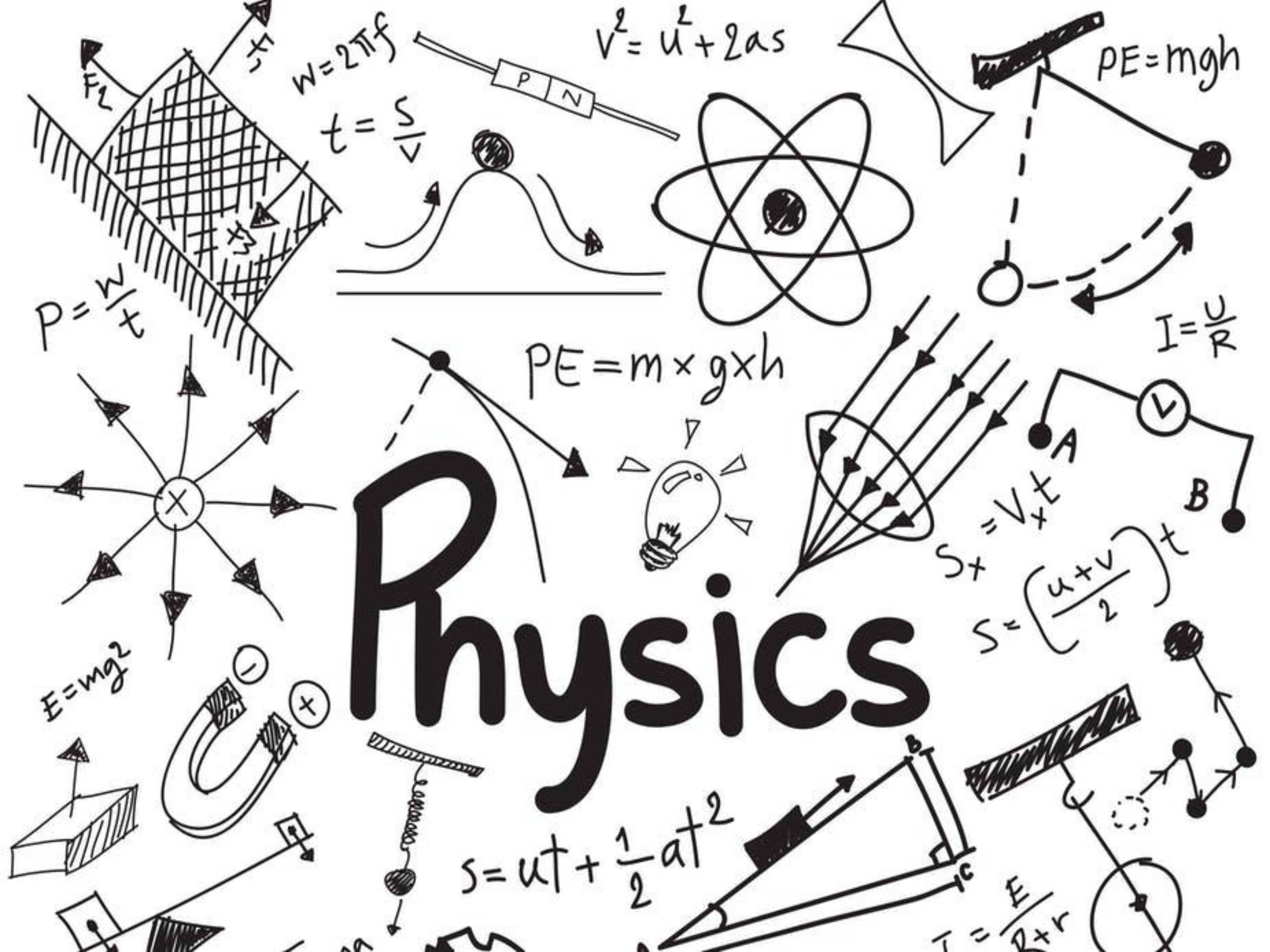


Physics
W=2πf
V²= u²+2as
PE=mgh
t = S/V
P = W/t
PE=m×g×h
I=U/R
A
B
S= (u+v/2) t
E=mg²
s=ut+½at²
I = E/R+r
P
N

Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο: Διανύσματα

Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο:

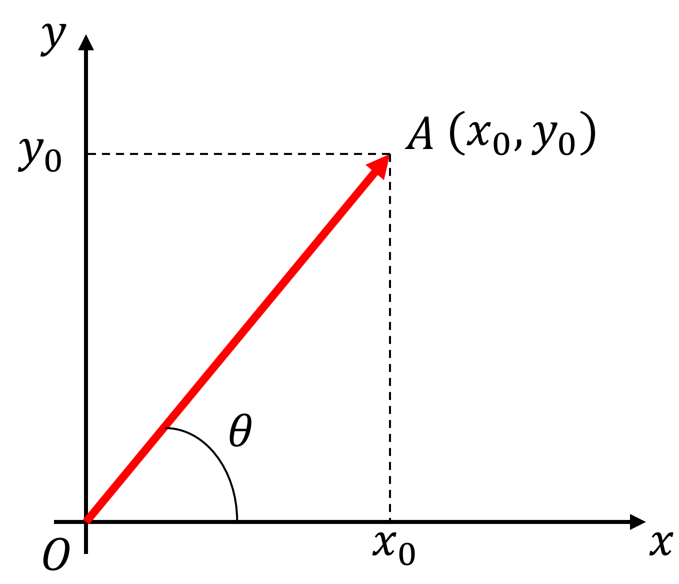
Διανύσματα

Διανύσματα

- Στην μελέτη της κίνησης είναι απαραίτητη η χρήση της έννοιας του διανύσματος

- **Διάνυσμα** $\overrightarrow{OA}$: **προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα**
  - Μέτρο
  - Διεύθυνση
  - Φορά

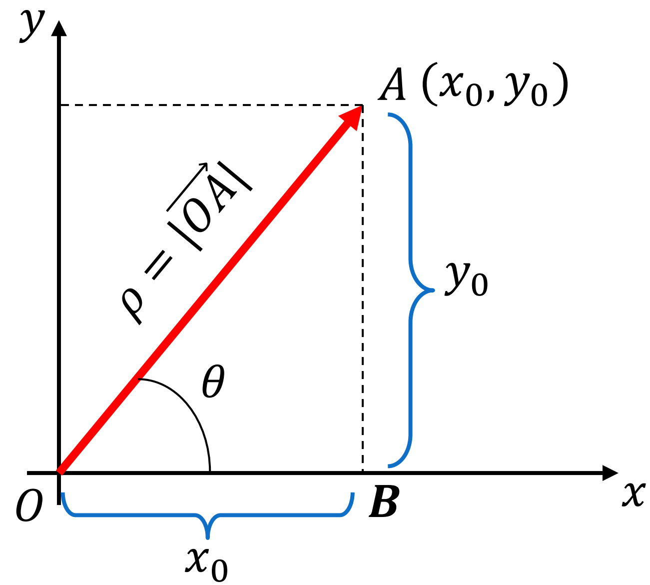
- **Καρτεσιανές** συντεταγμένες
  - x_0 – τετμημένη
  - y_0 – τεταγμένη



Διανύσματα

- **Πολικές** συντεταγμένες

- Στο τρίγωνο OAB:
  - $x_0 = \rho\,\text{συν}(\theta) = \rho\cos(\theta)$
  - $y_0 = \rho\,\text{ημ}(\theta) = \rho\sin(\theta)$



όπου

$$\rho = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\ , \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

- Πώς προκύπτει η γωνία θ (λέγεται και «**φάση**»)?
- Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB

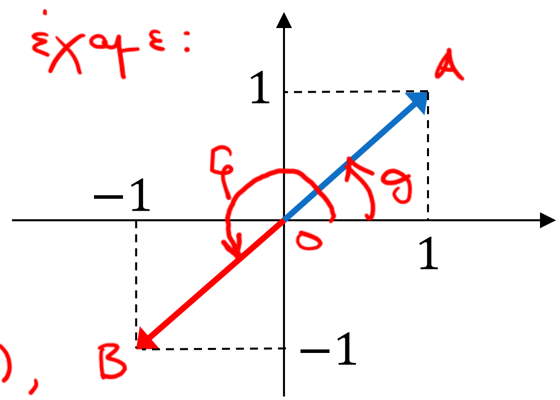
$$\text{εφ}(\theta) = \tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

- Γραφή πολικής μορφής: (ρ, θ)

Διανύσματα

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\ , \theta = \tan^{-1}\frac{y_0}{x_0}$$

- **Πολικές** συντεταγμένες
- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Βρείτε την πολική μορφή του διανύσματος με συντεταγμένες (x_0,y_0) = (1,1) και ύστερα αυτού με συντεταγμένες (x_0,y_0) = (-1, -1).



