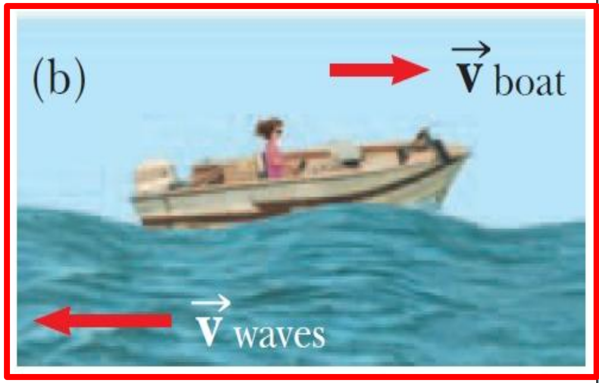




Ηχητικά Κύματα

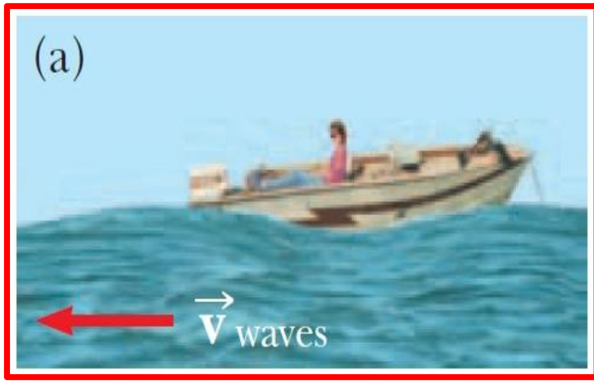
- **Το φαινόμενο Doppler**
  - Διαισθητική κατανόηση
    - Κύματα χτυπούν την ακίνητη βάρκα με περίοδο T
    - Αν προχωρήσει η βάρκα προς την πηγή, κάθε κυματισμός θα φτάνει γρηγορότερα απ’ ό,τι πριν
      - Λόγω της κίνησής μας προς την πηγή
    - Μετράμε περίοδο $T' < T$
    - Τα κύματα φτάνουν «πιο συχνά» στη βάρκα
      - $f' = {}^{1}/_{T'} > f = {}^{1}/_{T}$

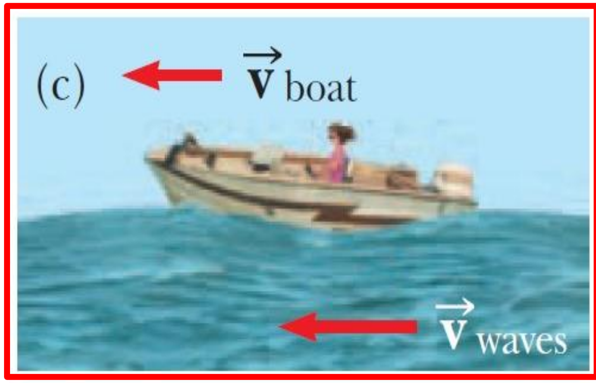




Ηχητικά Κύματα

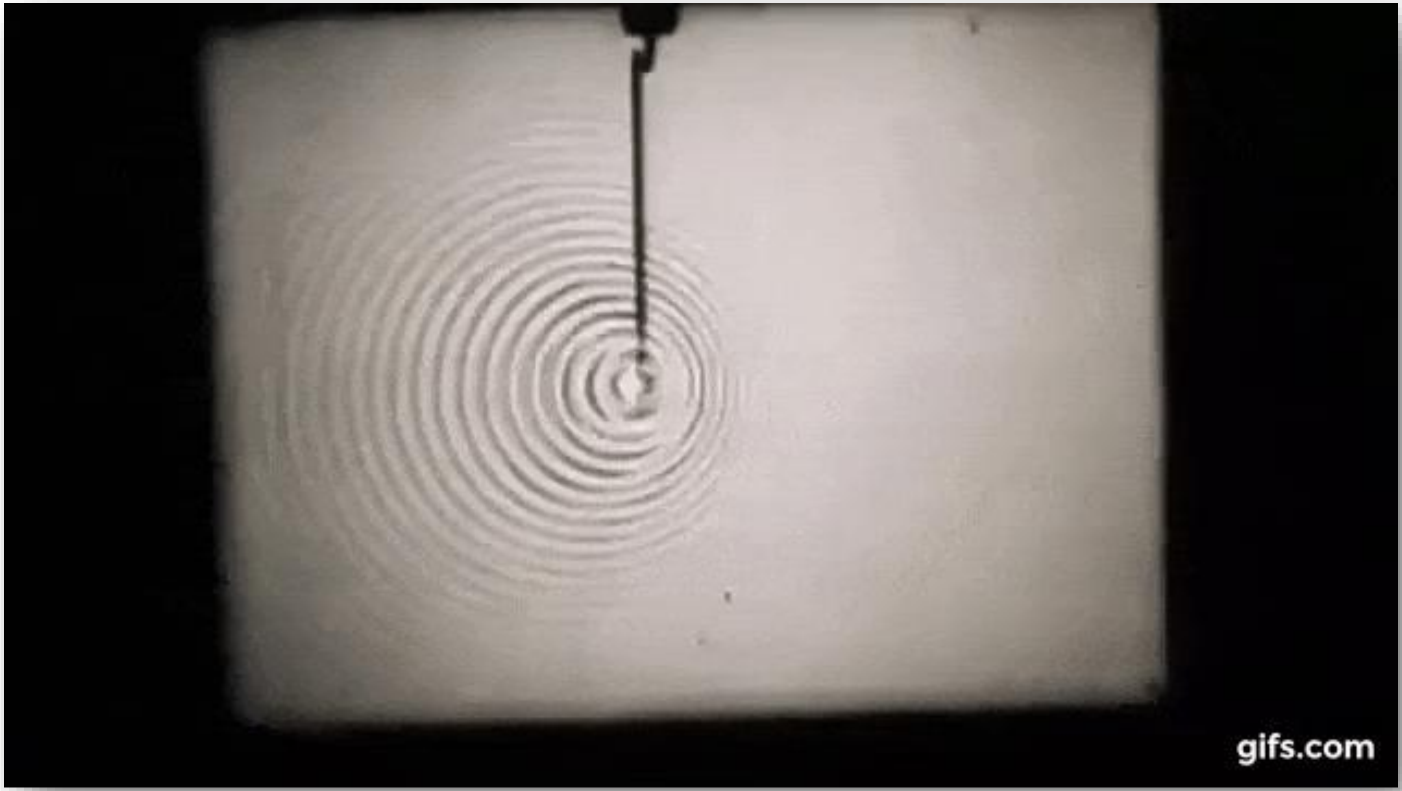
- **Το φαινόμενο Doppler**
  - Διαισθητική κατανόηση
    - Κύματα χτυπούν την ακίνητη βάρκα με περίοδο T
    - Αν προχωρήσει η βάρκα μακριά από την πηγή, κάθε κυματισμός θα φτάνει αργότερα απ' ό,τι πριν
      - Λόγω της κίνησής μας μακριά από την πηγή
    - Μετράμε περίοδο $T' > T$
    - Τα κύματα φτάνουν «πιο αραιά» στη βάρκα
      - $f' = {}^{1}/_{T'} < f = {}^{1}/_{T}$





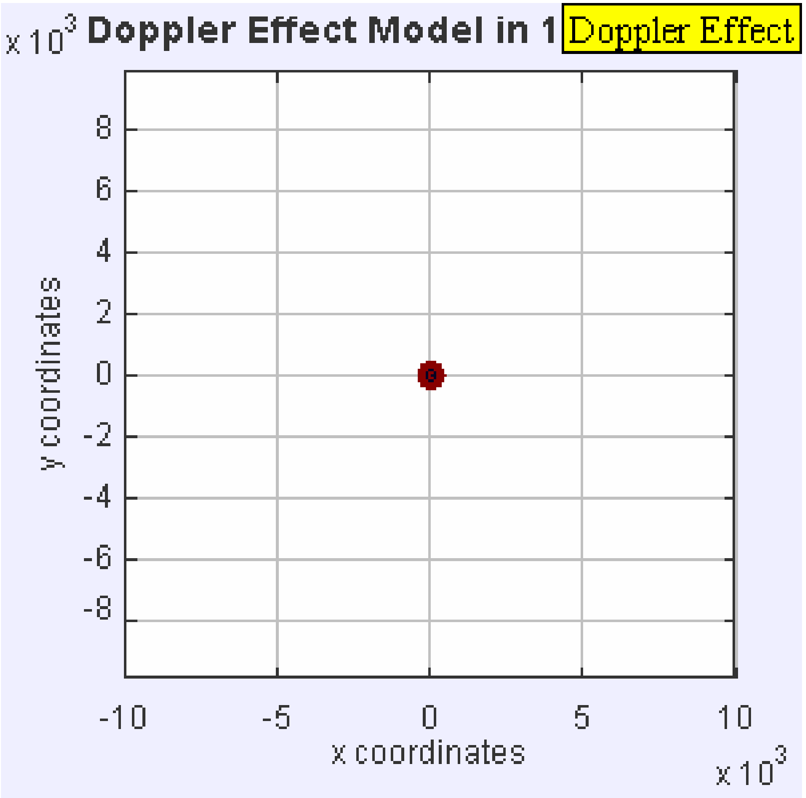
Ηχητικά Κύματα

- **Το φαινόμενο Doppler**
  - Ευθέως ανάλογα για μια ηχητική πηγή



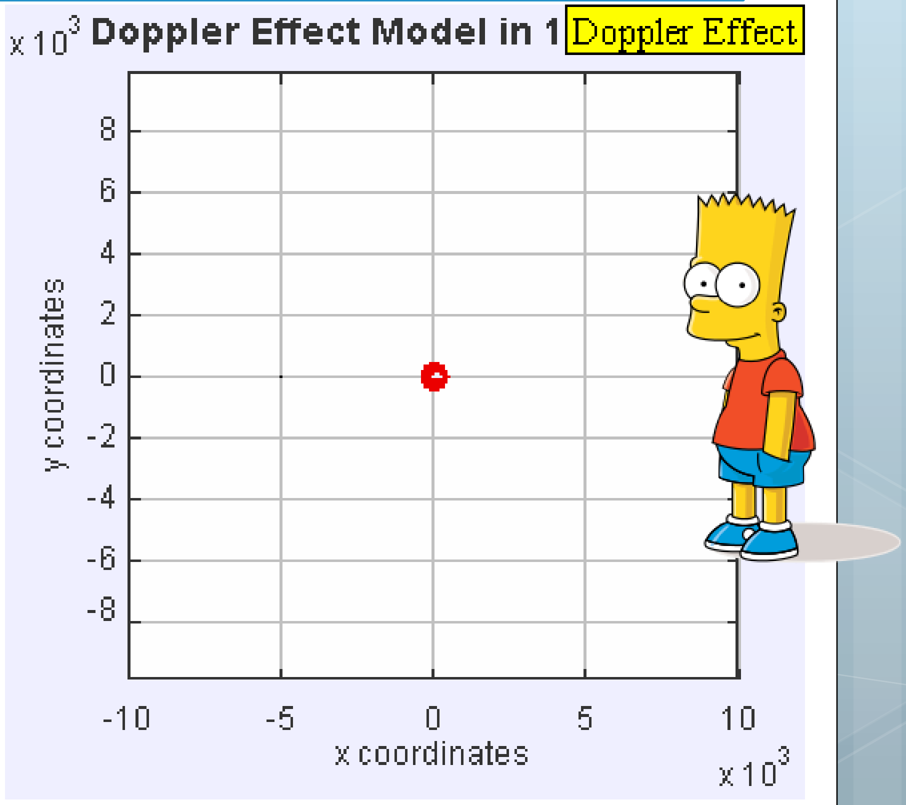
Ηχητικά Κύματα

- **Το φαινόμενο Doppler**
  - Στάσιμη πηγή
  - Συχνότητα πηγής f
  - Περίοδος T
  - Μήκος κύματος λ
  - Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται τη συχνότητα f της πηγής



Ηχητικά Κύματα

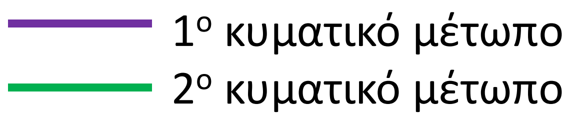
- **Το φαινόμενο Doppler**
  - Κινούμενη πηγή
    - *Προς τον παρατηρητή*
  - Συχνότητα πηγής f
  - Περίοδος T
  - Μήκος κύματος λ
  - **Ταχύτητα πηγής u_s**
  - **Ταχύτητα ήχου u**



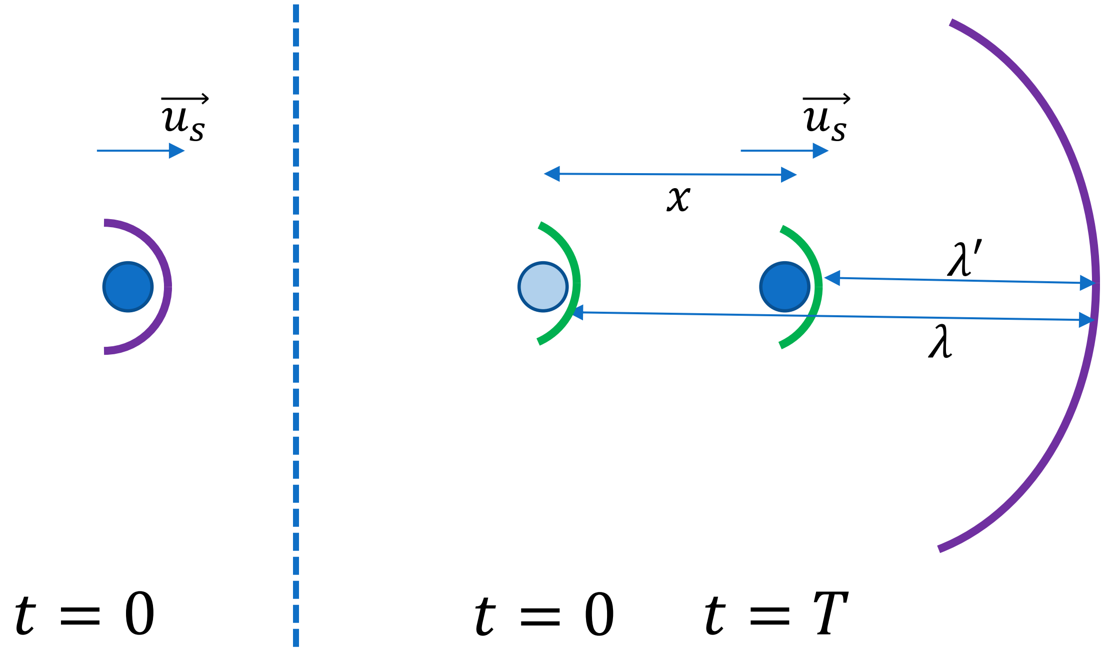
- Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - \frac{u_s}{f}} = \frac{u}{\left(\frac{u}{f}\right) - \left(\frac{u_s}{f}\right)} = \left(\frac{u}{u - u_s}\right) f$$

Ηχητικά Κύματα



- **Το φαινόμενο Doppler**
  - Κινούμενη πηγή *προς τον παρατηρητή - επεξήγηση*



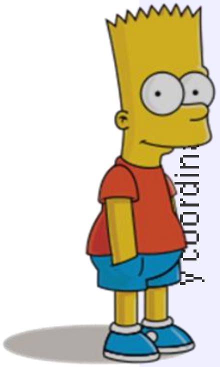
$$x = u_s t = u_s T = \frac{u_s}{f}$$

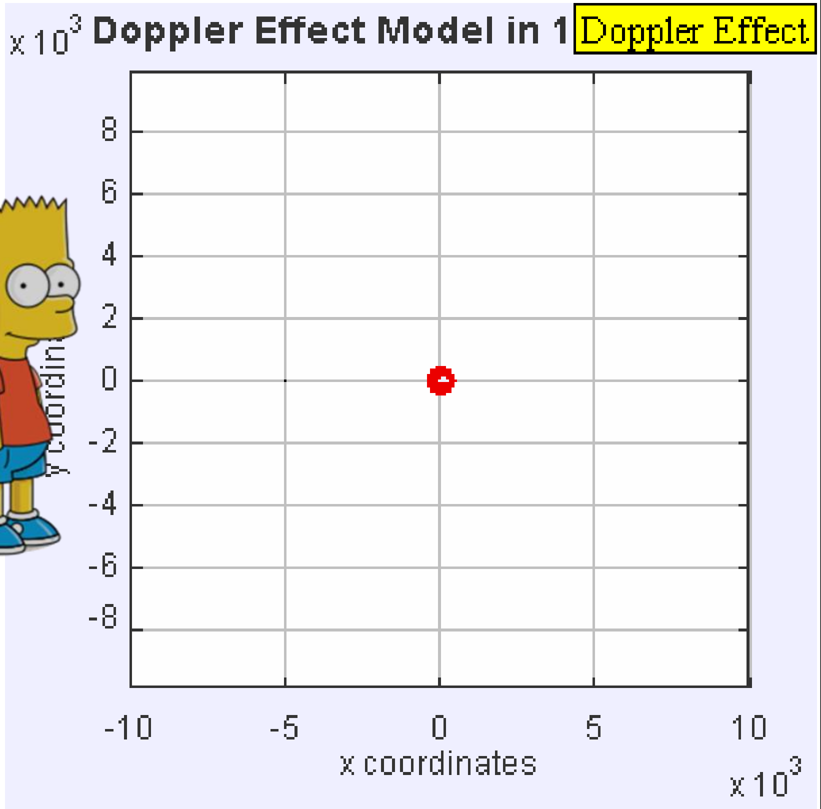
$$\lambda' = \lambda - x = \lambda - \frac{u_s}{f}$$