• Για το διάνυσμα $\vec{OA} = (1,1) = (x_0, y_0)$, θα έχουμε:

$$\rho = |\vec{OA}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y_0}{x_0} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

• Για το διάνυσμα $\vec{OB} = (-1,-1) = (x_0, y_0)$,

$$\rho = |\vec{OB}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y_0}{x_0} = \tan^{-1}\frac{-1}{-1} = \tan^{-1}(1)\ ! = \frac{\pi}{4}\ !$$ Διόρθωση !

$$\pm\pi \sim \frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$$

Διανύσματα

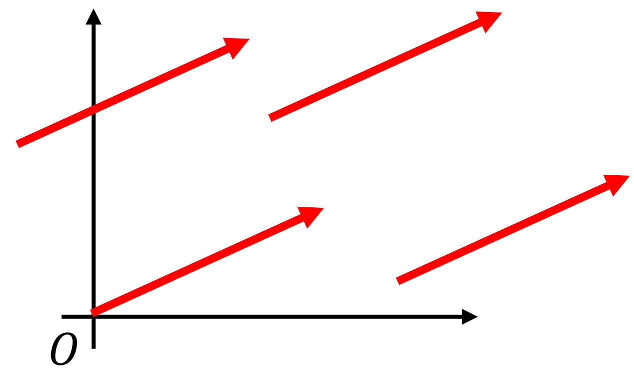
- **Πολικές** συντεταγμένες
- **<u>Διόρθωση γωνίας</u>**
- Για ένα διάνυσμα με συντεταγμένες (x, y), η γωνία που θα σχηματίζει με τον άξονα x’x θα είναι

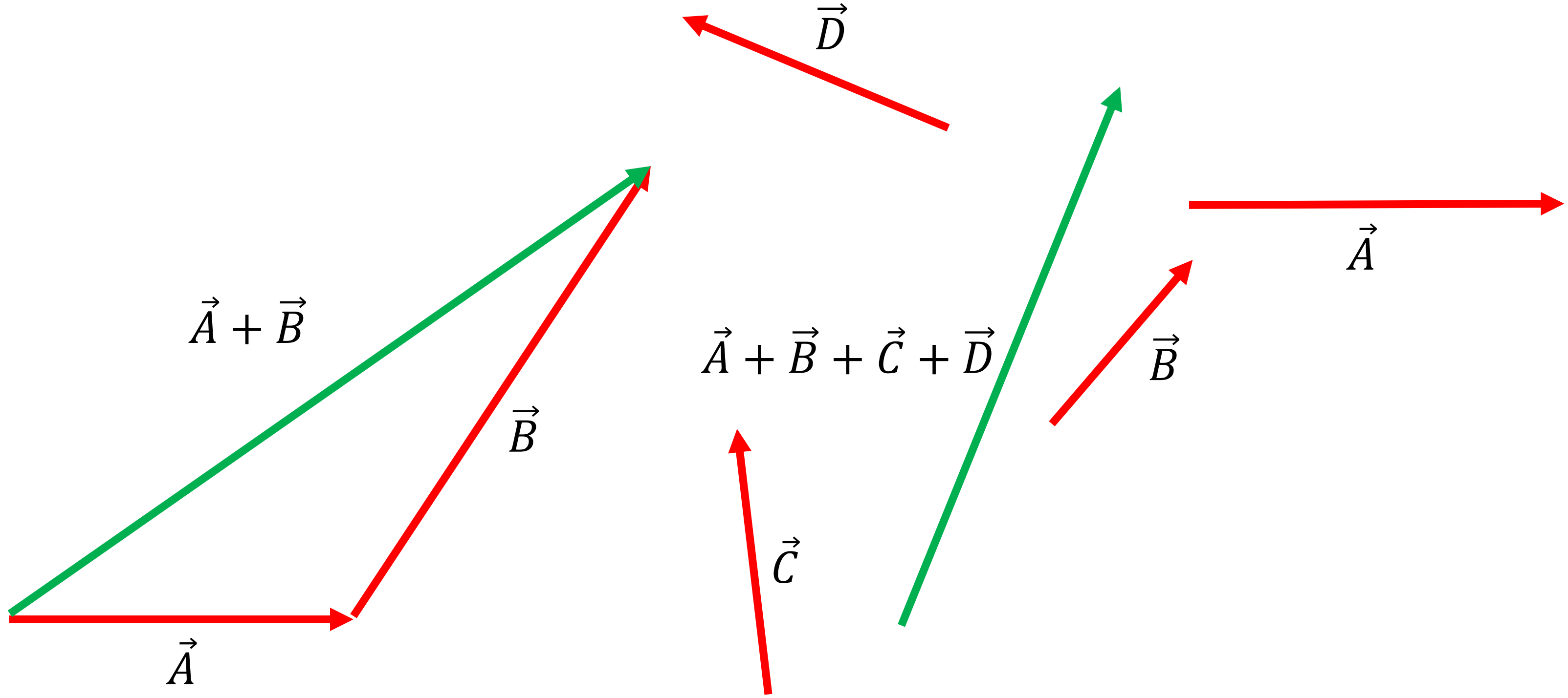
$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{if } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0, \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0, \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0. \end{cases}$$

και θα ανήκει πάντα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Διανύσματα

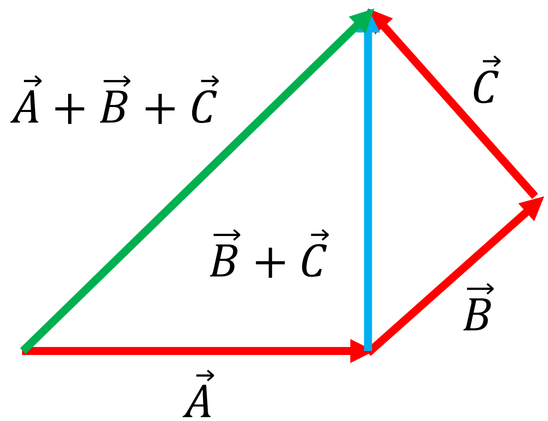
- <u>Ιδιότητες διανυσμάτων</u>
  - **Ισότητα** διανυσμάτων
    - Ίδιο μέτρο και κατεύθυνση
  - **Πρόσθεση** διανυσμάτων

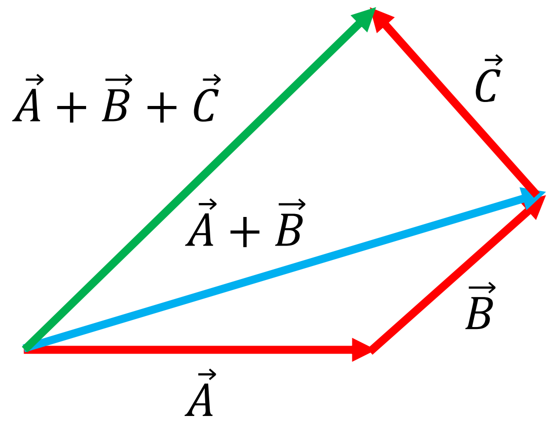




Διανύσματα

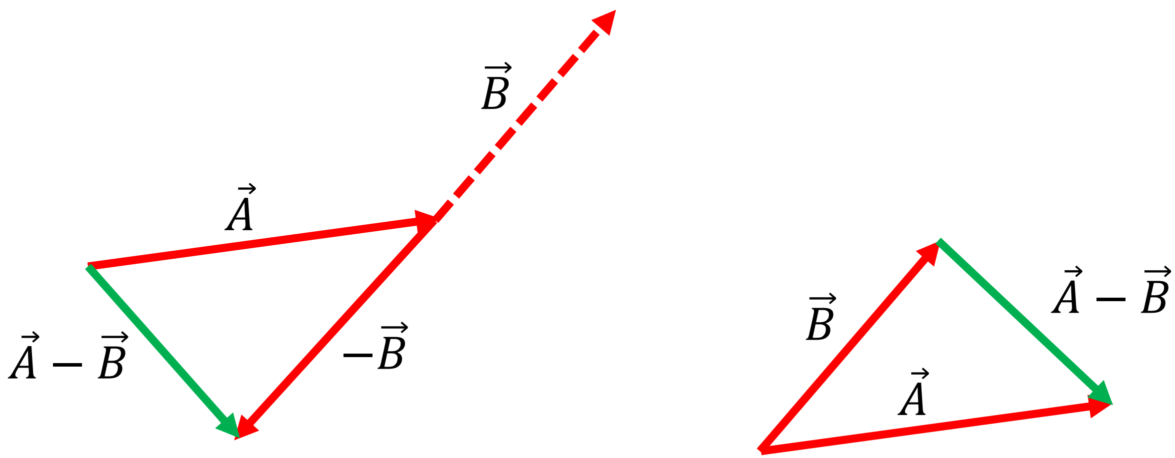
- <u>Ιδιότητες</u>
  - **Αντιμεταθετικότητα**
    - $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
  - **Προσεταιριστικότητα**
    - $\vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C}$