Παρόμοιες είναι και οι αποδείξεις για όσα ακολουθούν στα επόμενα slides

Ηχητικά Κύματα

- **Το φαινόμενο Doppler**
  - <u>Κινούμενη πηγή</u>
    - <u>*Μακριά από τον παρατηρητή*</u>
  - Συχνότητα πηγής f
  - Περίοδος T
  - Μήκος κύματος λ
  - **Ταχύτητα πηγής u_s**
  - **Ταχύτητα ήχου u**



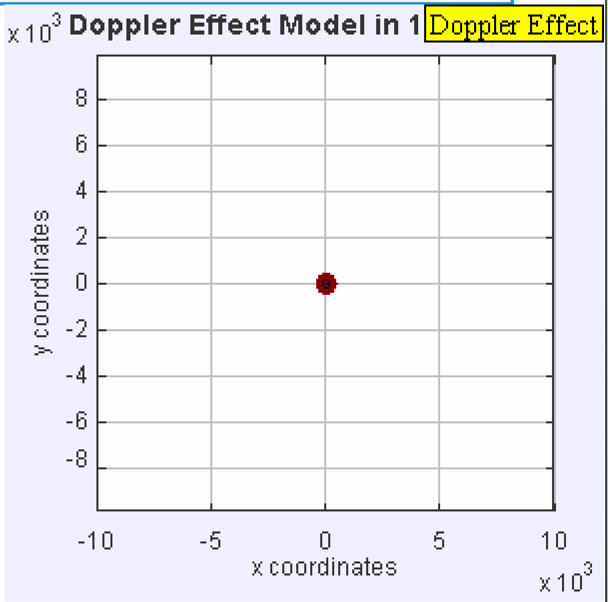


- Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda + \frac{u_s}{f}} = \frac{u}{\left(\frac{u}{f}\right) + \left(\frac{u_s}{f}\right)} = \left(\frac{u}{u + u_s}\right) f$$

Ηχητικά Κύματα

- **Το φαινόμενο Doppler**
  - Κινούμενος παρατηρητής
    - *Πλησιάζει την πηγή*
  - Συχνότητα πηγής f
  - Περίοδος T
  - Μήκος κύματος λ
  - **Ταχύτητα παρατηρητή u_o**
  - **Ταχύτητα ήχου u**

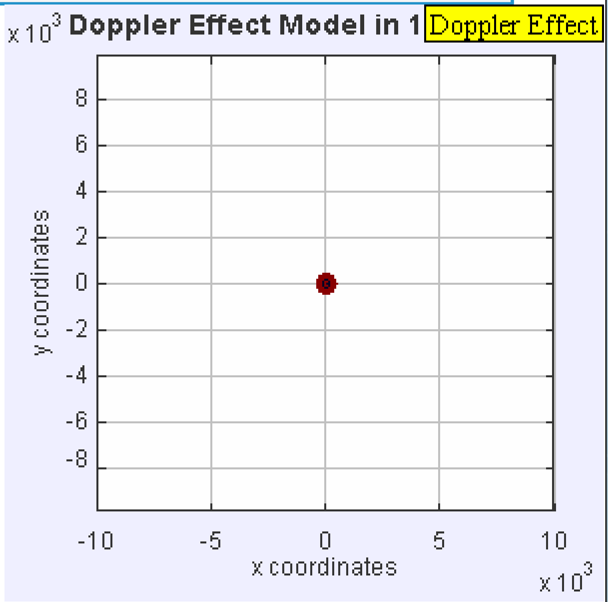


- Ένας κινούμενος παρατηρητής που πλησιάζει την πηγή αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{u'}{\lambda} = \left(\frac{u + u_o}{u}\right) f$$

Ηχητικά Κύματα

- **Το φαινόμενο Doppler**
  - <u>Κινούμενος παρατηρητής</u>
    - <u>*Απομακρύνεται από την πηγή*</u>
  - Συχνότητα πηγής f
  - Περίοδος T
  - Μήκος κύματος λ
  - **Ταχύτητα παρατηρητή u_o**
  - **Ταχύτητα ήχου u**



- Ένας κινούμενος παρατηρητής που απομακρύνεται από την πηγή αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{u'}{\lambda} = \left(\frac{u - u_o}{u}\right) f$$

Ηχητικά Κύματα

*Οι ταχύτητες εννοούνται πάντα κατά **μέτρο στην παρακάτω σχέση**!*

- **Το φαινόμενο Doppler**
  - Κίνηση και των δυο
  - Συχνότητα πηγής f
  - Περίοδος T
  - Μήκος κύματος λ
  - **Ταχύτητα παρατηρητή u_o και πηγής u_s**
  - **Ταχύτητα ήχου u**
  - Ένας **κινούμενος** παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα μιας **κινούμενης** πηγής

Ταχύτητα παρατηρητή

Ταχύτητα ήχου

$$f' = \left(\frac{u \pm u_o}{u \pm u_s}\right) f$$

Συχνότητα αντίληψης παρατηρητή

Συχνότητα εκπομπής πηγής

Ταχύτητα πηγής

Ηχητικά Κύματα

Πώς επιλέγουμε πρόσημα στη σχέση αυτή?

Source

Observer

- **Το φαινόμενο Doppler – Quiz**
- **Πηγή** πλησιάζει, **παρατηρητής** απομακρύνεται

$$f' = \frac{u - u_0}{u - u_s} f$$

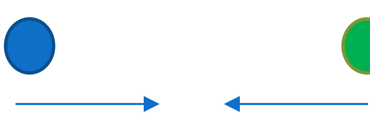
- Πηγή απομακρύνεται, παρατηρητής πλησιάζει

$$f' = \frac{u + u_0}{u + u_s} f$$

- Παρατηρητής απομακρύνεται, πηγή απομακρύνεται

$$f' = \frac{u - u_0}{u + u_s} f$$

- Παρατηρητής πλησιάζει, πηγή πλησιάζει



$$f' = \frac{u + u_0}{u - u_s} f$$

Ηχητικά Κύματα

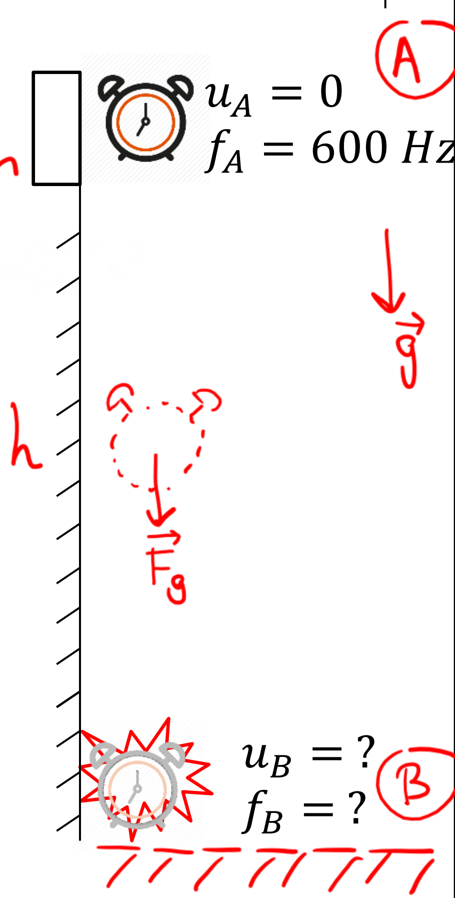
- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Ένα πρωί, «κολλάει» και δεν μπορείτε να το κλείσετε. Στην απελπισία σας, το πετάτε («αφήνετε») από το παράθυρο. Αν υποθέσετε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s, και ότι βρίσκεστε στον $4^{ο}$ όροφο (15 m από το έδαφος), τι συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;

Ηχητικά Κύματα

$$f' = \left(\frac{u \pm u_o}{u \pm u_s}\right) f$$

- **Παράδειγμα – Λύση:**

Επιλέγουμε ως σύστημα το {ξυπνητήρι, Γη}. Είναι απομονωμένο και πολυμελές. Η μόνη δύναμη που παράγει έργο στο σύστημα είναι η δύναμη του βάρους, που είναι και συντηρητική. Ισχύει η ΑΔΜΕ στη διαδρομή Α→Β.



$$\Delta K_{A\to B} + \Delta U_{g\,A\to B} = 0$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} = 0$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}u_B^2 - 0 + 0 - \cancel{m}gh = 0$$

$$u_B^2 = 2gh \Rightarrow u_B = \sqrt{2gh} \simeq 17.4\ \frac{m}{s}$$

Άρα $f' = \left(\frac{u}{u + u_B}\right) f = \left(\frac{343}{343 + 17.4}\right) 600 \simeq 571\ Hz$

$U_{g_B} = 0$

Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα που δημιουργούνται από διαφορετικά κύματα που «προστίθενται» στις χορδές του, με βάση την αρχή της υπέρθεσης. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Υπέρθεση

- Μελέτη κυματικής

- Βασική **διαφορά** κυμάτων από σωματίδια
  - **Συνδυασμός σωματιδίων δίνει ένα σώμα**
    - Για να συμβεί πρέπει τα σωματίδια να βρίσκονται σε **διαφορετικά** σημεία του χώρου
  - **Συνδυασμός κυμάτων δίνει ένα κύμα**
    - Για να συμβεί πρέπει τα κύματα να βρίσκονται στο **ίδιο** σημείο!

- **Σημαντικό**: τα κύματα μπορούν να συνδυαστούν, να συνυπάρξουν, να συμβάλλουν στην ***ίδια*** θέση του χώρου!
  - Για να αναλύσουμε τέτοιες συμπεριφορές, απαιτείται η

αρχή της υπέρθεσης

Υπέρθεση

- <u>**Αρχή της υπέρθεσης**</u>

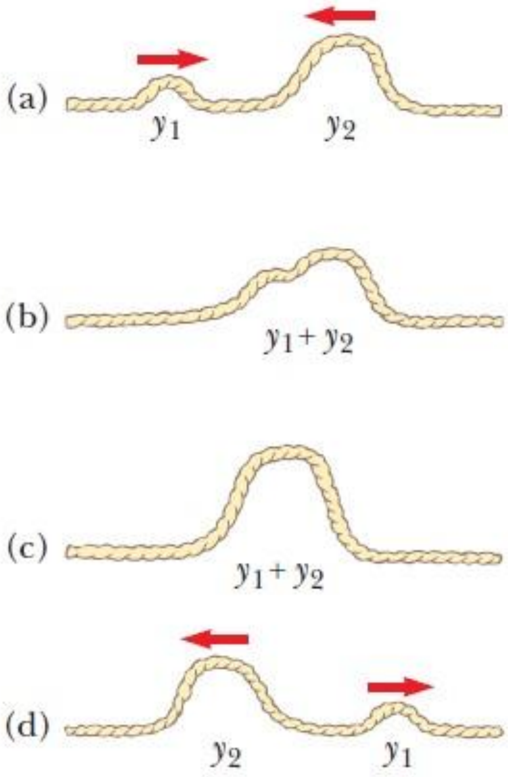
- **Αν σε κάποιο μέσο διαδίδονται δυο ή περισσότερα κύματα, η συνισταμένη τιμή της κυματοσυνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών των κυματοσυναρτήσεων των επιμέρους κυμάτων**

  - Τέτοια κύματα λέγονται **γραμμικά**

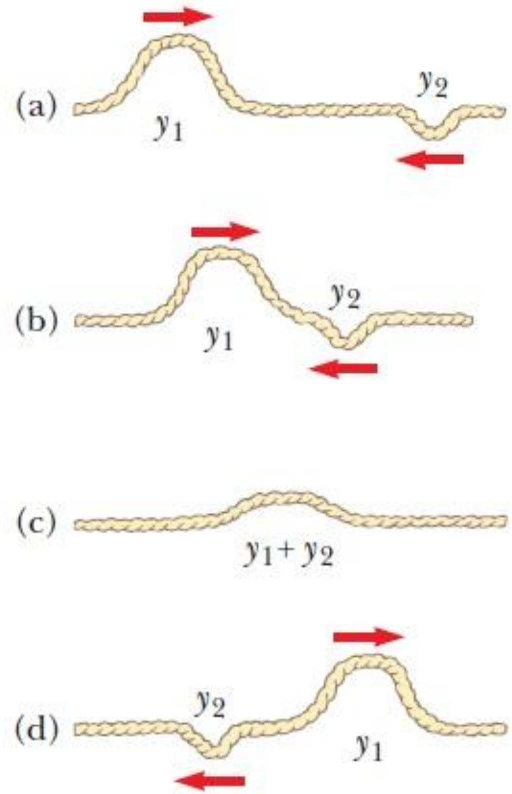
- Ο συνδυασμός δυο διαφορετικών κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου λέγεται ***συμβολή***

Υπέρθεση

- **Αρχή της υπέρθεσης**



Ενισχυτική Συμβολή



Καταστρεπτική Συμβολή

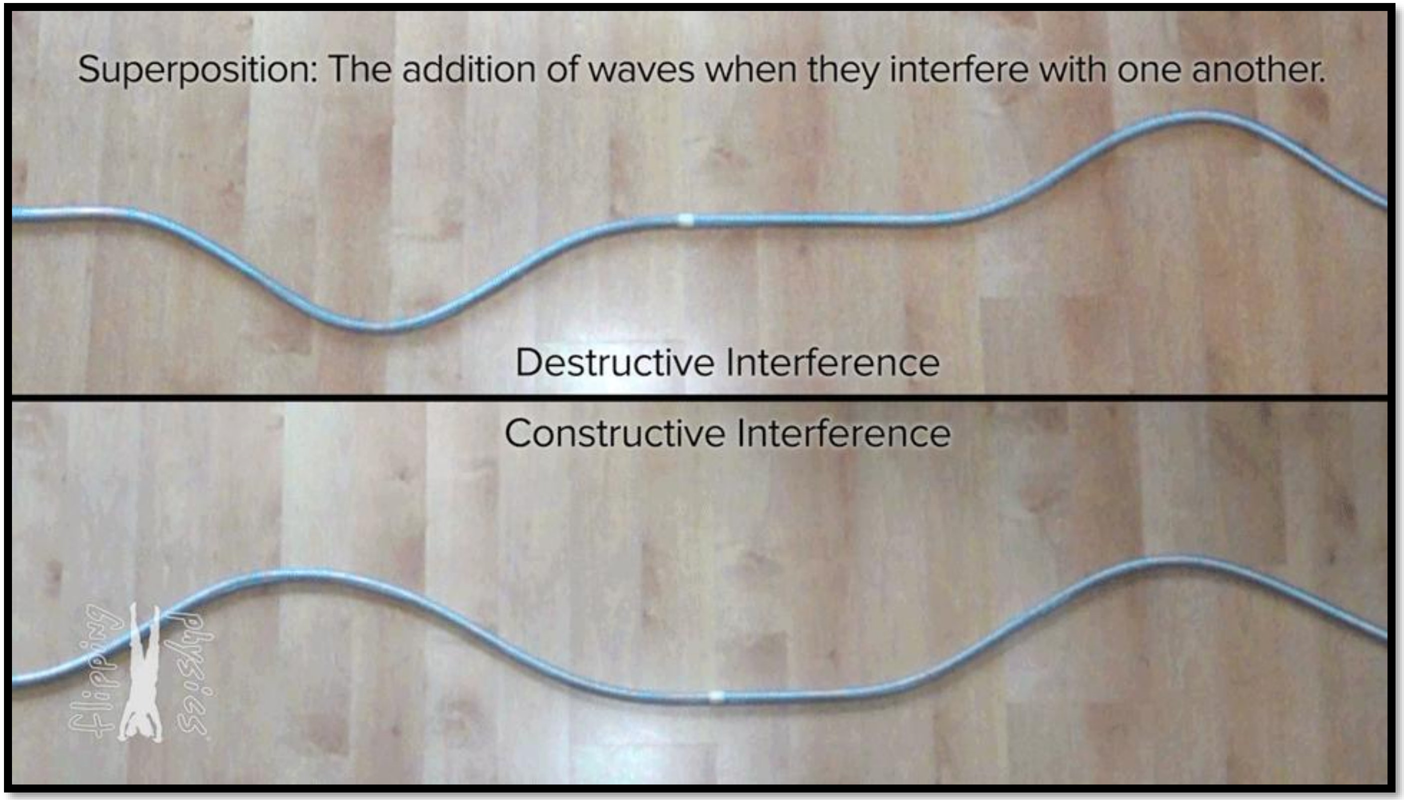
Υπέρθεση

- **Αρχή της υπέρθεσης**

isvr

Υπέρθεση

- **<u>Αρχή της υπέρθεσης</u>**



Υπέρθεση

$$\sin\theta \pm \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta\pm\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta\mp\varphi}{2}\right)$$

- **Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων**
  - Δυο ημιτονοειδή κύματα που διαδίδονται προς μια κατεύθυνση
    - **Ίδια συχνότητα ω, μήκος κύματος λ, και πλάτος A**
    - **Διαφορετική αρχική φάση φ**

$$y_1(x,t) = A\sin(kx-\omega t)\,, \qquad y_2(x,t) = A\sin(kx-\omega t+\varphi)$$