Διανύσματα

- **Αρνητικό διάνυσμα** ενός διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{A}}$
  - Ορίζεται ως το διάνυσμα εκείνο που όταν προστεθεί στο $\overrightarrow{\mathrm{A}}$, μας δίνει το μηδενικό διάνυσμα, δηλ. $\overrightarrow{\mathrm{A}} + \left(-\overrightarrow{\mathrm{A}}\right) = 0$
- Παράδειγμα:
  - Πράξη $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$



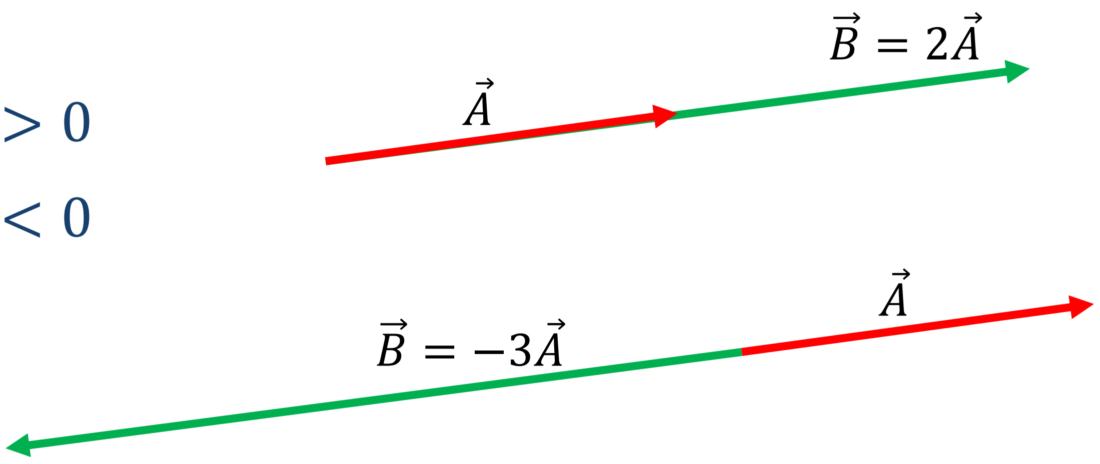
Διανύσματα

- **Πολλαπλασιασμός διανύσματος** με αριθμό

  - Το διάνυσμα διατηρεί τη διεύθυνση, αλλά αλλάζει (πιθανώς) η φορά και το μέτρο του

  - $\vec{B} = m\vec{A}, m \in \mathbb{R} \Rightarrow |\vec{B}| = |m||\vec{A}|$

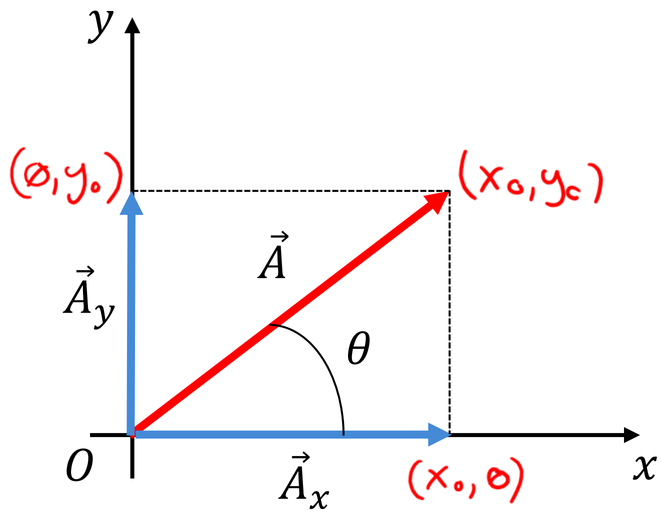
  - $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{A}$, αν $m > 0$
  - $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{A}$, αν $m < 0$

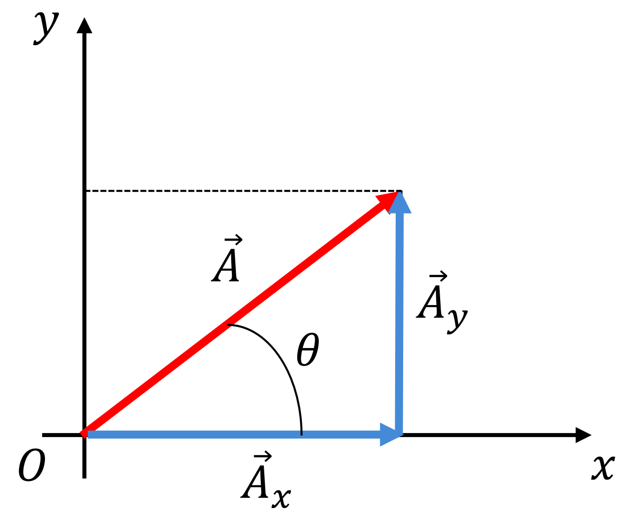


Διανύσματα

- Η γραφική μέθοδος είναι βολική για απλά ή διαισθητικά προβλήματα ή ως πρώτο βήμα πριν κάποια άλγεβρα
- Για μεγαλύτερη ακρίβεια και ευχρηστία, προτιμούμε την ανάλυση σε ***συνιστώσες*** (μια κάθετη και μια παράλληλη στον x-άξονα)

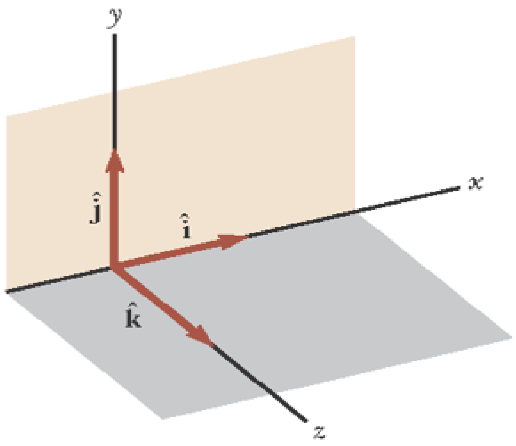
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$



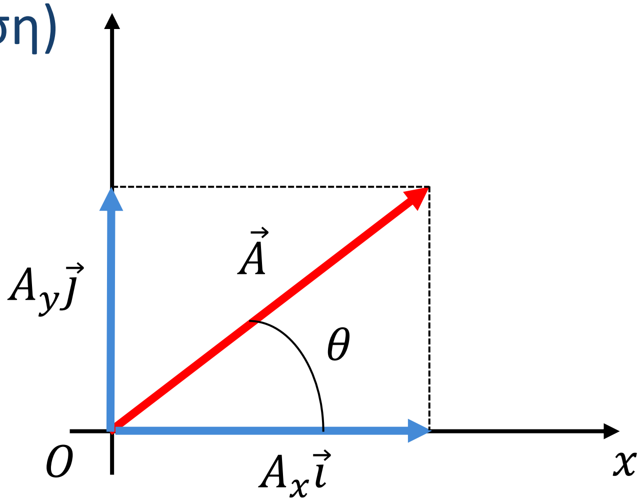


Διανύσματα

- Πολλές φορές εκφράζουμε σύνθετα διανύσματα με όρους **μονάδιαίων διανυσμάτων**



- Μοναδιαία διανύσματα $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$
  - Έχουν μέτρο 1 (μονάδα)
  - Περιγράφουν έναν άξονα (διεύθυνση)
    - $\vec{\imath} \rightarrow x, \vec{\jmath} \rightarrow y, \vec{k} \rightarrow z$
  - Κάθετα μεταξύ τους
    - $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}, \vec{\jmath} \perp \vec{k}, \vec{\imath} \perp \vec{k}$