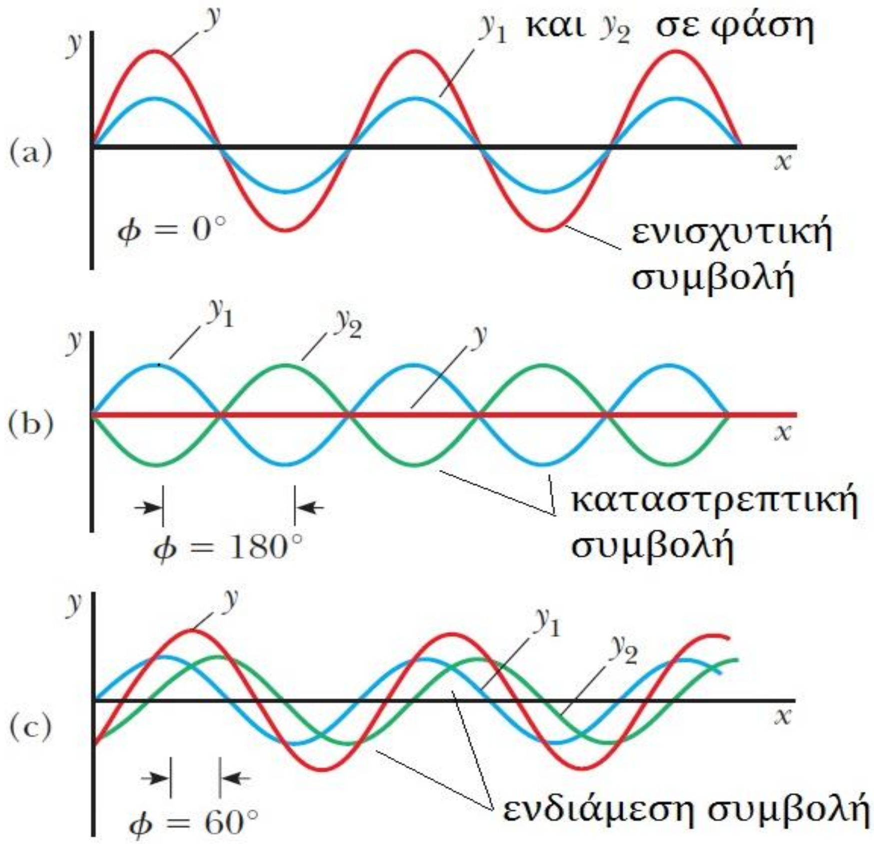
- $$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$= A[\sin(kx-\omega t) + \sin(kx-\omega t+\varphi)]$$

$$= \boxed{\left[2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]}\sin\left(kx-\omega t+\frac{\varphi}{2}\right)$$

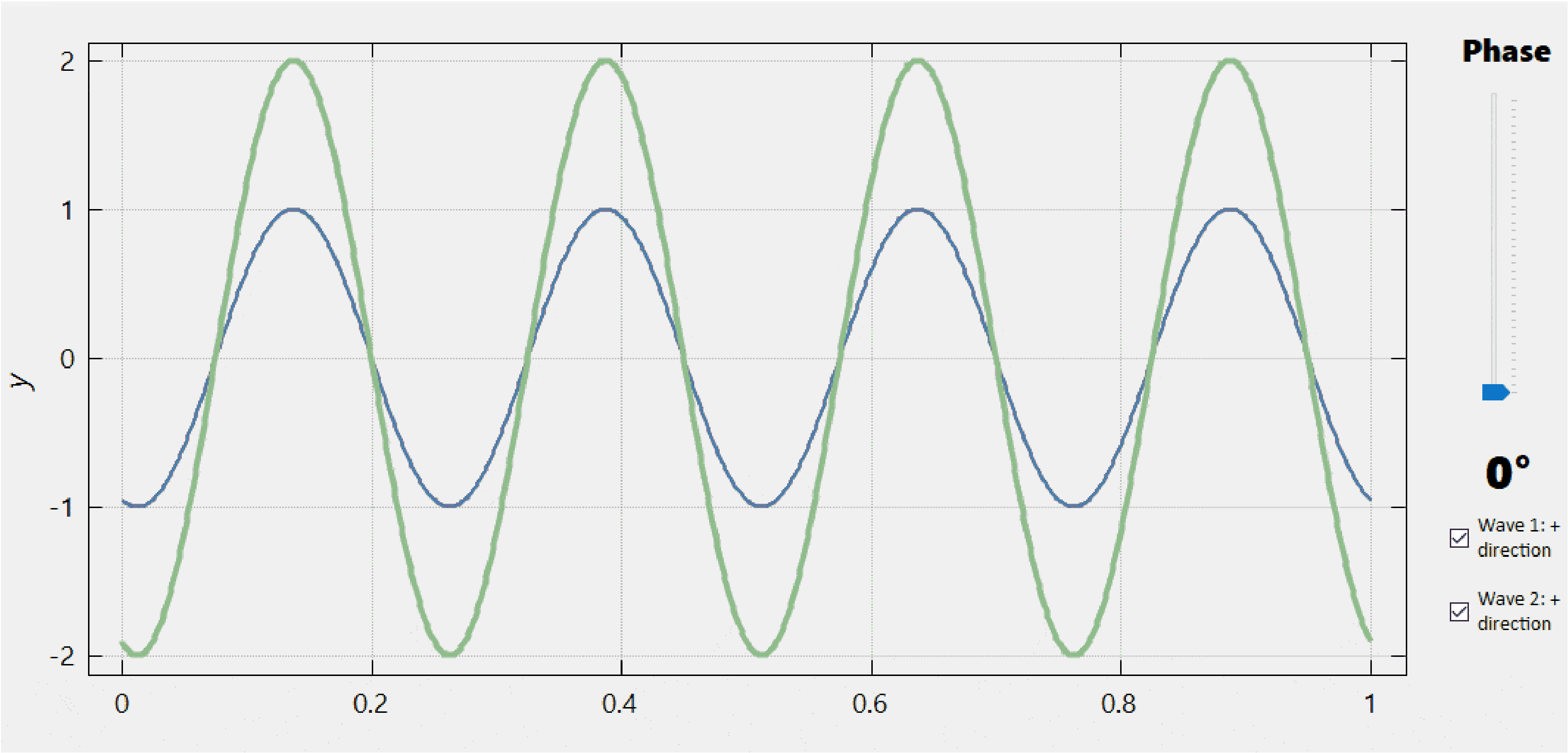
Υπέρθεση

- **Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων**
  - $y(x,t) = \left[2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$
    - Ίδια συχνότητα
    - Ίδιο μήκος κύματος
  - (a) $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$
    - Πλάτος 2A
    - Κύματα ***σε φάση***
    - ***Ενισχυτική συμβολή***
  - (b) $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$
    - Πλάτος 0
    - Κύματα ***εκτός φάσης***
    - ***Καταστρεπτική συμβολή***
  - (c) Άλλες περιπτώσεις
    - 0 < Πλάτος < 2A



Υπέρθεση

- **Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων**



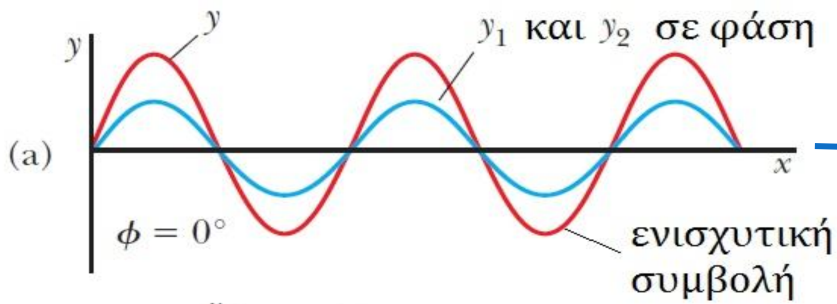
Υπέρθεση

$$\sin\theta \pm \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta\pm\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta\mp\varphi}{2}\right)$$

- **Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων – σύνοψη**

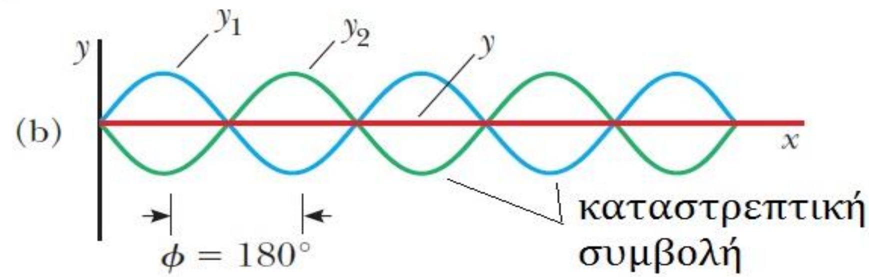
$$y_1(x,t) = A\sin(kx-\omega t)\,, \qquad y_2(x,t) = A\sin(kx-\omega t+\varphi)$$

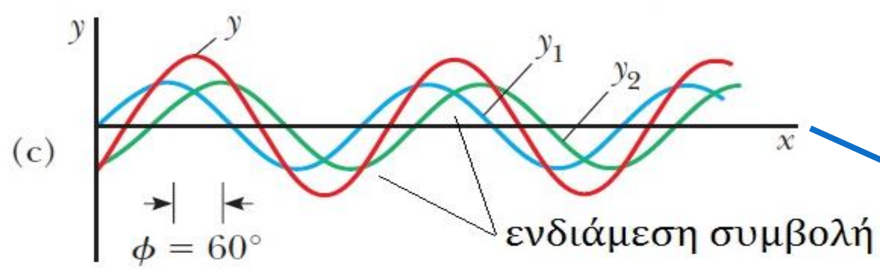
$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \left[2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\sin\left(kx-\omega t+\frac{\varphi}{2}\right)$$



$$\phi = 2k\pi, k \in \mathrm{Z}$$

$$\phi = (2k+1)\pi, k \in \mathrm{Z}$$

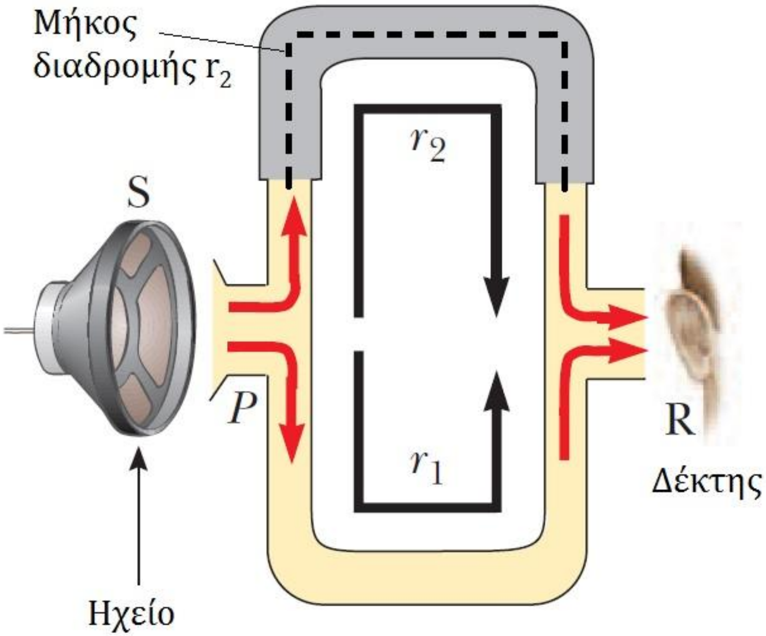




$$\phi \neq m\pi, m \in \mathrm{Z}$$

Υπέρθεση

- **Συμβολή ηχητικών κυμάτων**
  - Τα κύματα έχουν εν γένει το καθένα τη δική του αρχική φάση
    - …ενώ μπορεί να διανύουν και διαφορετικές διαδρομές
  - Ηχητικά κύματα από το ηχείο ακολουθούν διαφορετική διαδρομή
  - Έχουν το **ίδιο πλάτος A και συχνότητα ω**
  - Απόσταση ηχείου από δέκτη = **μήκος διαδρομής**



Υπέρθεση

- **Συμβολή ηχητικών κυμάτων**
  - **Διαφορά διαδρομής**

$$\boldsymbol{\Delta r = |r_2 - r_1|}$$

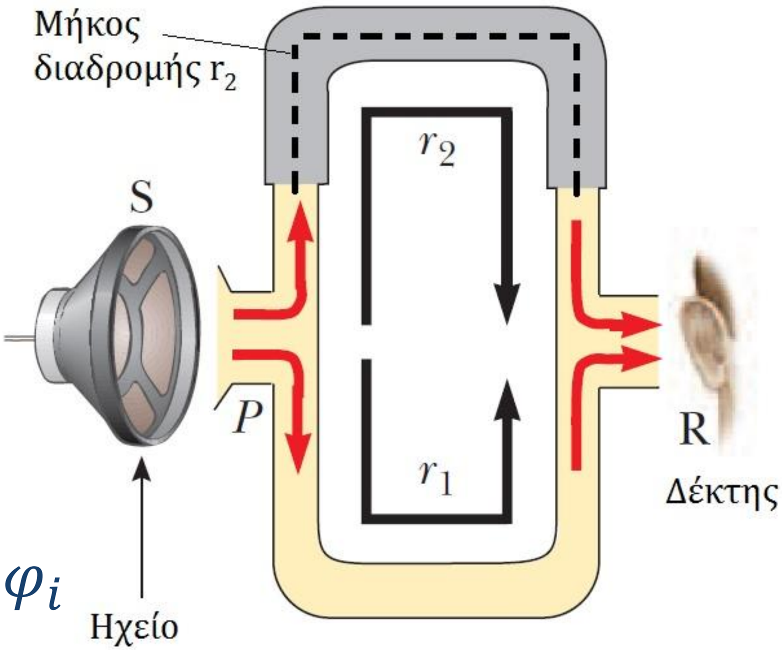
  - Φάση του καθενός κύματος

$$\Phi_i = kr_i - \omega t + \varphi_i$$

  - Τότε

$$y(r,t) = 2A\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$

$$= \boxed{2A\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)}\sin\left(k\frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$



Υπέρθεση

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$

- **Συμβολή ηχητικών κυμάτων**
  - Έστω

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$$

  - Αν $\Delta\Phi = 2m\pi, m = 0,1,2,3, \ldots$ τότε τα κύματα συμβάλλουν **ενισχυτικά**

    Άρτιο πολλαπλάσιο του π

    - Αφού

$$2A\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 2A\cos\left(\frac{2m\pi}{2}\right) = 2A\cos(m\pi) = \pm 2A$$

  - Αν $\Delta\Phi = (2m+1)\pi, m = 0,1,2,3, \ldots$ τότε τα κύματα συμβάλλουν **καταστρεπτικά**

    Περιττό πολλαπλάσιο του π

    - Αφού

$$2A\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 2A\cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = 2A\cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Υπέρθεση

$$\Phi_\mathrm{i} = kr_i - \omega t + \varphi_i$$

- **Συμβολή ηχητικών κυμάτων**
  - Επίσης

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi = k(r_2 - r_1) + \phi_2 - \phi_1 = 2\pi\frac{\Delta \mathrm{r}}{\lambda} + \Delta\varphi$$

  - Αν η **αρχική φάση είναι ίδια** (π.χ. κοινή πηγή ήχου):

$$\Delta\varphi = 0$$

  - **Ενισχυτική συμβολή (σε κοινή πηγή ήχου)**:

$$2\pi\frac{\Delta \mathrm{r}}{\lambda} = 2m\pi \Leftrightarrow \Delta \mathrm{r} = m\lambda, m = 0,1,2,3, \ldots$$

  - **Καταστρεπτική συμβολή (σε κοινή πηγή ήχου)**:

$$2\pi\frac{\Delta \mathrm{r}}{\lambda} = (2m+1)\pi \Leftrightarrow \Delta \mathrm{r} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, m = 0,1,2,3 \ldots$$

Υπέρθεση

$$\sin\theta \pm \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta\pm\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta\mp\varphi}{2}\right)$$

- **Συμβολή ηχητικών κυμάτων – σύνοψη**

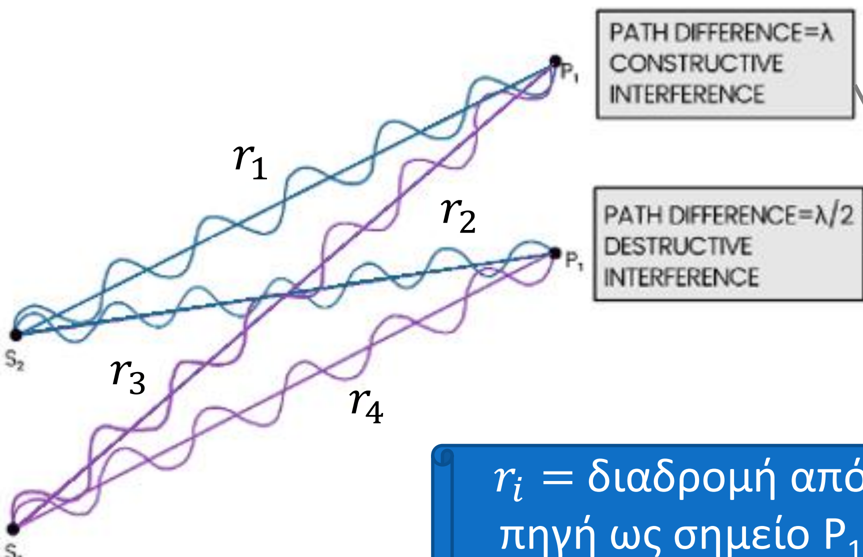
$$y_1(r,t) = \boxed{A\sin(kr-\omega t+\phi_1)}$$
$$y_2(r,t) = \boxed{A\sin(kr-\omega t+\phi_2)}$$

$$A\sin(\Phi_1)$$
$$A\sin(\Phi_2)$$

$$y(r,t) = y_1(r,t) + y_2(r,t) = \left[2A\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\right]\sin\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)$$

$$\Delta\Phi = 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} + \underbrace{\Delta\varphi}_{0}$$

«σε φάση»



r_i = διαδρομή από πηγή ως σημείο P_1

Αν βρίσκονται «σε φάση», τότε:

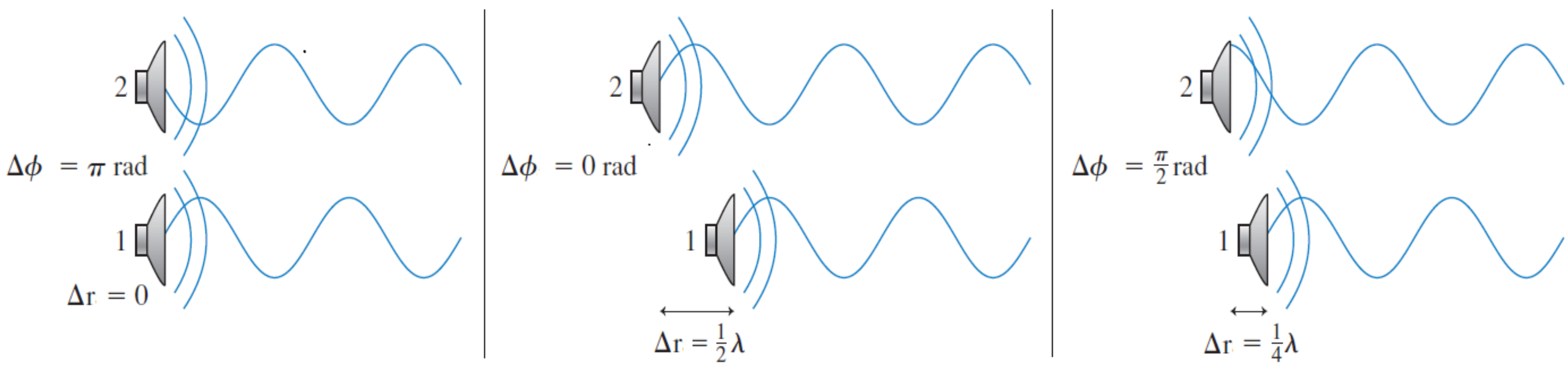
$$\Delta r = m\lambda, m = 0,1,2,3,\ldots$$

$$\Delta r = \frac{(2m+1)\lambda}{2}, m = 0,1,2,3,\ldots$$

Υπέρθεση

$$\Delta\Phi = 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} + \Delta\varphi$$

- **Συμβολή ηχητικών κυμάτων**
  - Καταστρεπτική συμβολή – πότε συμβαίνει?
    - Λόγω διαφοράς αρχικής φάσης Δφ - (a)
    - Λόγω διαφορετικής θέσης της πηγής - (b)
      - Διαφορετικό μήκος διαδρομής Δr (που εξαρτάται από το λ)
    - Λόγω και των δυο παραπάνω παραγόντων - (c)
  - Στο παρακάτω σχήμα, έχουμε $\Delta\Phi = \pi$ σε κάθε περίπτωση
    - Θεωρούμε ότι k και ω είναι τα ίδια στα δυο κύματα

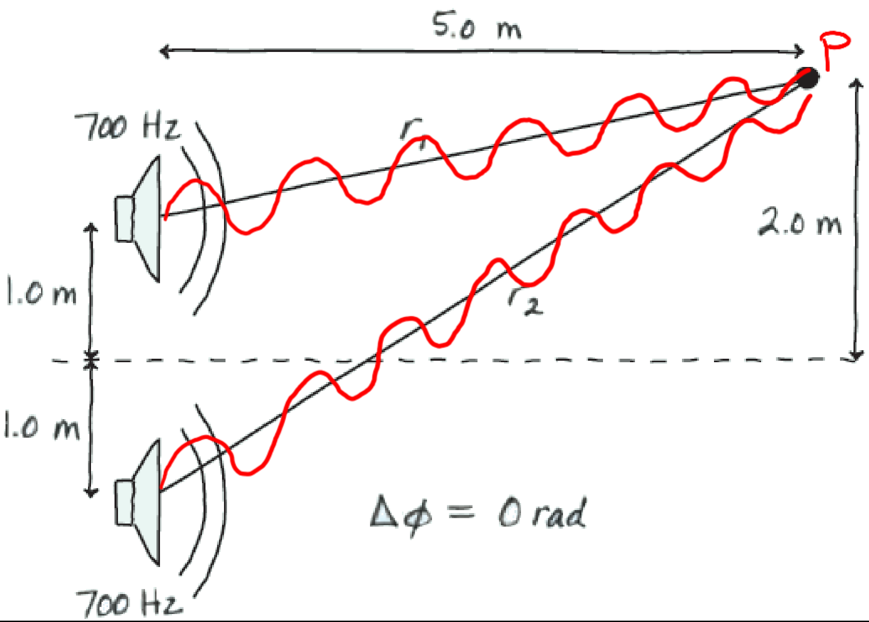


Υπέρθεση

$$\Delta\Phi = 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} + \Delta\varphi$$

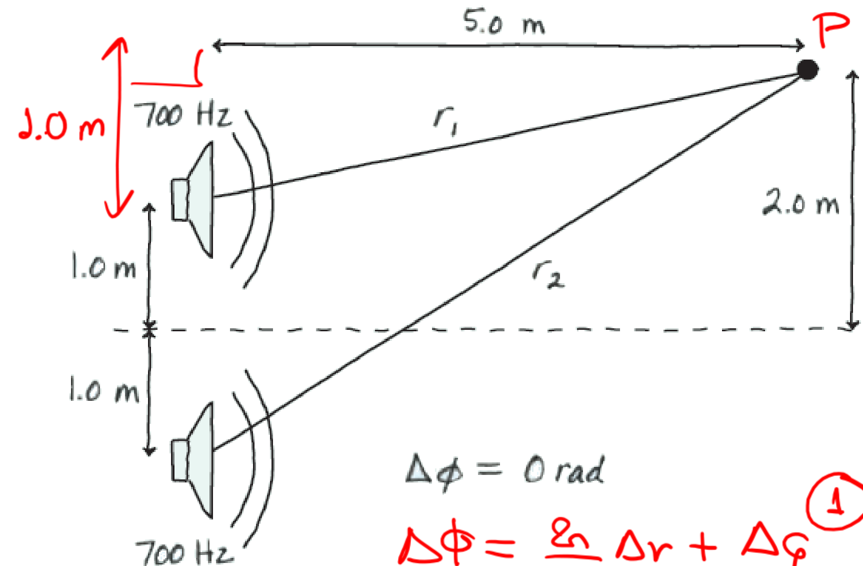
- **Παράδειγμα:**
  - Δυο ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 2.0 μέτρων και **σε φάση**. Εκπέμπουν συχνότητα 700 Hz σε ένα δωμάτιο που ο ήχος διαδίδεται με ταχύτητα 341 m/s. Ένας ακροατής στέκεται στο σημείο του σχήματος. Τι είδους συμβολή υπάρχει στο σημείο? Πώς αλλάζει η απάντησή σας αν τα ηχεία βρίσκονται **εκτός φάσης**?

- $\Delta\varphi = 0 \Leftrightarrow$ "σε φάση"
- $\Delta\varphi = \pi \Leftrightarrow$ "εκτός φάσης"



Υπέρθεση

- **Παράδειγμα – Λύση:**



$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r + \Delta\varphi \quad (1)$$

1η περίπτωση : $\Delta\varphi = 0$

Η (1) γράφεται

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r$$

Αν $\Delta r = m\lambda$, ενισχυτική συμβολή στο P

Αν $\Delta r = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$, καταστρ. —"— —"—.

Είναι $r_1 = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26} \simeq 5.1\ m$

$r_2 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \simeq 5.83\ m$

$\Rightarrow \Delta r = 5.83 - 5.1 = 0.73\ m$

Επίσης $u = \lambda f \Rightarrow 341 = \lambda \cdot 700 \Rightarrow \lambda = \frac{341}{700} = 0.487\ m$

Άρα $\frac{\Delta r}{\lambda} = \frac{0.73}{0.487} = \frac{3}{2} \Rightarrow \Delta r = \frac{3}{2}\lambda = 3\frac{\lambda}{2}$, καταστρ. συμβολή.

Υπέρθεση

- **Παράδειγμα – Λύση:**

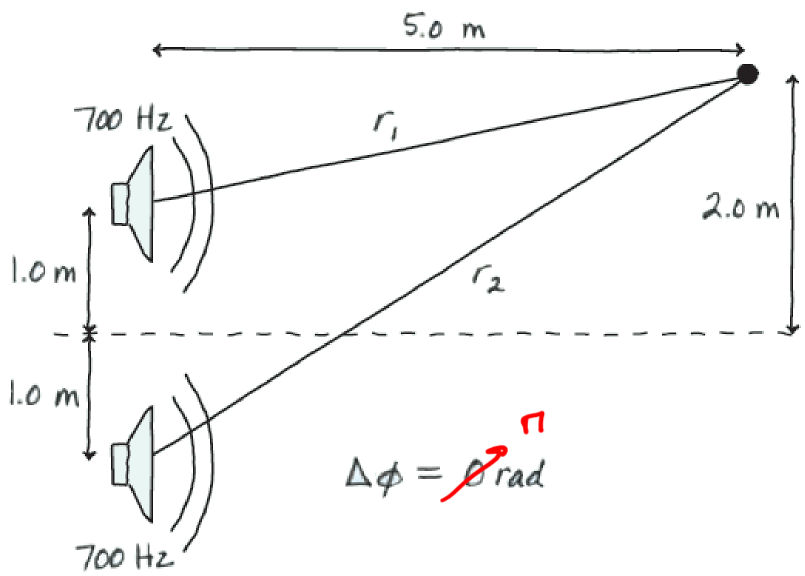
2η περίπτωση: $\Delta\varphi = \pi$

Άρα $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r + \pi$

Όμοια με πριν, $\Delta r = \frac{3}{2}\lambda$.

Άρα $$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\cancel{\lambda}} \cdot \frac{3}{\cancel{2}}\cancel{\lambda} + \pi = 3\pi + \pi = 4\pi$$, άρτιο πολλ/σιο του π!

Έτσι, στο σημείο P θα έχουμε τώρα ενισχυτική συμβολή.



$$\Delta r = m\lambda, m = 0,1,2,3, \ldots$$

$$\Delta r = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, m = 0,1,2,3, \ldots$$

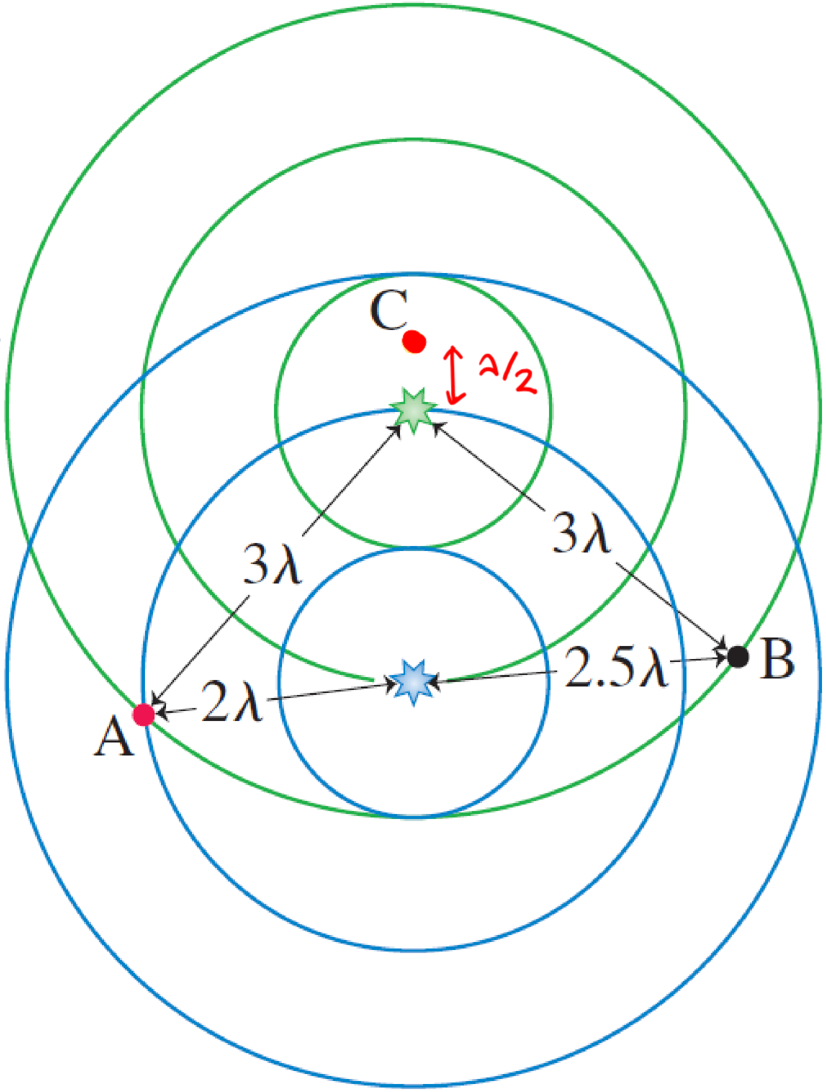
Υπέρθεση

- **Quiz:**
  - **Θεωρήστε δυο πηγές <u>ίδιες και σε φάση μεταξύ τους</u>**
  - **Στα σημεία A, B, C υπάρχει καταστρεπτική ή ενισχυτική συμβολή?**

$\Delta r_A = |3\lambda - 2\lambda| = \lambda$, ενισχ.

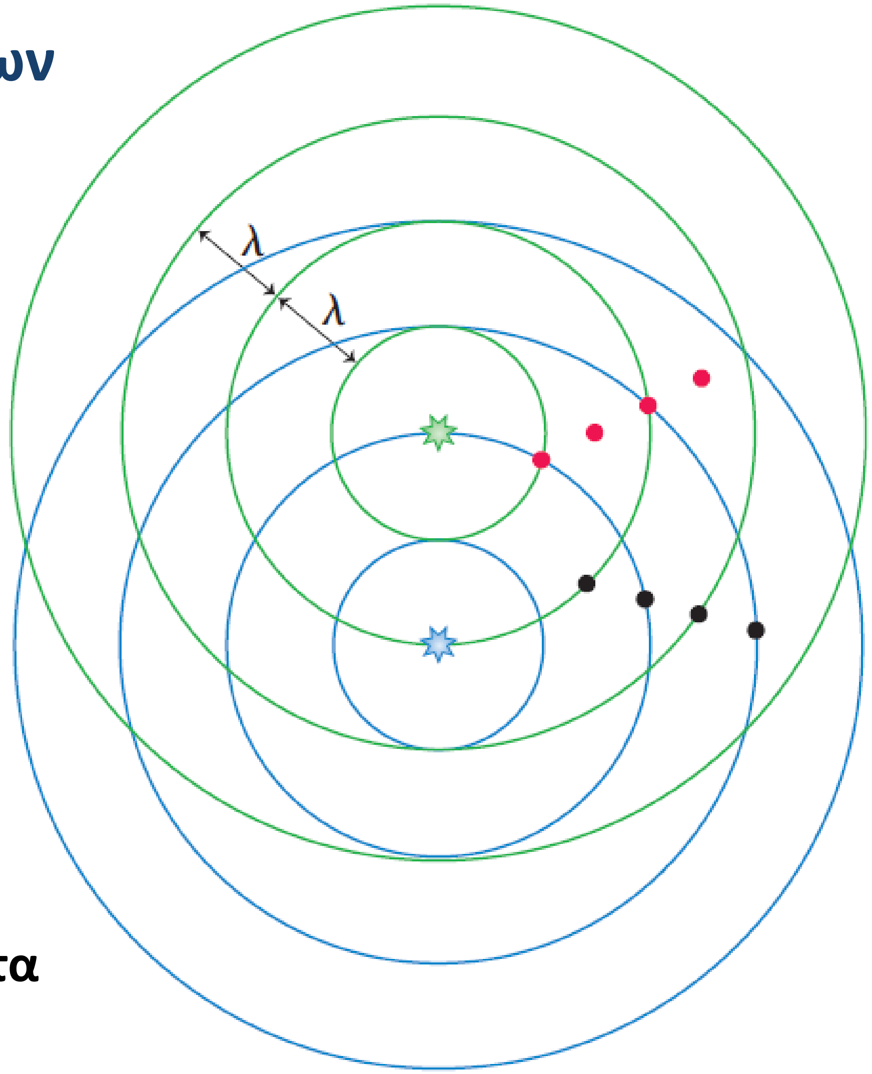
$\Delta r_B = |2.5\lambda - 3\lambda| = \frac{\lambda}{2}$, καταστρ.

$\Delta r_C = |2.5\lambda - 0.5\lambda| = 2\lambda$, ενισχ.



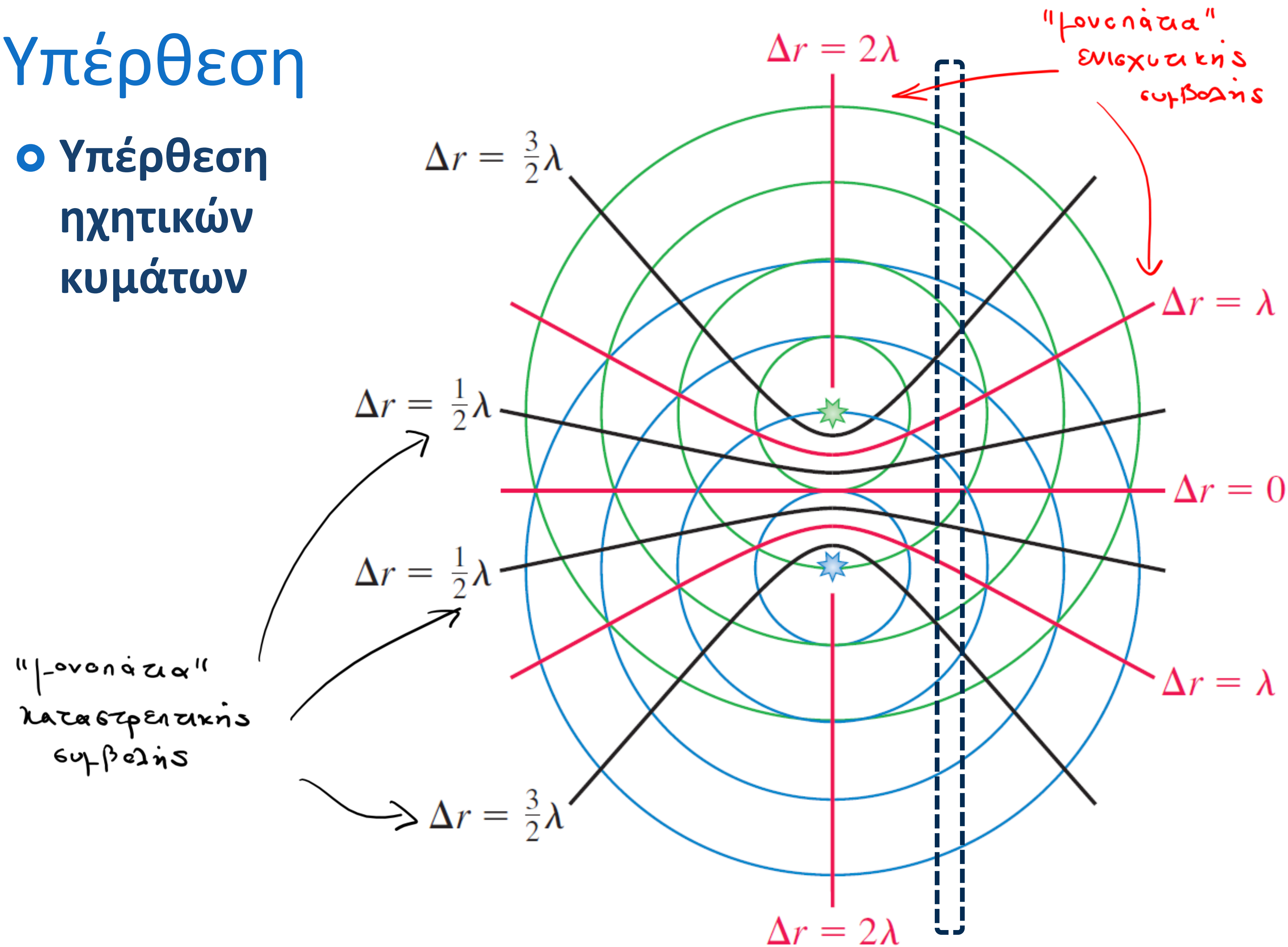
Υπέρθεση

- **Συμβολή ηχητικών κυμάτων**
  - Κοινές πηγές
    - Ίδιο k, ίδιο f, ίδιο A, $\Delta\phi = 0$
  - **Ενισχυτική συμβολή**
  - **Τα πυκνώματα του ενός κύματος συμπίπτουν με αυτά του άλλου – το ίδιο και τα αραιώματα**
  - **Καταστρεπτική συμβολή**
  - **Τα πυκνώματα του ενός συμπίπτουν με τα αραιώματα του άλλου**



Υπέρθεση

- **Υπέρθεση ηχητικών κυμάτων**

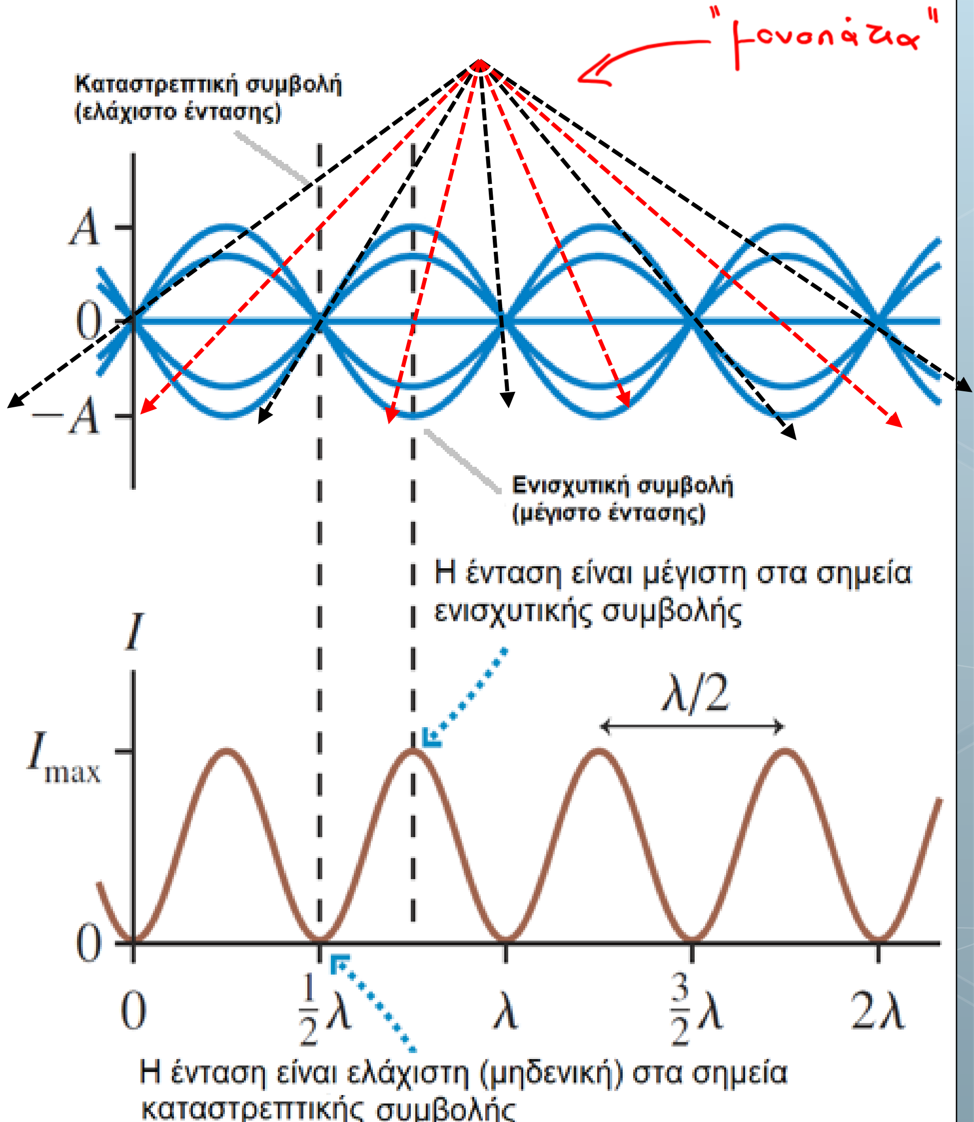


Υπέρθεση

- **Ένταση ηχητικών κυμάτων**
  - Μπορεί κανείς να δείξει ότι η ένταση I ενός ηχητικού κύματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του **συνολικού** κύματος A'

$$I = cA'^2$$
$$= c\left(2A\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\right)^2$$

  - Η ένταση I του ήχου είναι **μέγιστη** στα σημεία **ενισχυτικής** συμβολής και **μηδενική** (ελάχιστη) στα σημεία **καταστρεπτικής** συμβολής

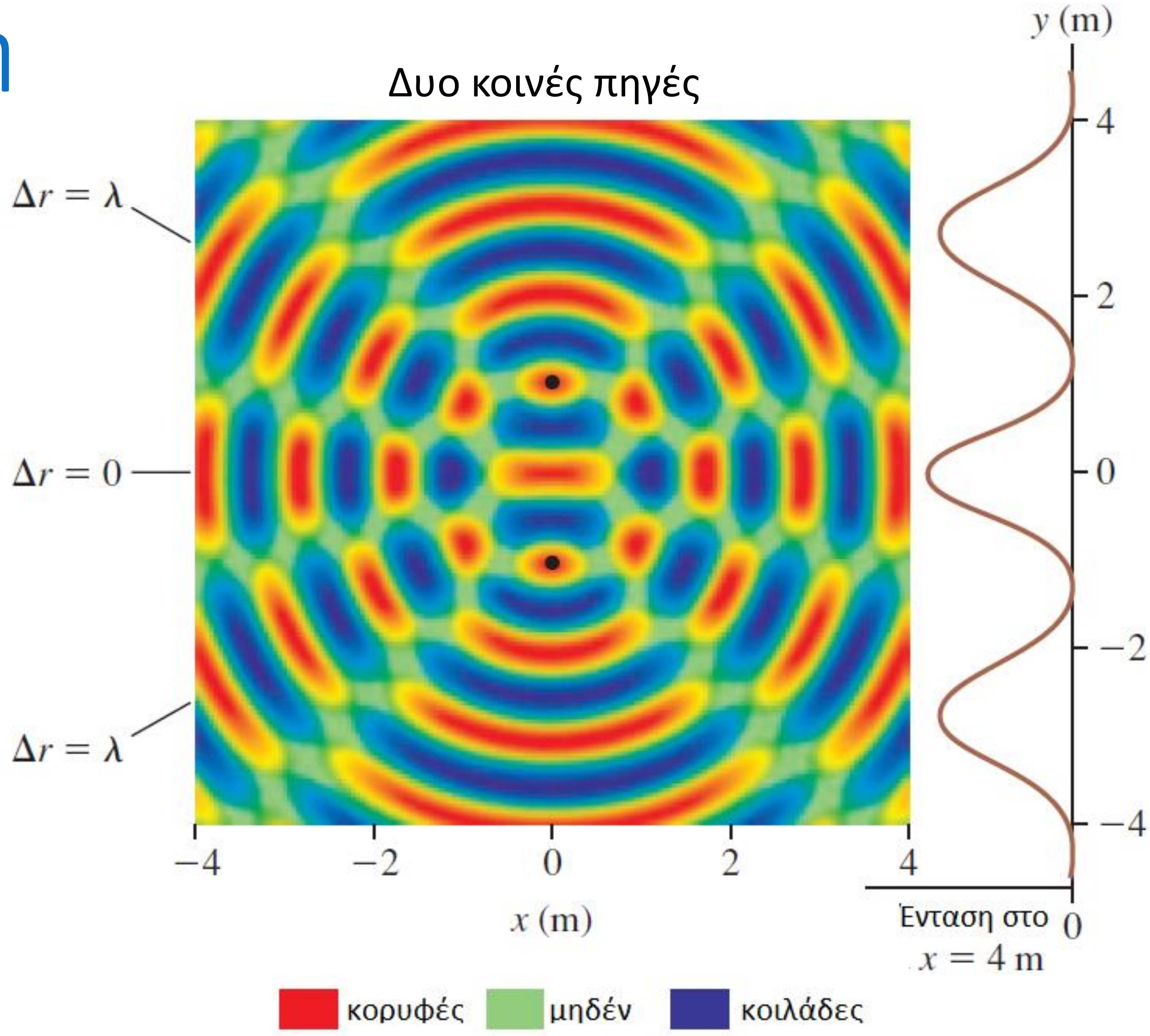


https://www.youtube.com/watch?v=b87QZtYKmqo

Υπέρθεση

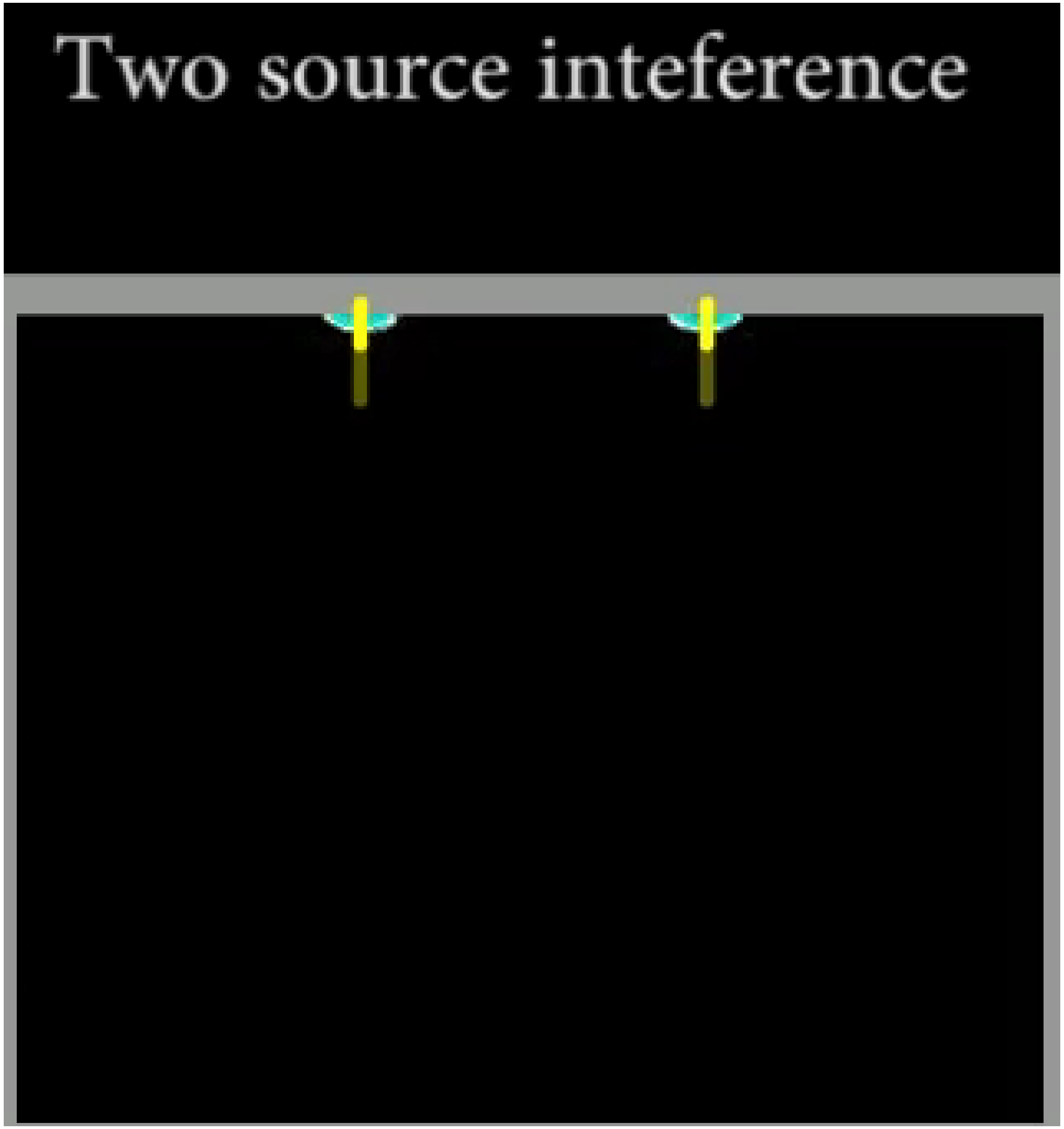
Υπέρθεση

- **Ένταση ηχητικών κυμάτων**



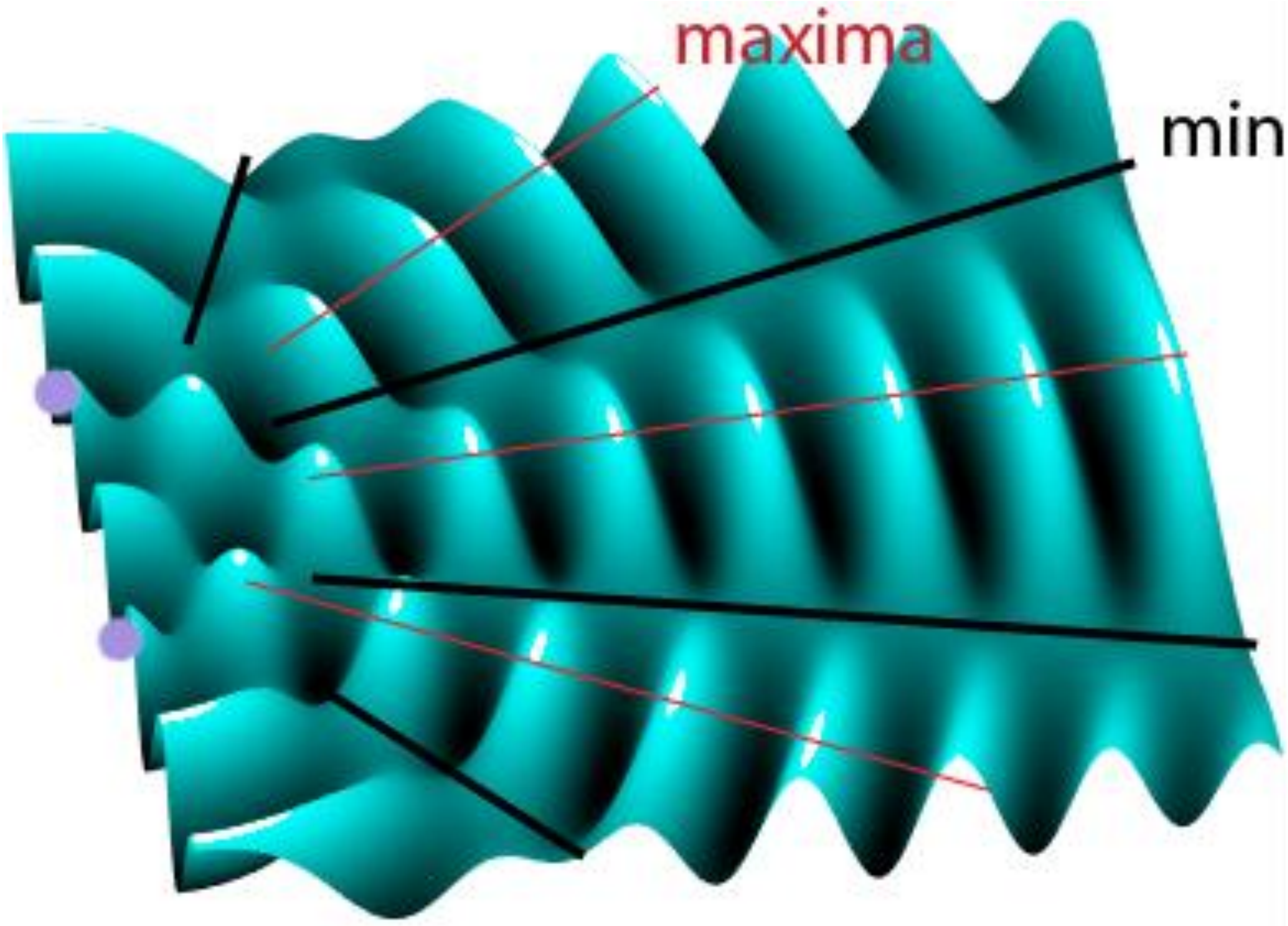
Υπέρθεση

- **Συμβολή ηχητικών Κυμάτων**



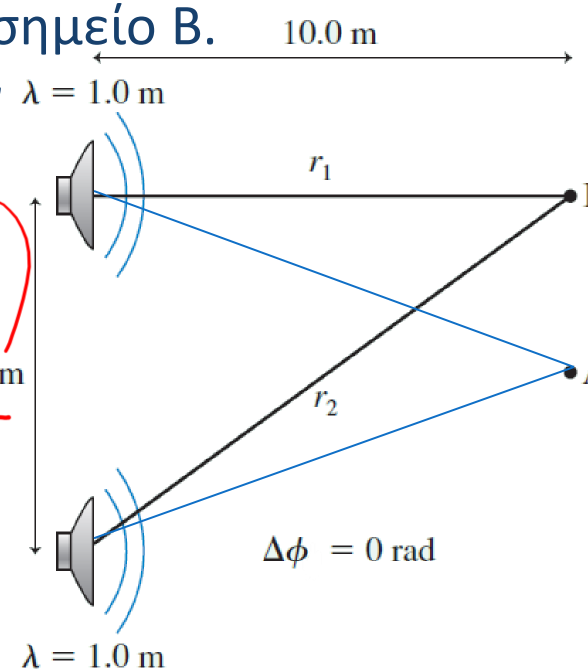
Υπέρθεση

- **Συμβολή ηχητικών κυμάτων: μέγιστα/ελάχιστα έντασης**



Υπέρθεση

- **Παράδειγμα:**
  - Δυο ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 6.0 μέτρων και **σε φάση**. Εκπέμπουν μήκος κύματος $\lambda = 1.0$ m. Κάθε ηχείο δημιουργεί ήχο με ένταση I_0. Ένας ακροατής στέκεται στο σημείο A του σχήματος (στη μεσοκάθετο της απόστασης των ηχείων). Ένας δεύτερος ακροατής στέκεται στο σημείο B. Ποιες είναι οι εντάσεις που λαμβάνουν σε όρους I_0?