Διανύσματα

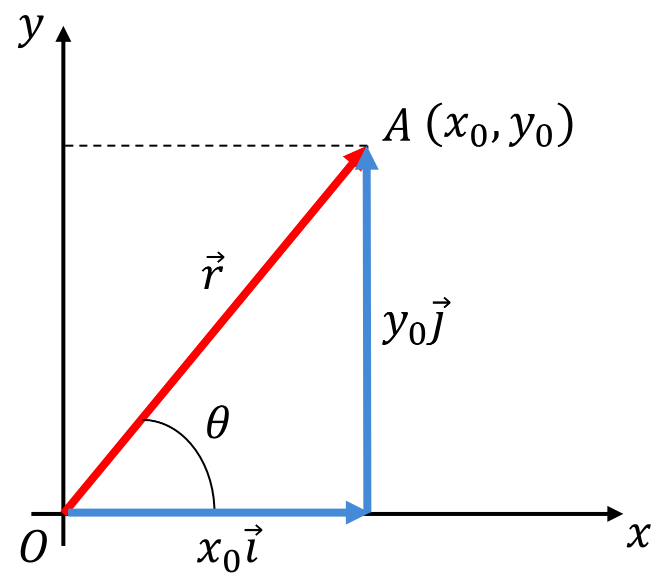
- Το διάνυσμα $\vec{\mathrm{A}}$ σε ένα επίπεδο μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_x\vec{i} + \mathrm{A}_y\vec{j}, \qquad A_x, A_y \in \Re$$

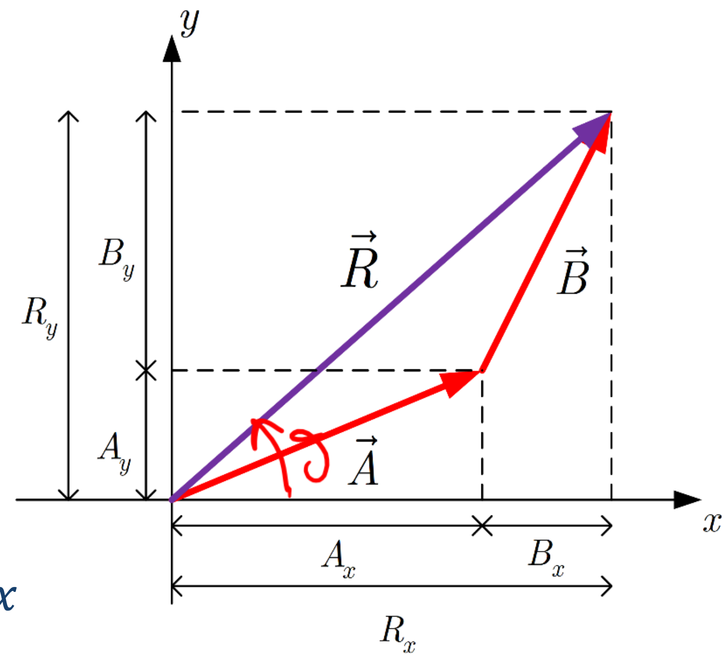
με χρήση των μοναδιαίων διανυσμάτων

- **Διάνυσμα θέσης**
  - Σημείο A (x_0, y_0)
  - $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$
  - Οι συνιστώσες του $\vec{r}$ είναι οι

$$x_0\vec{i}, y_0\vec{j}$$



Διανύσματα



- $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$
- $\vec{R} = \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}\right) + \left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}\right)$
- $\vec{R} = \underbrace{(A_x + B_x)}_{R_x}\vec{\imath} + \underbrace{\left(A_y + B_y\right)}_{R_y}\vec{\jmath}$
- με

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$

- **Πρόσθεση όλων των x-συνιστωσών και όλων των y-συνιστωσών**
- $|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2}$
- $\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y+B_y}{A_x+B_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{A_y+B_y}{A_x+B_x}$

$\pm\pi$, όπως είδαμε σε προηγ. διαφάνεια

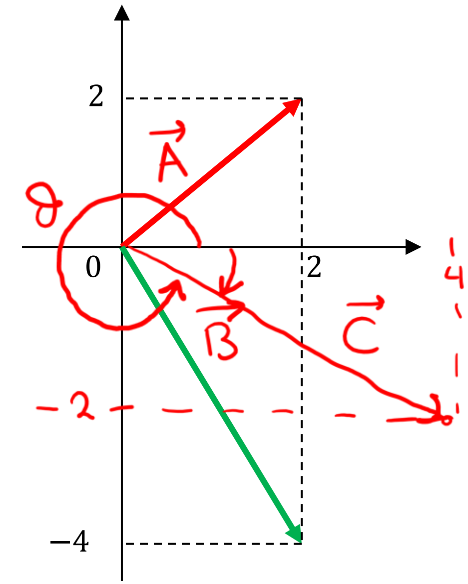
Διανύσματα

- **Παράδειγμα:**
  - Βρείτε το άθροισμα των διανυσμάτων

$$\vec{A} = (2\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\vec{B} = (2\vec{i} - 4\vec{j})$$

τόσο σε καρτεσιανή όσο και σε πολική μορφή



Είναι

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (2\vec{i} + 2\vec{j}) + (2\vec{i} - 4\vec{j})$$

$$= (2\vec{i} + 2\vec{i}) + (2\vec{j} - 4\vec{j}) = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

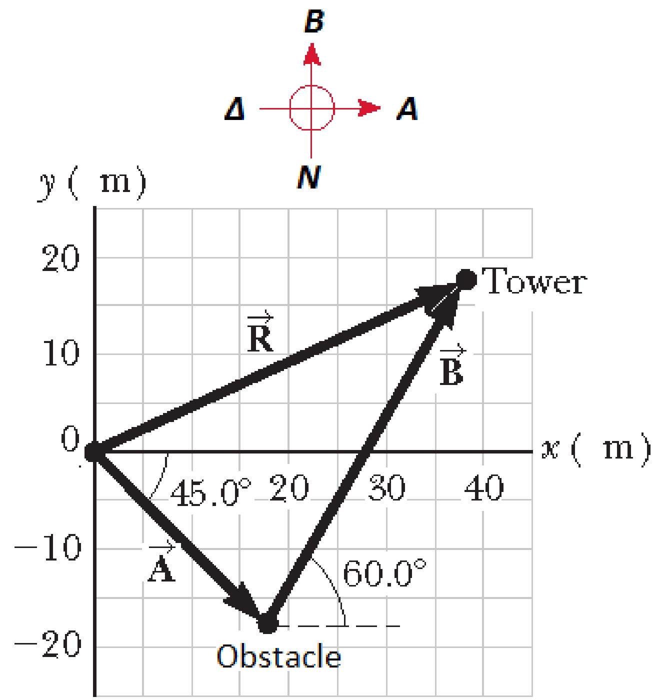
Επίσης

$$|\vec{C}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{4}\right) \simeq -26^\circ \text{ ή } 334^\circ \sim (2\sqrt{5}, -26^\circ)$$

Διανύσματα

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60º ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του (Δείτε το σχήμα).



A. Βρείτε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.

B. Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το $\vec{R}$ με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.

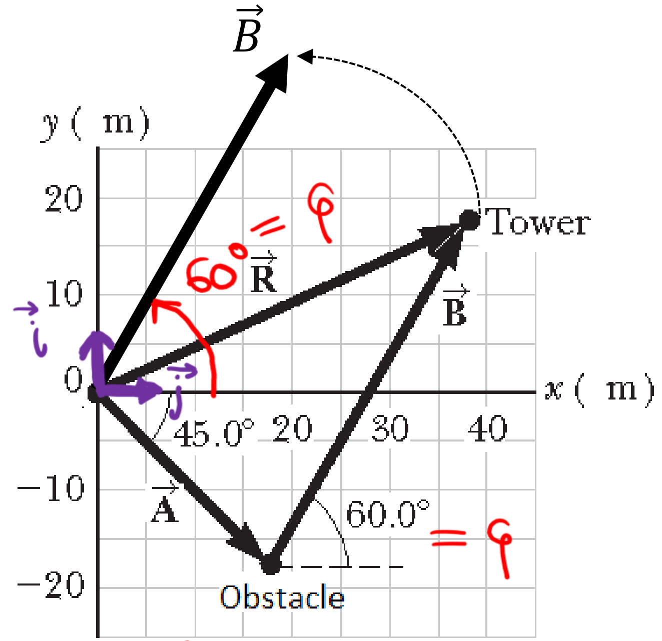
C. Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με το σημείο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;

Διανύσματα

Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

A. Βρείτε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.



Μεταφέραμε παράλληλα το διάνυσμα $\vec{B}$ έτσι ώστε να ξεκινά από το σημείο (0,0).