"σε φάση" $\Longleftrightarrow$ $\Delta\varphi = 0$ $\left(\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r\right)$

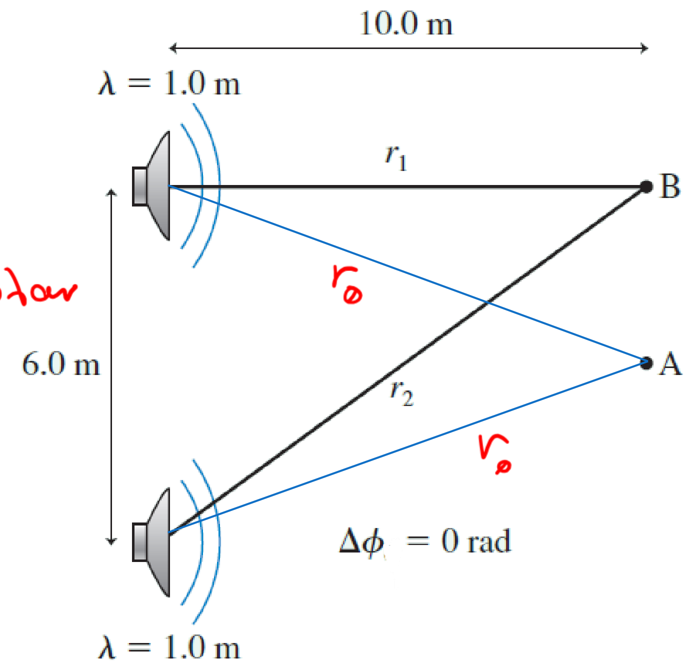
Κάθε ηχείο προσφέρει ένταση $I_0 = cA^2$

αλλά η αντιληπτή ένταση σε κάθε

σημείο A, B θα είναι διαφορετική.

Υπέρθεση

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Τα κύματα από τα δυο ηχεία συμβάλλουν τόσο στο σημείο Α, όσο και στο Β.

Λόγω της συμβολής, το πλάτος του συνολικού κύματος θα είναι

$$A_i = \left| 2A\cos\left(\frac{\Delta\phi_i}{2}\right) \right|$$

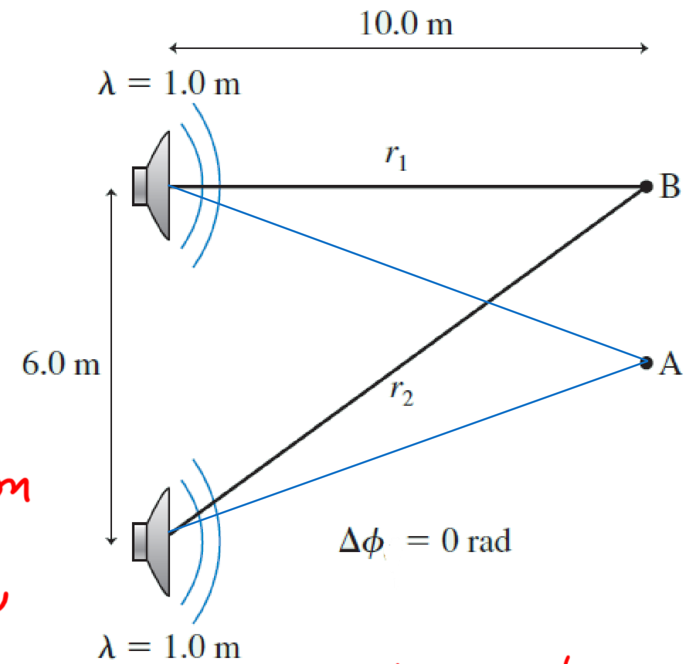
με $i = A, B$ τα δυο σημεία που μας ενδιαφέρουν.

→ Για το σημείο Α: $\Delta r = 0$, αφού οι αποστάσεις r_0 στο σχήμα είναι ίδιες. Άρα στο σημείο Α θα έχουμε ενισχυτική συμβολή με πλάτος $2A$ και ένταση $I_A = c(2A)^2 = c4A^2 = 4cA^2 = 4I_0$.

Άρα $I_A = 4I_0$.

Υπέρθεση

- **Παράδειγμα – Λύση:**



→ Για το σημείο Β: $\Delta r = |r_2 - r_1|$,

δηλαδή $\Delta r = \left|\sqrt{6^2+10^2} - 10\right| =$

$= \left|\sqrt{136} - 10\right| = 1.662\ m$

Επειδή $\lambda = 1\ m$, $\frac{\Delta r}{\lambda} = 1.662$, που δεν είναι ούτε ακέραιο πολλαπλάσιο του λ, ούτε περιττό πολλ/σιο του $\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}$. Άρα θα έχουμε ένα είδος ενδιάμεσης συμβολής στο σημείο Β. Θα χρησιμοποιήσουμε το $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r$, δηλ. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{1} \cdot 1.662 \cong 10.44\ rad$. Άρα το πλάτος του συνολικού κύματος στο σημείο Β θα είναι $A_B = \left|2A\cos\left(\frac{10.44}{2}\right)\right| \simeq$

$\simeq 0.972\,A$ και άρα η ένταση θα είναι $I_B = cA_B^2 \simeq 0.95\,I_0$.

Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Στάσιμα Κύματα

Φυσική για Μηχανικούς

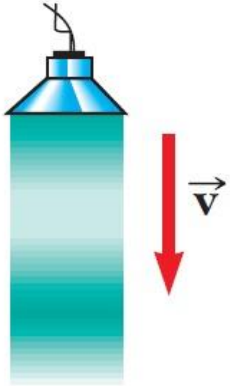
Στάσιμα Κύματα

Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Στάσιμα Κύματα

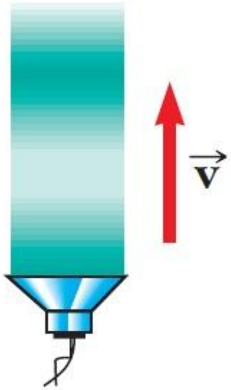
$$\sin\theta \pm \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta\pm\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta\mp\varphi}{2}\right)$$

- **Στάσιμα κύματα**
  - Ως τώρα βλέπαμε ηχητικά κύματα που συνέβαλαν σε κάποιο σημείο μπροστά τους



  - Τι θα γίνει αν τα βάλουμε **αντικρυστά**;
    - **Ίδια** συχνότητα, μήκος κύματος, πλάτος, αρχ. φάση
    - **Αντίθετη** ταχύτητα

  - $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$
    $= A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)$
    $= (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$



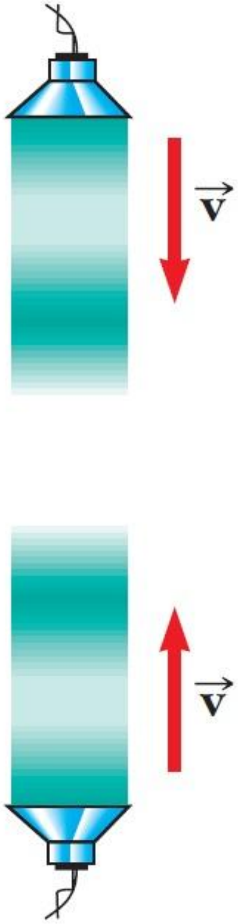
  - Η παραπάνω σχέση ορίζει ένα ***στάσιμο κύμα***

Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

$$y(x,t) = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$

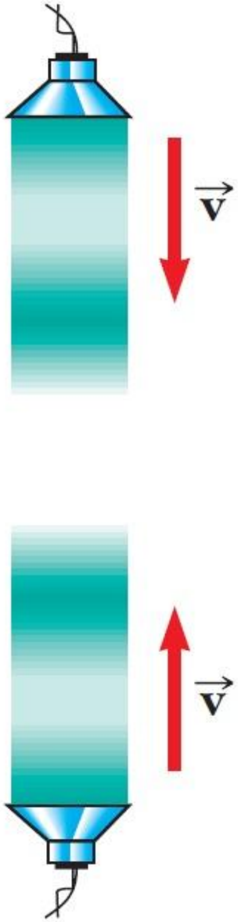
- Παρατηρήστε ότι **δεν** εξαρτάται από την έκφραση $kx \pm \omega t$
- Άρα **δεν** είναι οδεύον (κινούμενο) κύμα
- Δεν υπάρχει η έννοια της διάδοσης της κίνησης σε ένα **στάσιμο** κύμα



Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

$$y(x,t) = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$



- Λέγεται **στάσιμο** (δηλαδή σταθερό σε μια θέση) επειδή όλα τα στοιχεία του μέσου εκτελούν μεν απλή αρμονική ταλάντωση, ΑΛΛΑ:
  - με **διαφορετικό πλάτος** το **καθένα**!
- Δηλ. αντίθετα με ότι συμβαίνει σε ένα οδεύον κύμα, όπου τα στοιχεία του μέσου εκτελούν το ένα μετά το άλλο την **ίδια ακριβώς κίνηση**…
  - … εξασφαλίζοντας έτσι τη διάδοση της διαταραχής (του κύματος)

Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**
- Ας συγκρίνουμε:

$$y(t) = A\cos(\omega t)$$

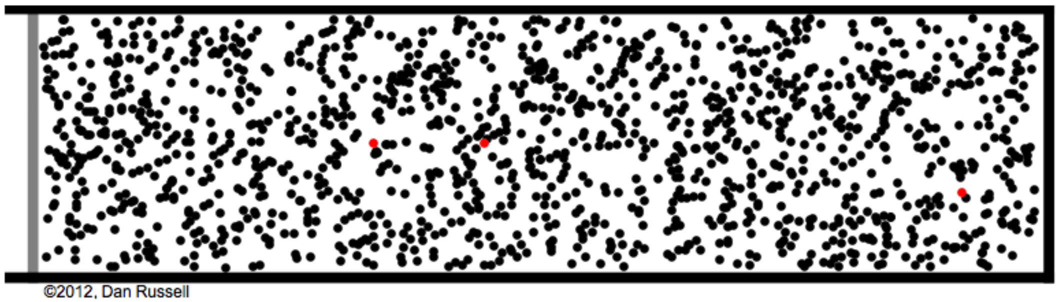
και

$$y(x,t) = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$

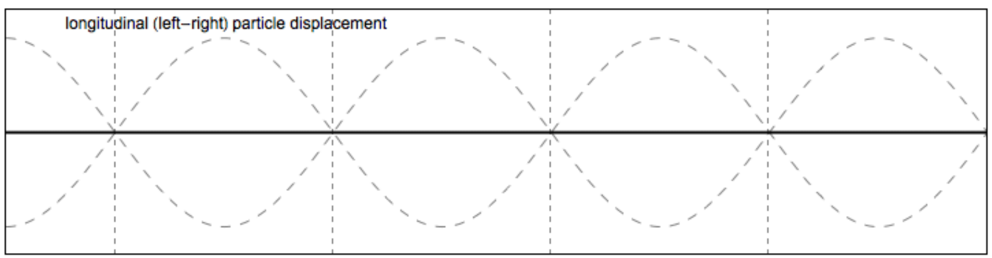
- Τι παρατηρείτε;
  - Η δεύτερη περιγράφει μια ειδική μορφή της πρώτης
    - Κάθε στοιχείο που βρίσκεται στη **θέση** x εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση
    - Το **πλάτος** της απλής αρμονικής κίνησης, $2A\sin(kx)$, ενός στοιχείου εξαρτάται από τη **θέση** του στοιχείου, x, στο μέσο