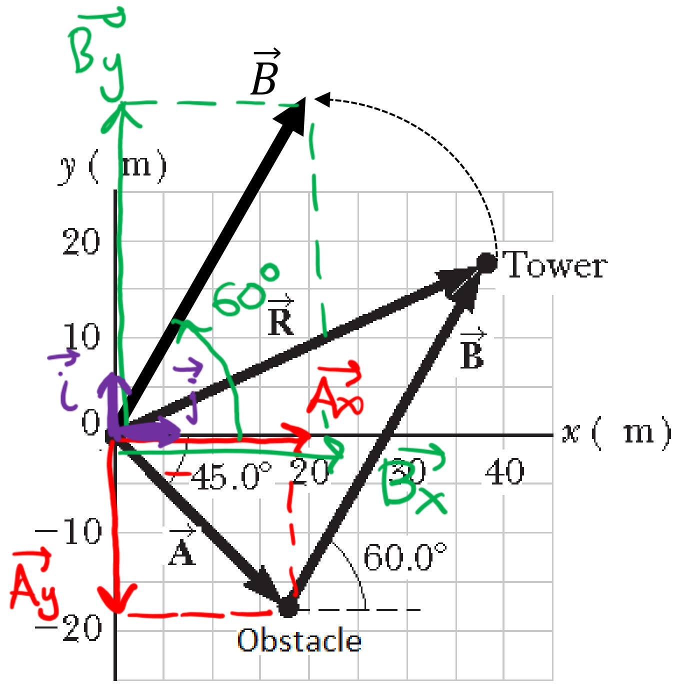
Η γωνία φ=60° παραμένει 60°, λόγω της παράλληλης μετατόπισης. Με μωβ χρώμα βλέπετε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$.

Διανύσματα

Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60ο ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

A. Βρείτε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.



$$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y} = A_x \vec{i} + A_y \cdot \vec{j}$$

$$A_x = |\vec{A}| \cdot \cos(-45^\circ) = 25 \cdot \cos(45^\circ) = 25 \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 17.7 \text{ m}$$

$$A_y = |\vec{A}| \cdot \sin(-45^\circ) = 25 \cdot (-\sin(45^\circ)) = 25\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cong -17.7 \text{ m}$$

$$B_x = |\vec{B}| \cos(60^\circ) = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ m}$$

$$B_y = |\vec{B}| \sin(60^\circ) = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \text{ m} \simeq 34.7 \text{ m}$$

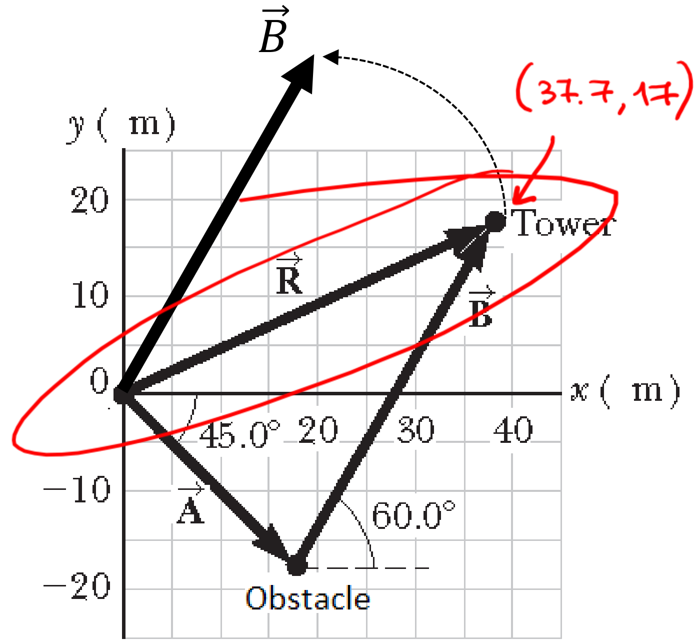
$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$$

Άρα τελικά: $\vec{A} = 17.7\vec{i} - 17.7\vec{j}$, $\vec{B} = 20\vec{i} + 34.7\vec{j}$

Διανύσματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

  B. Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το $\vec{R}$ με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.



Είναι

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$= (17.7\vec{i} - 17.7\vec{j}) + (20\vec{i} + 34.7\vec{j})$$

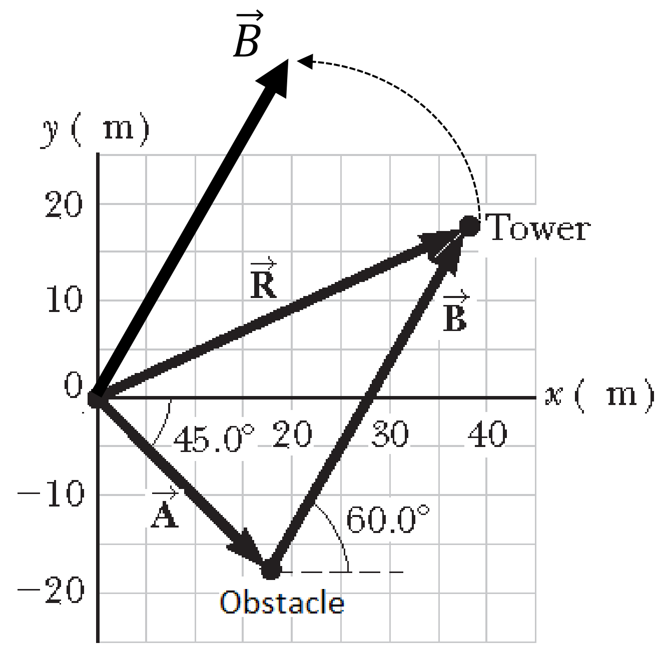
$$= \underbrace{37.7}_{x_0}\vec{i} + \underbrace{17}_{y_0}\vec{j}$$

Διανύσματα

Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

c. Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με το σημείο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;



Το διάνυσμα $-\vec{R}$ περιγράφει τη ζητούμενη πορεία!

Άρα $-\vec{R} = -37.7\,\vec{i} - 17\,\vec{j}$

είναι το ζητούμενο διάνυσμα. Η κατεύθυνσή του θα είναι η αντίθετη του διανύσματος $\vec{R}$.

Διανύσματα

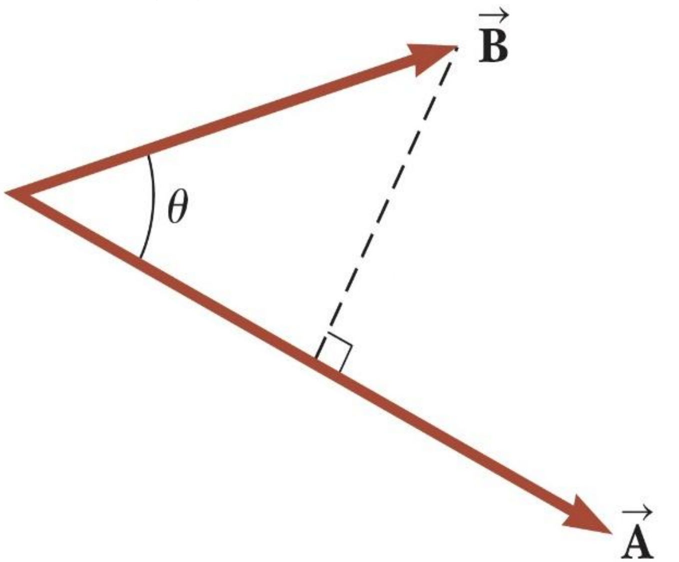
- Έστω δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$

- Το **εσωτερικό τους γινόμενο** είναι μια βαθμωτή ποσότητα (= αριθμός) που ορίζεται ως

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = |\vec{\mathbf{A}}||\vec{\mathbf{B}}| \cos(\boldsymbol{\theta})$$

με θ τη μεταξύ τους γωνία

Το εσωτερικό γινόμενο σχετίζεται με τη έννοια της προβολής του ενός διανύσματος στο άλλο και μας πληροφορεί «πόσο» από το ένα διάνυσμα «δείχνει» στην ίδια κατεύθυνση με το άλλο.



Διανύσματα

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = |\vec{\mathbf{A}}||\vec{\mathbf{B}}| \cos(\boldsymbol{\theta})$$

- **Αντιμεταθετικότητα**

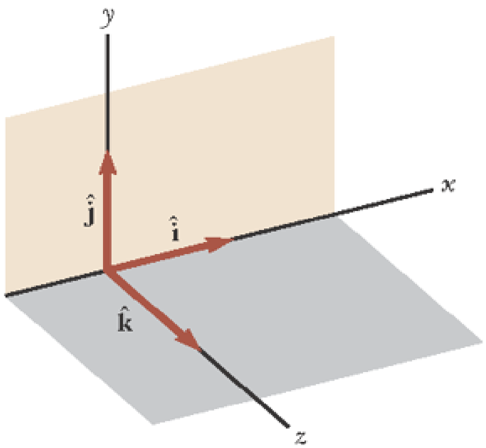
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

- **Επιμεριστικότητα**

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

- Ειδικές περιπτώσεις
  - $\vec{\mathrm{A}} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$
  - $\vec{A} \uparrow\uparrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|$
  - $\vec{A} \uparrow\downarrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = -|\vec{A}||\vec{B}|$

Διανύσματα



- Μοναδιαία διανύσματα $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$
  - Ορίζουν ένα 3Δ χώρο

- Εύκολα αποδεικνύεται (κάντε το! ☺) ότι

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$
$$\vec{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{\imath} = 0$$

- Για $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}, \qquad \vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k},$

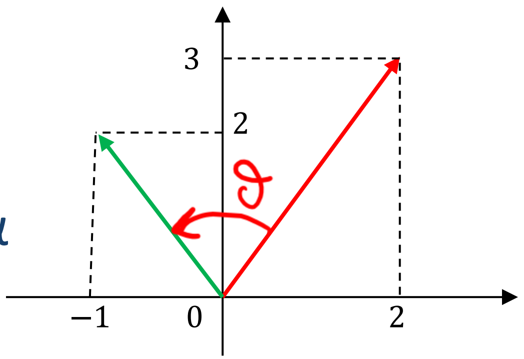
έχουμε

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

① $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta)$

Διανύσματα

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο και τη γωνία μεταξύ των δυο διανυσμάτων



$$\vec{A} = (2\vec{i} + 3\vec{j})$$
$$\vec{B} = (-\vec{i} + 2\vec{j})$$

Είναι $\vec{A}\cdot\vec{B} = (2\vec{i}+3\vec{j})\cdot(-\vec{i}+2\vec{j})$

$= 2\vec{i}\cdot(-\vec{i}) + 4\vec{i}\cdot\vec{j} + 3\vec{j}\cdot(-\vec{i}) + 6\vec{j}\cdot\vec{j}$

$= -2 + 4\cdot 0 + 3\cdot 0 + 6 = 6-2 = 4$

Από ①, $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = 4$

$|\vec{A}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{65}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{\sqrt{65}}\right) \cong 60^\circ$

Εικόνα: Η Όπερα του Σίδνεϊ είναι πολυχώρος τεχνών θεάματος στο Σίδνεϊ της Αυστραλίας, ένα από τα πιο διασημότερα κτίρια του 20ού αιώνα και αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους χώρους άσκησης τεχνών στον κόσμο. Σχεδιάστηκε από τον Δανό αρχιτέκτονα Γιερν Ούντσον και εγκαινιάστηκε επισήμως τις 20 Οκτωβρίου 1973. Στη σχεδίασή του χρειάστηκαν πολλές διαφορικές εξισώσεις, δηλ. εξισώσεις που περιλαμβάνουν παραγώγους πολλών μεταβλητών.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο:
Παραγώγιση - ολοκλήρωση

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Παραγώγιση - ολοκλήρωση

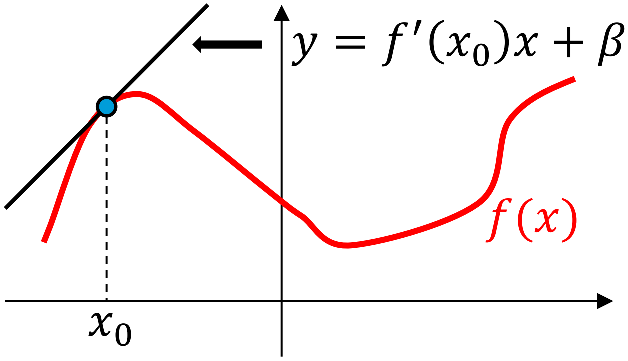
Εικόνα: Η Όπερα του Σίδνεϊ είναι πολυχώρος τεχνών θεάματος στο Σίδνεϊ της Αυστραλίας, ένα από τα πιο διασημότερα κτίρια του 20ού αιώνα και αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους χώρους άσκησης τεχνών στον κόσμο. Σχεδιάστηκε από τον Δανό αρχιτέκτονα Γιερν Ούντσον και εγκαινιάστηκε επισήμως τις 20 Οκτωβρίου 1973. Στη σχεδίασή του χρειάστηκαν πολλές διαφορικές εξισώσεις, δηλ. εξισώσεις που περιλαμβάνουν παραγώγους πολλών μεταβλητών.

Παράγωγος

- Αν $f(x)$ συνεχής συνάρτηση του x τότε ορίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης ως

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Η παράγωγος εκφράζει πόσο γρήγορα (ρυθμός μεταβολής) μεταβάλλεται η συνάρτηση $f(x)$ συναρτήσει του x
- Η εφαπτομένη μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 έχει «κλίση» (συντελεστή διεύθυνσης) $f'(x_0)$



- 2η παράγωγος: $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$
- 3η παράγωγος: $f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}f(x)$

κ.ο.κ $f^{(4)}(x) = \ldots$

Παράγωγος

Κανόνες	
$\frac{d}{dx}\big(af(x)+bg(x)\big)=af'(x)+bg'(x)$	$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big)=g'(x)f'\big(g(x)\big)$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\big(f'(x)g(x)-g'(x)f(x)\big)}{g^2(x)}$	$\frac{d}{dx}c=0, \forall\, c\in\Re$
$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

Παράγωγοι	
$\frac{d}{dx}e^{ax}=ae^{ax}, \forall\, a\in\Re$	$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}, \forall\, n\in\Re$
$\frac{d}{dx}\ln(f(x))=f'(x)\frac{1}{f(x)}$	$\frac{d}{dx}\sin(f(x))=f'(x)\cos\big(f(x)\big)$
$\frac{d}{dx}\cos(f(x))=-f'(x)\sin\big(f(x)\big)$	$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)}=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Ολοκλήρωμα

- Το ολοκλήρωμα είναι – σχεδόν – η αντίστροφη πράξη της παραγώγισης
- Για παράδειγμα, αν $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$, τότε

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

  - Με άλλα λόγια, **όταν θέλω να υπολογίσω το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $F(x)$, αναζητώ μια συνάρτηση $f(x)$, η οποία ονομάζεται *παράγουσα,* την οποία αν παραγωγίσω θα πάρω την $F(x)$**
- Το παραπάνω ολοκλήρωμα ονομάζεται ***αόριστο*** ολοκλήρωμα
  - Το αόριστο ολοκλήρωμα είναι πάντα μια συνάρτηση κάποιας ανεξάρτητης μεταβλητής (όπως το x εδώ)
- Το σύμβολο dx μας δηλώνει τη *μεταβλητή ολοκλήρωσης*

Ολοκλήρωμα

- Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

Παρατηρήστε ότι ισχύει και

$$\frac{d}{dx}(x^3 + c) = 3x^2, \qquad \forall\ c \in \Re$$

και άρα το πιο σωστό θα ήταν να πούμε ότι

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c, \qquad \forall\ c \in \Re$$

- Η πιο σημαντική ιδιότητα της ολοκλήρωσης είναι η **γραμμικότητα**:

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

Ολοκλήρωμα

- Πιο γενικά λοιπόν, αν $F(x) = f'(x)$ τότε

$$\int F(x)dx = \int f'(x)dx = f(x) + c, \qquad \forall \; c \in \Re$$

- Αντίθετα, ένα ***ορισμένο*** ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_a^b F(x)dx$$