Στάσιμα Κύματα

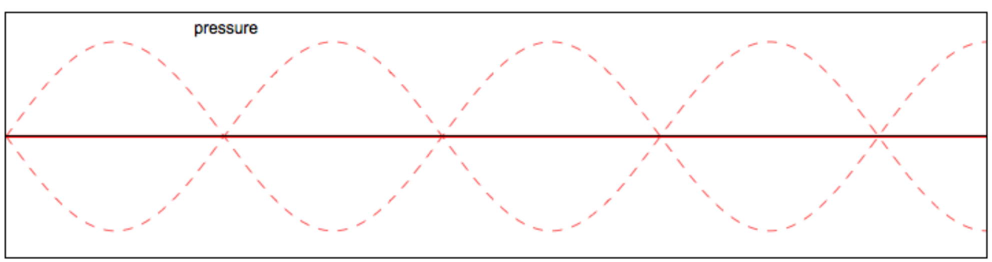
- **Στάσιμα κύματα**



Μετατόπιση

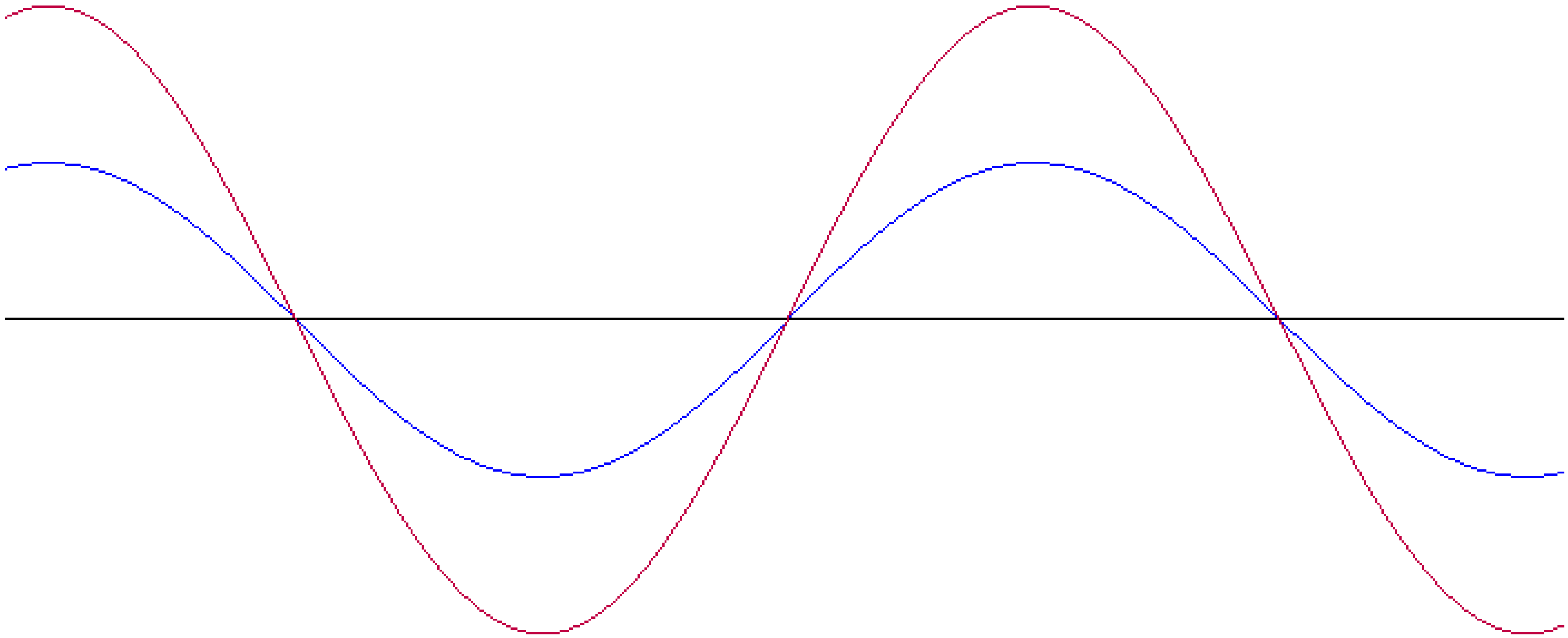


Πίεση



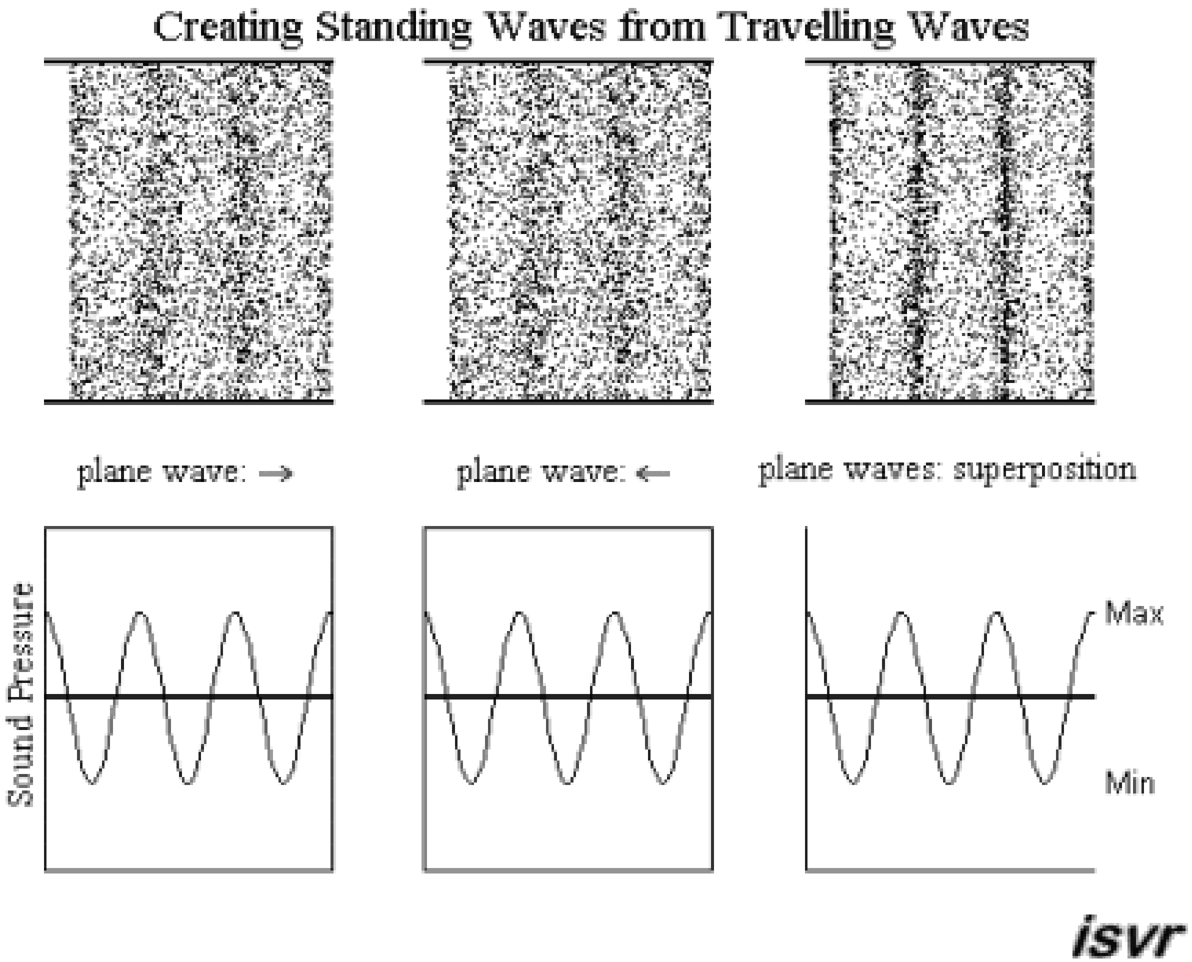
Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**



Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**



Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

$$y(x,t) = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$

- Υπάρχουν στοιχεία του μέσου που ΔΕΝ ταλαντώνονται? (δηλ. σε ποιο x μηδενίζεται το πλάτος;)

$$2A\sin(kx) = 0$$

$$\sin(kx) = \sin(n\pi)$$

$$kx = n\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi$$

$$x = \frac{n\lambda}{2}, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **δεσμοί (nodes)**

Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

$$y(x,t) = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$

- Υπάρχον στοιχεία του μέσου που ταλαντώνονται με το μέγιστο δυνατό πλάτος? (δηλ. σε ποιο x μεγιστοποιείται το πλάτος;)

$$2A\sin(kx) = \pm 2A$$

$$\sin(kx) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$kx = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

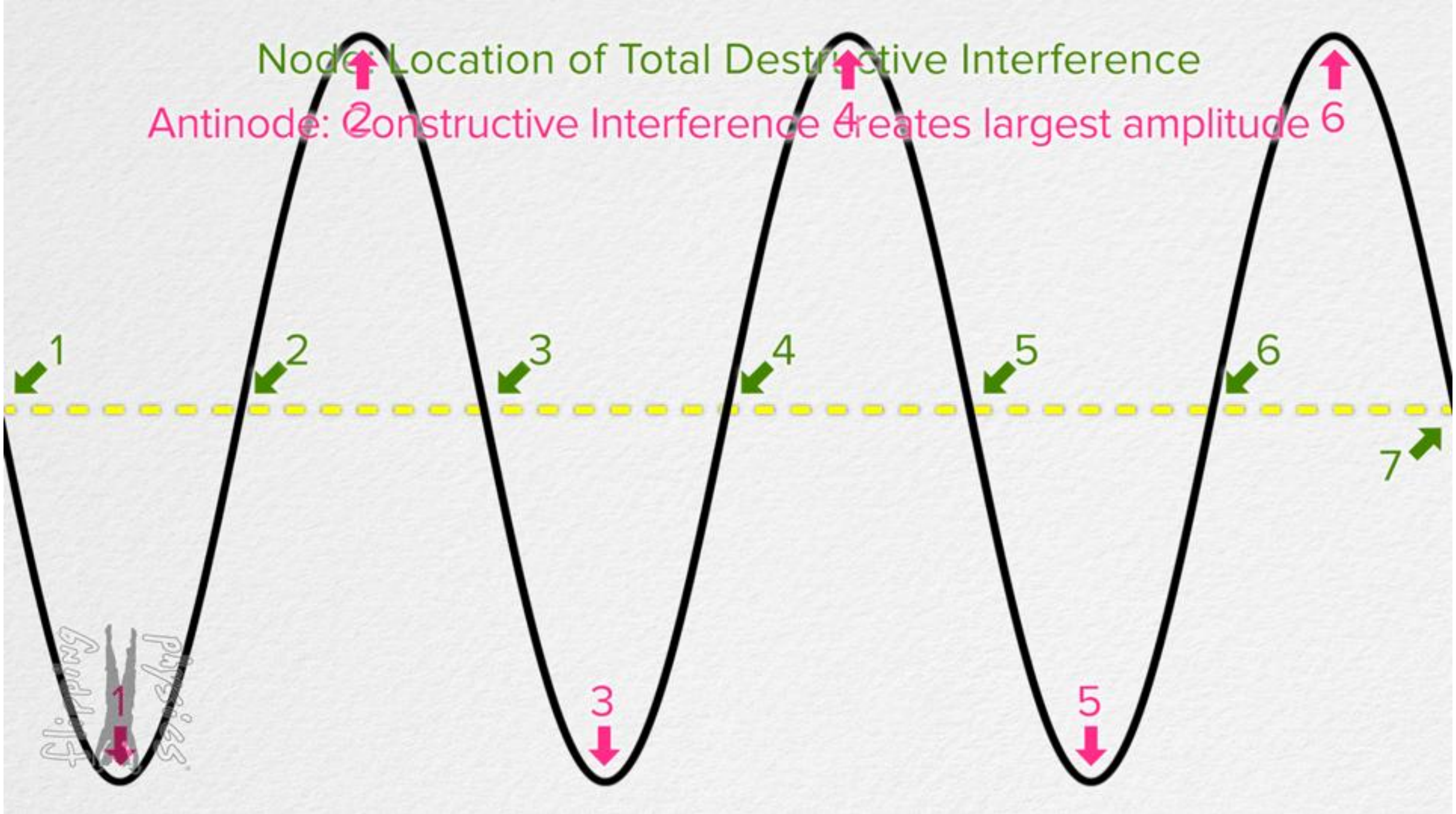
$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, n = 0,1,2,3,\ldots$$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **κοιλίες (ή αντιδεσμοί) (antinodes)**

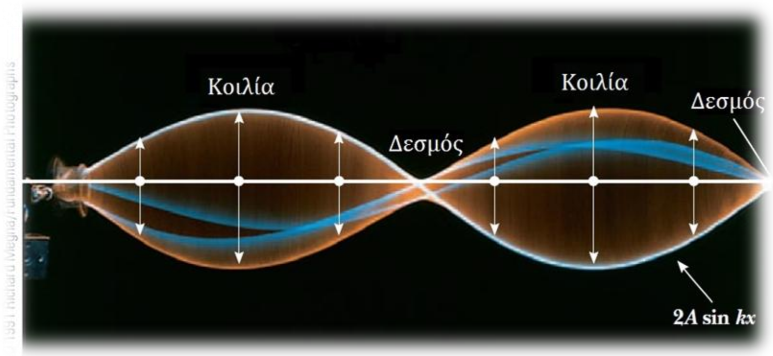
Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**



Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**



- Άρα εύκολα συμπεραίνει κανείς από τα προηγούμενα:

- Απόσταση μεταξύ **δυο διαδοχικών κοιλιών** = $\frac{\lambda}{2}$
- Απόσταση μεταξύ **δυο διαδοχικών δεσμών** = $\frac{\lambda}{2}$
- Απόσταση μεταξύ **δεσμού και επόμενης κοιλίας** = $\frac{\lambda}{4}$

Στάσιμα Κύματα

- **Παράδειγμα:**
  - Δυο κύματα τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις, δημιουργούν ένα στάσιμο κύμα. Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1(x,t) = 4\sin(3x - 2t)$$
$$y_2(x,t) = 4\sin(3x + 2t)$$

  με x, y να μετρούνται σε εκατοστά και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.
    - A) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.
    - B) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

Στάσιμα Κύματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1 = 4\sin(3x - 2t)$$
$$y_2 = 4\sin(3x + 2t)$$

  - A) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.

Γνωρίζουμε ήδη ότι το πλάτος του στάσιμου κύματος που θα δημιουργηθεί είναι

$$2A\sin(kx)$$

Έχουμε ότι $k = 3\ \frac{rad}{cm}$ και ότι $A = 4$ και άρα λοιπόν

$$2A\sin(kx) = 8\sin(3x)\Big|_{x=2.3} = 8\sin(6.9) \simeq 4.6\ cm$$

Στάσιμα Κύματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι k

$$y_1 = 4\sin(3x - 2t)$$
$$y_2 = 4\sin(3x + 2t)$$

  - Β) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

Ξέραμε ότι: $x_a = \frac{2n+1}{4}\lambda$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

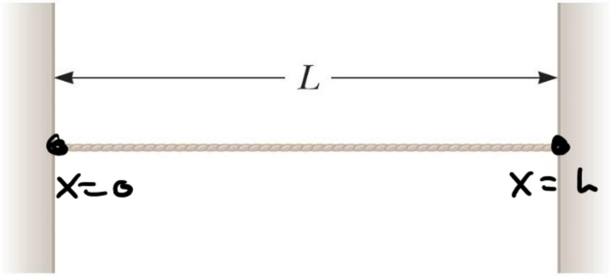
$x_\delta = \frac{n}{2}\lambda$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Είναι $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}$ cm , οπότε

$x_a = \frac{2n+1}{4}\frac{2\pi}{3}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $= \frac{2n+1}{6}\pi$

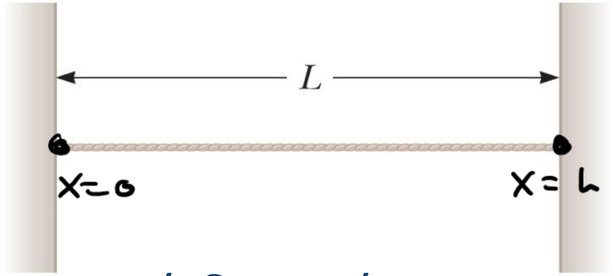
$x_\delta = \frac{n}{2}\frac{2\pi}{3}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $= \frac{\pi n}{3}$

Στάσιμα Κύματα



- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Θεωρήστε το νήμα της εικόνας
    - Χορδή κιθάρας, πιάνου
  - *Οριακή συνθήκη*: το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα!
  - Αν διεγείρουμε το νήμα στο μέσο του, δυο ημιτονοειδή κύματα θα ταξιδέψουν προς αντίθετες κατευθύνσεις
  - Όταν φτάσουν στα άκρα του νήματος, θα ανακλαστούν με ίδιο πλάτος και συχνότητα, και θα συμβάλλουν μεταξύ τους
    - Κι αυτό συνεχίζεται για τα επόμενα ανακλώμενα και συμβαλλόμενα κύματα
  - Αυτές είναι οι συνθήκες για δημιουργία ενός στάσιμου κύματος!

Στάσιμα Κύματα



- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - *<u>Οριακή συνθήκη</u>*: το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα!
    - Άρα το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν στάσιμο κύμα πάνω στο νήμα είναι προκαθορισμένο
    - $2A\sin kL = 0 \Rightarrow kL = \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1,2,3,4, \ldots$
    - Προκαθορισμένη είναι και η συχνότητα του κύματος, αφού

$$u = \lambda f \Rightarrow f_n = \frac{u}{\lambda_n}$$

  - Η οριακή συνθήκη προκαλεί ένα συγκεκριμένο αριθμό διακριτών στάσιμων κυμάτων στο νήμα, που λέγονται **κανονικοί τρόποι** ή **ιδιομορφές (modes)**
    - Καθεμιά έχει τη δική της συχνότητα, η οποία υπολογίζεται εύκολα όπως παραπάνω

Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Κανονικός τρόπος (mode) $\boldsymbol{n}$
  - Περιγράφεται ως η ταλάντωση που έχει οριακές συνθήκες στα άκρα της (δεσμοί) και κάθε δεσμός απέχει ¼ του μήκους κύματος από τον επόμενο/προηγούμενο αντιδεσμό
  - Μήκη κύματος

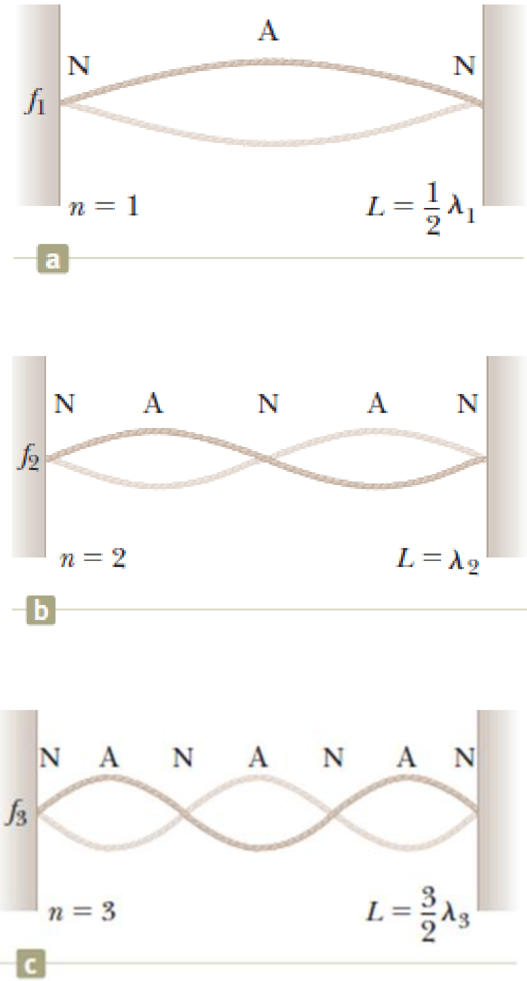
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, n \in \mathbb{N}^+$$

  - Φυσικές συχνότητες

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n\frac{u}{2L} = nf_1, n \in \mathbb{N}^+$$

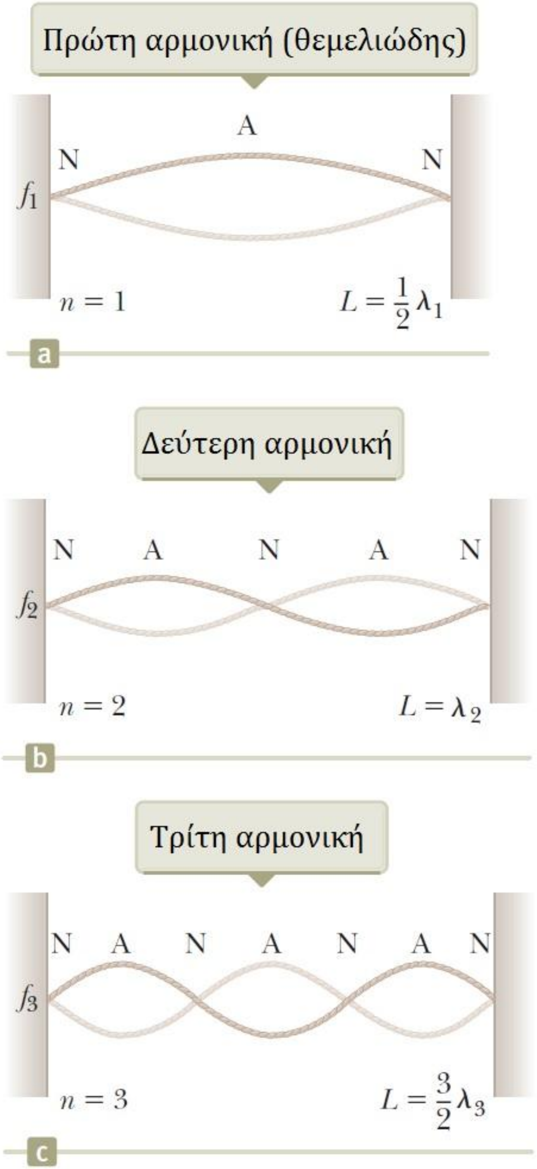
  - Για νήμα τάσης T και γραμμικής πυκνότητας μ,