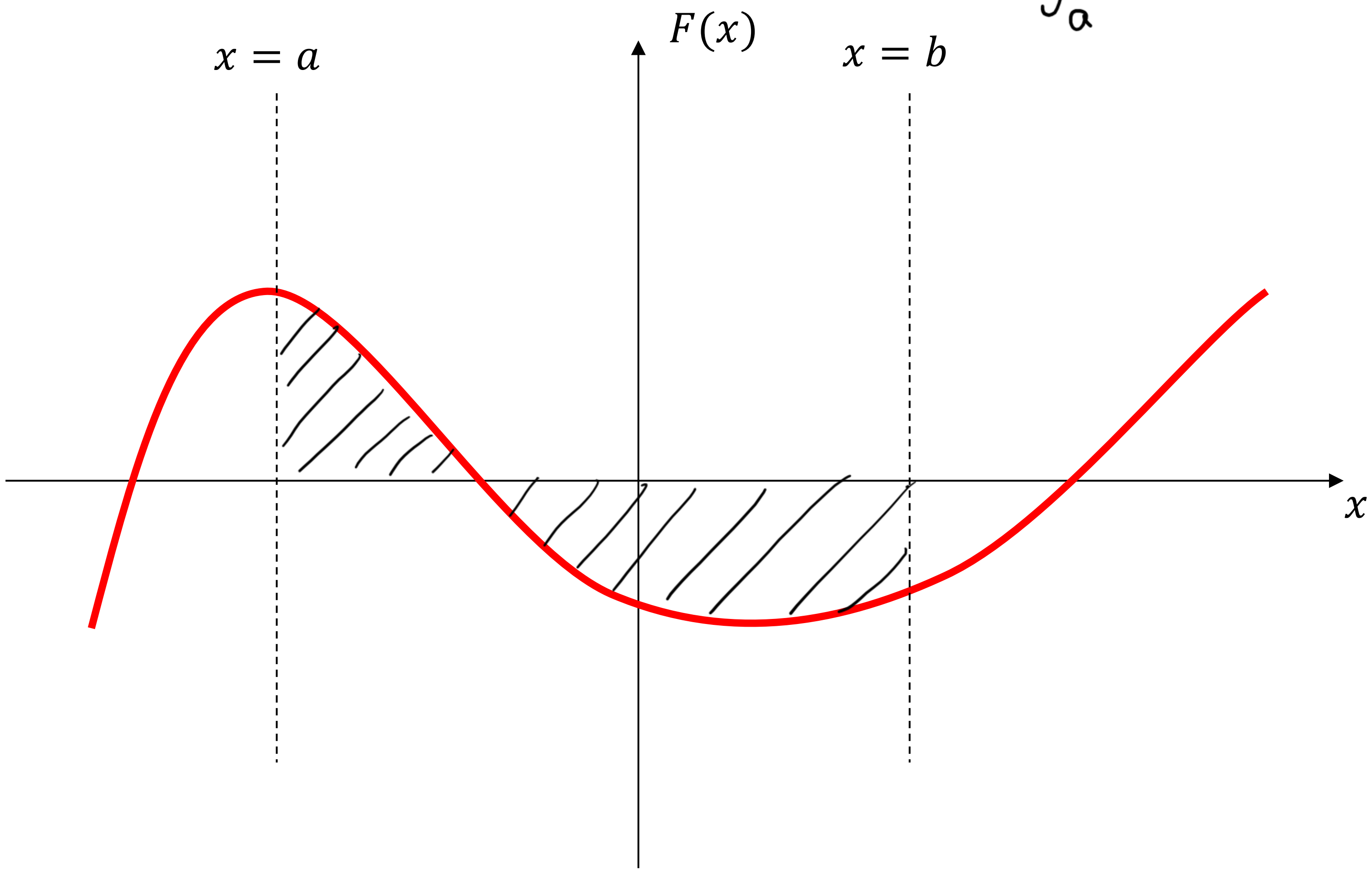
  και υπολογίζεται ως

$$\int_a^b F(x)dx = f(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)$$

- Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πάντα ένας αριθμός – ΟΧΙ μια συνάρτηση (στα πλαίσια του μαθήματος)
  - … και ποτέ δεν περιλαμβάνει σταθερά c στο αποτέλεσμα
  - Ερμηνεύεται ως η επιφάνεια μεταξύ της συνάρτησης $F(x)$ και του οριζόντιου άξονα, από την ευθεία $x = a$ ως την ευθεία $x = b$

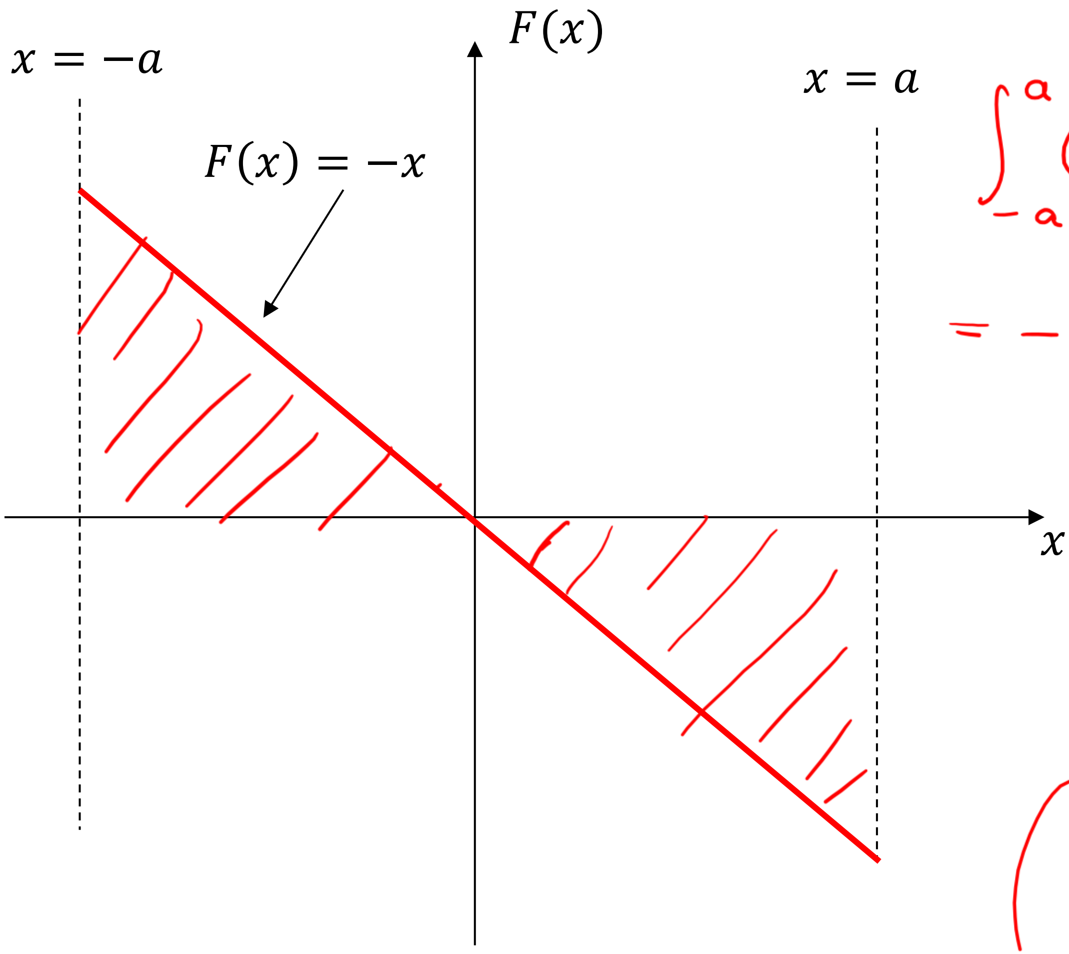
Ολοκλήρωμα

$$\int_a^b F(x)\,dx$$



Ολοκλήρωμα

$$\int_{-a}^{a} F(x)dx = ? \quad 0$$



$$\int_{-a}^{a} (-x)\,dx \overset{*}{=} \int_{-a}^{a} \left(-\frac{x^2}{2}\right)' dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=-a}^{x=a} = -\frac{a^2}{2} - \left(-\frac{(-a)^2}{2}\right)$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

$$* \quad \left(-\frac{x^2}{2}\right)' = \left(-\frac{2x}{2}\right) = -x \checkmark$$

Ολοκλήρωμα

- **Παραδείγματα:**

αόριστο

1) $$\int (x^2 + 3x + 2)dx = ?$$

ορισμένο

2) $$\int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x + 2)dx = ?$$

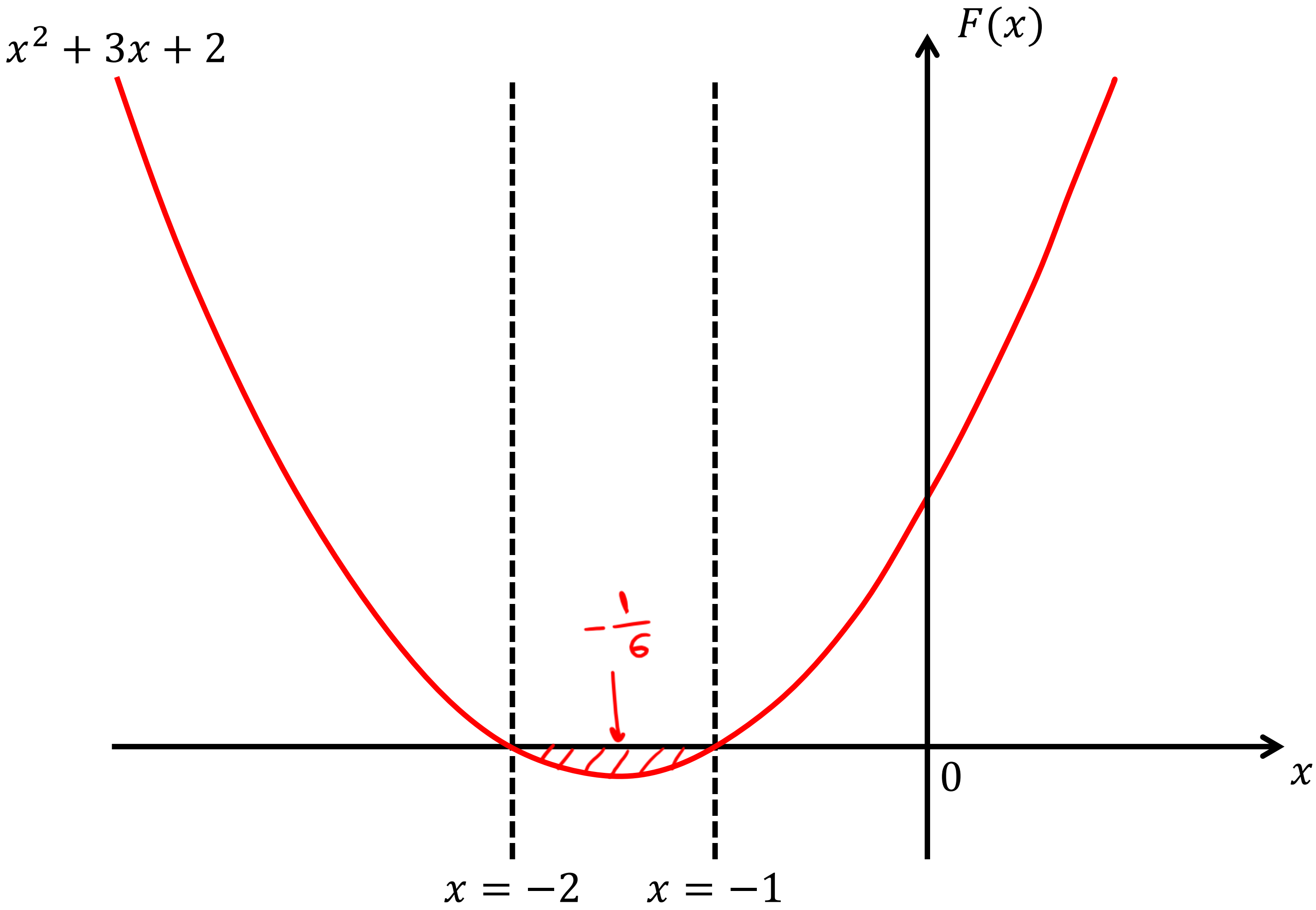
1) $\int (x^2+3x+2)\,dx = \int x^2 dx + \int 3x\,dx + \int 2\,dx$

$= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx + \int \left(\frac{3x^2}{2}\right)' dx + \int (2x)' dx$

$= \frac{x^3}{3} + c_1 + \frac{3x^2}{2} + c_2 + 2x + c_3 = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + c$

2) Βρήκα ότι $\int_{-2}^{-1} (x^2+3x+2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{x=-2}^{x=-1} = \dots = -\frac{1}{6}$

Ολοκλήρωμα



Ολοκλήρωμα

- **Παραδείγματα:**

1) $$\int e^{ax}dx = ?$$

2) $$\int_0^1 e^{ax}dx = ?$$

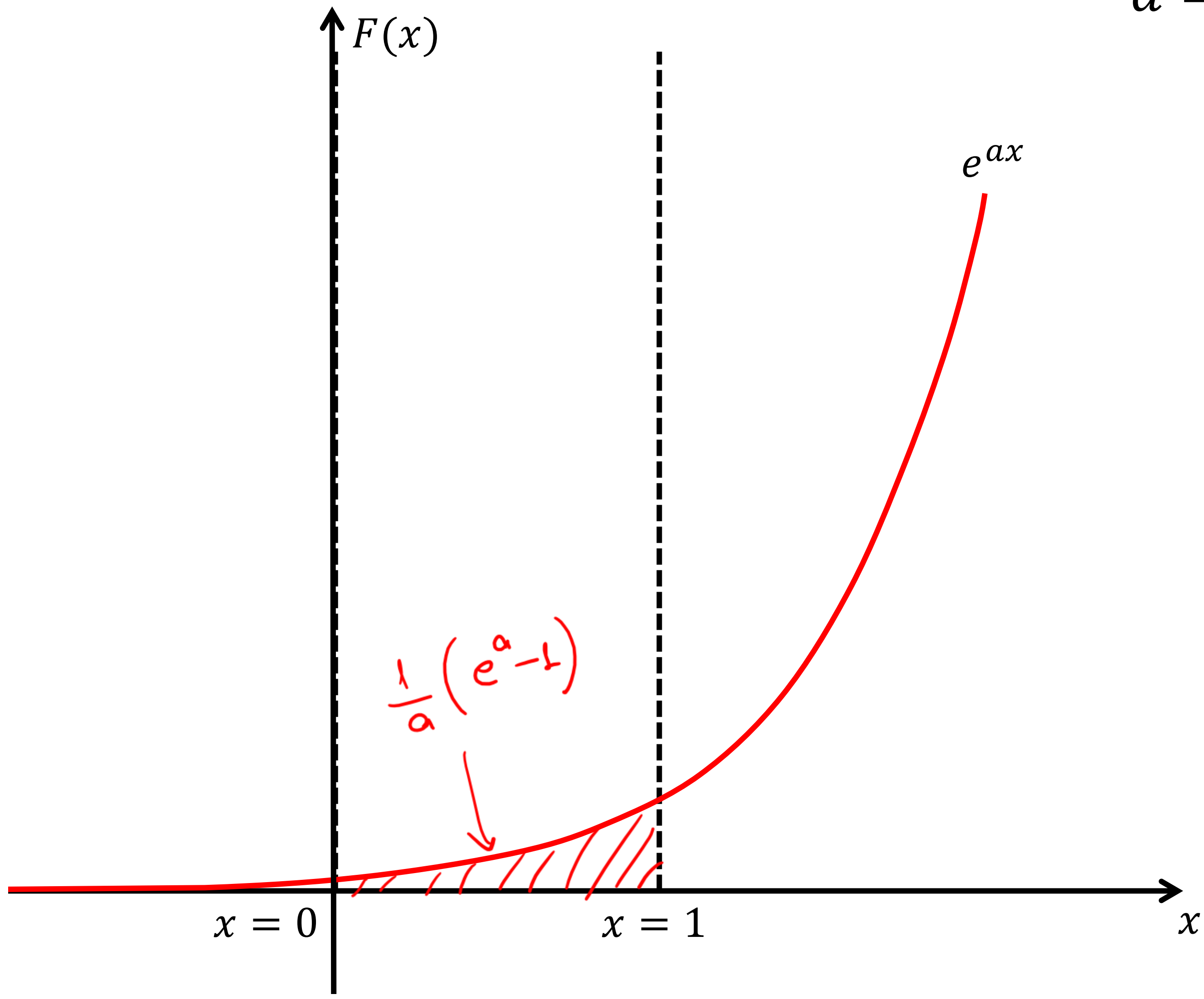
1) Είναι $\displaystyle\int e^{ax}dx = \int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c,\ c \in \mathbb{R}$

2) Βρήκα $\displaystyle\int_0^1 e^{ax}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' dx = \frac{1}{a}e^{ax}\Big|_{x=0}^{x=1}$

$\displaystyle = \frac{1}{a}e^{ax}\Big|_{x=1} - \frac{1}{a}e^{ax}\Big|_{x=0} = \frac{1}{a}e^{a} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a}(e^{a}-1).$

Ολοκλήρωμα

$a = 2$



Τέλος Διάλεξης