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, n \in \mathbb{N}^+$$



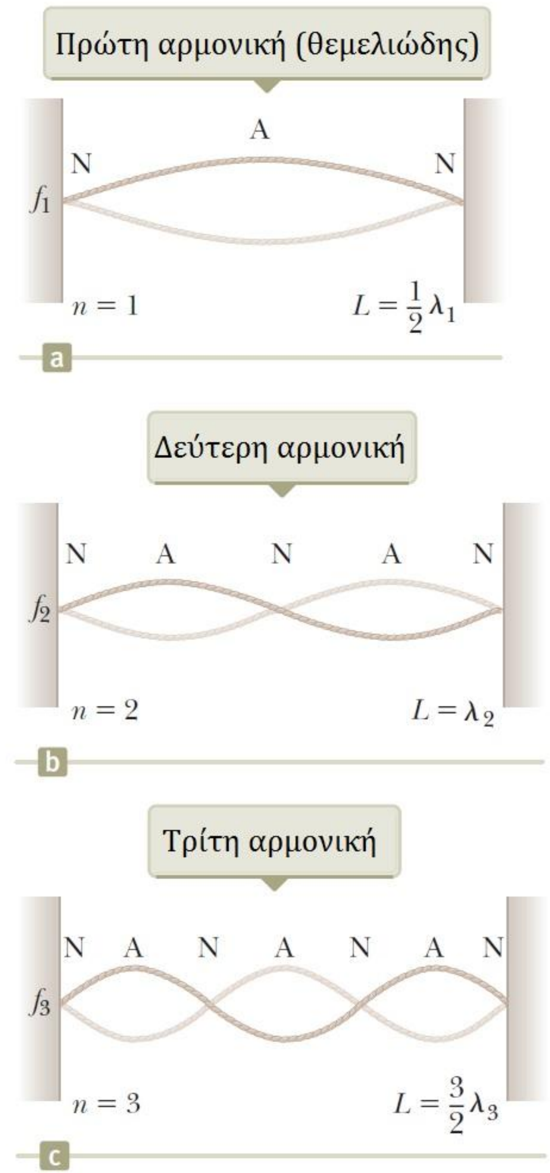
Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Κανονικές μορφές (modes) n
  - Για $n = 1$, η συχνότητα αυτή λέγεται ***θεμελιώδης συχνότητα***
    - Οι υπόλοιπες είναι ακέραιες πολλα-πλάσιες αυτής: $f_n = nf_1$
  - Συχνότητες κανονικών τρόπων που παρουσιάζουν αυτήν την ακέραια πολλαπλάσια σχέση δημιουργούν ταλαντώσεις που λέγονται ***αρμονικές***

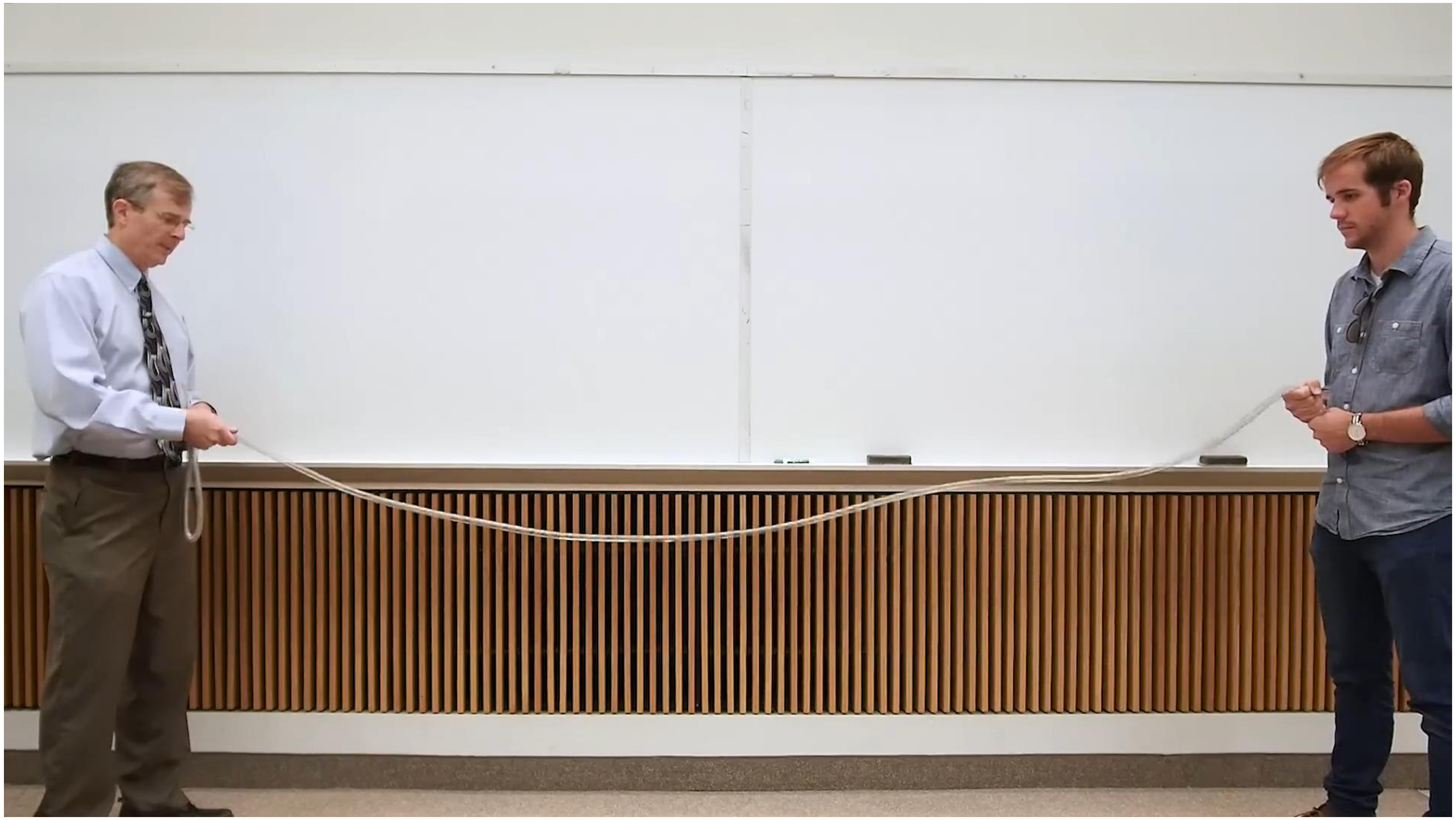


Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Για να παρουσιαστεί μια μόνο αρμονική, πρέπει να διεγείρουμε το νήμα ώστε να πάρει το σχήμα της επιθυμητής αρμονικής
    - Αφού το διεγείρουμε, το νήμα θα ταλαντωθεί στην αντίστοιχη συχνό-τητα
    - Δύσκολο να επιτευχθεί για τις περισ-σότερες αρμονικές
  - Αν διεγείρουμε το νήμα με τυχαίο τρόπο, μόνο κύματα που ικανοποι-ούν τις οριακές συνθήκες θα «επιζή-σουν» στο νήμα
    - Αυτά είναι οι αρμονικές ☺

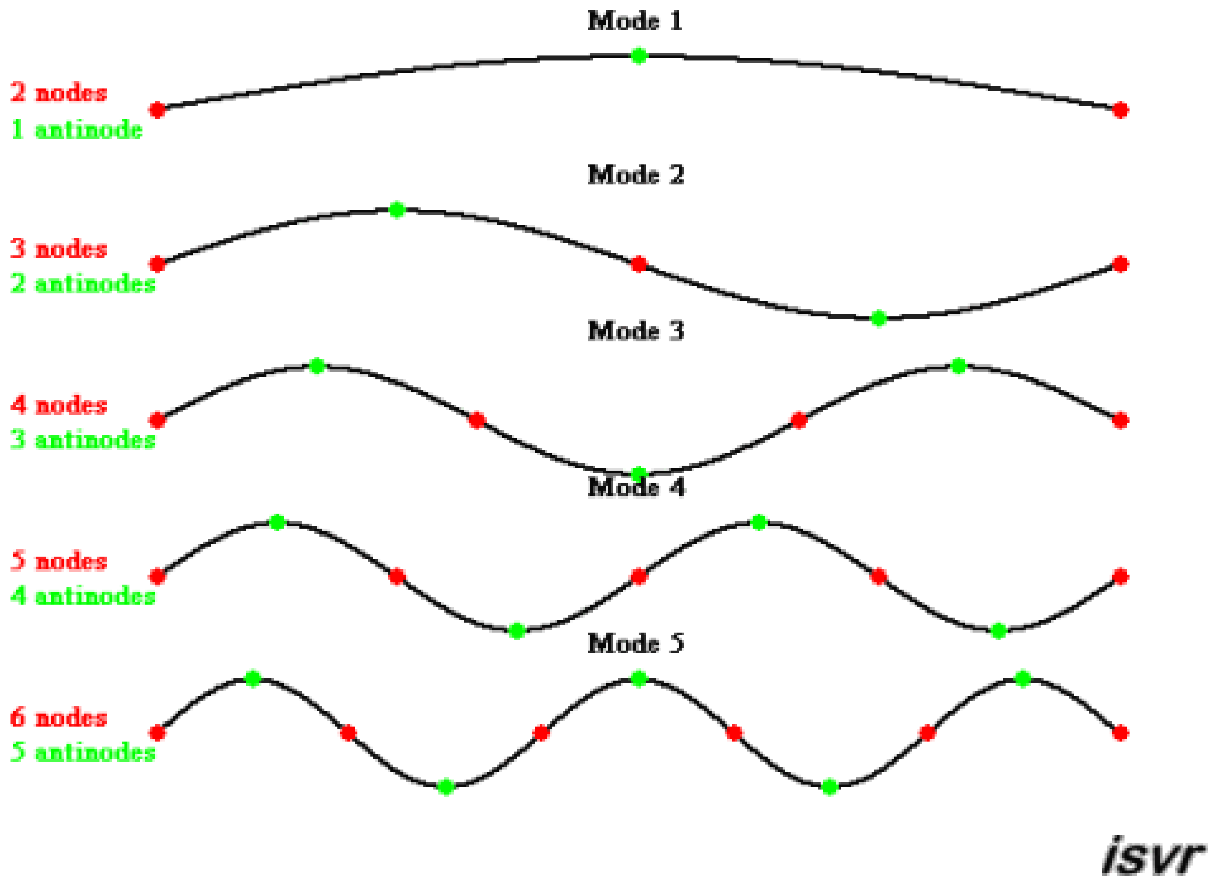


Στάσιμα Κύματα



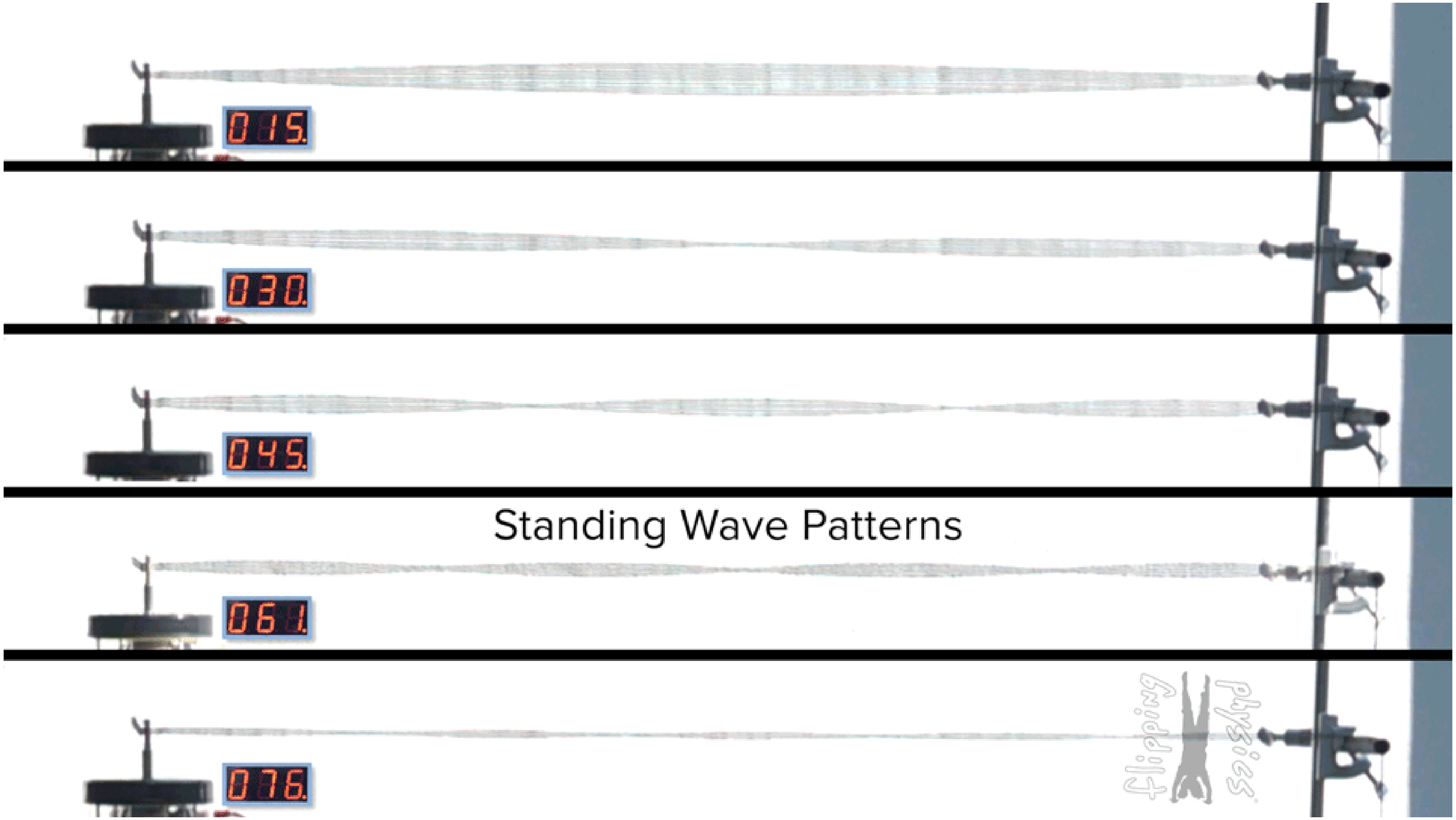
Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Κανονικές μορφές (modes) n



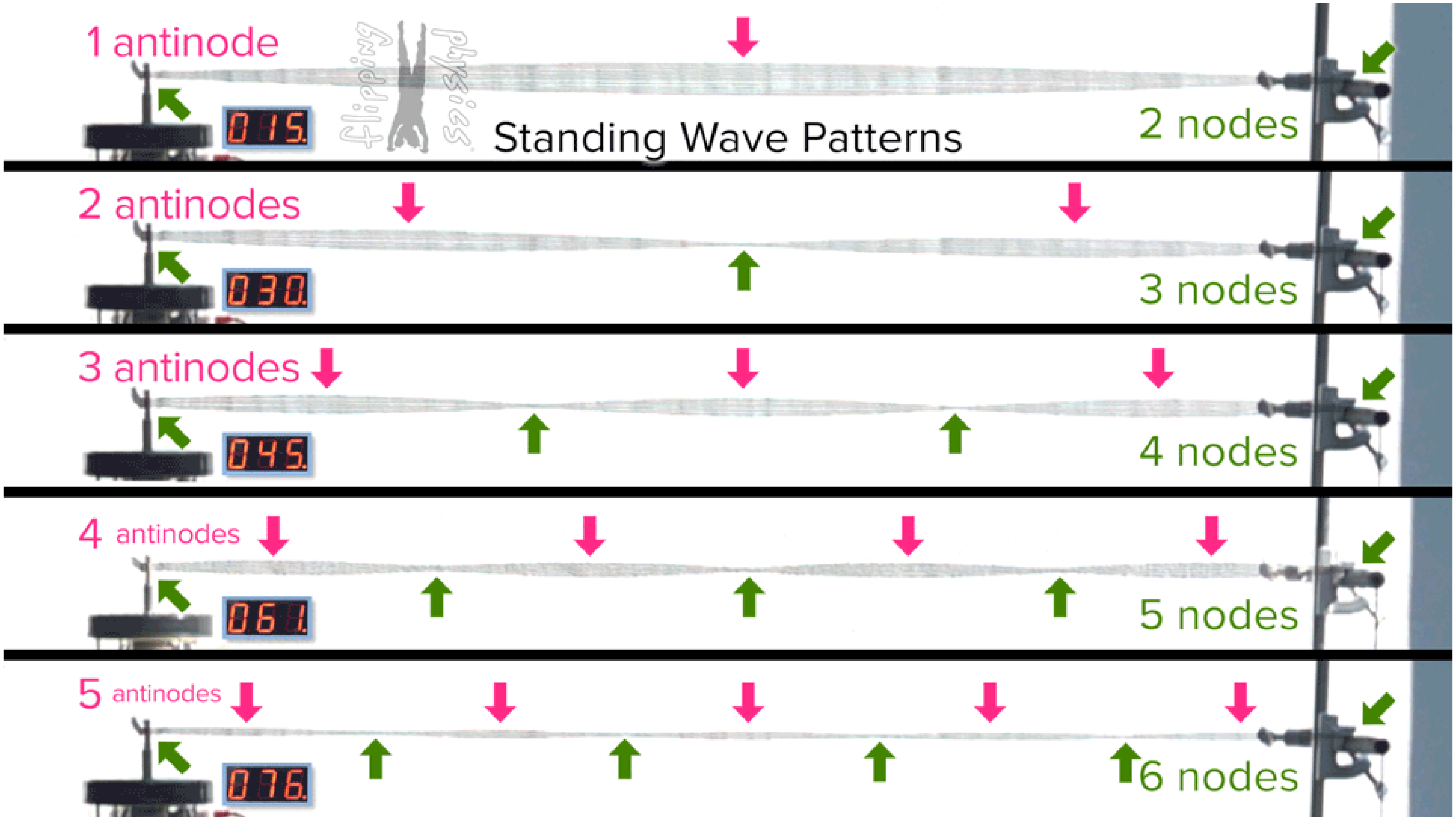
Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Κανονικές μορφές (modes) n



Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Κανονικές μορφές (modes) n



Τέλος Ενότητας