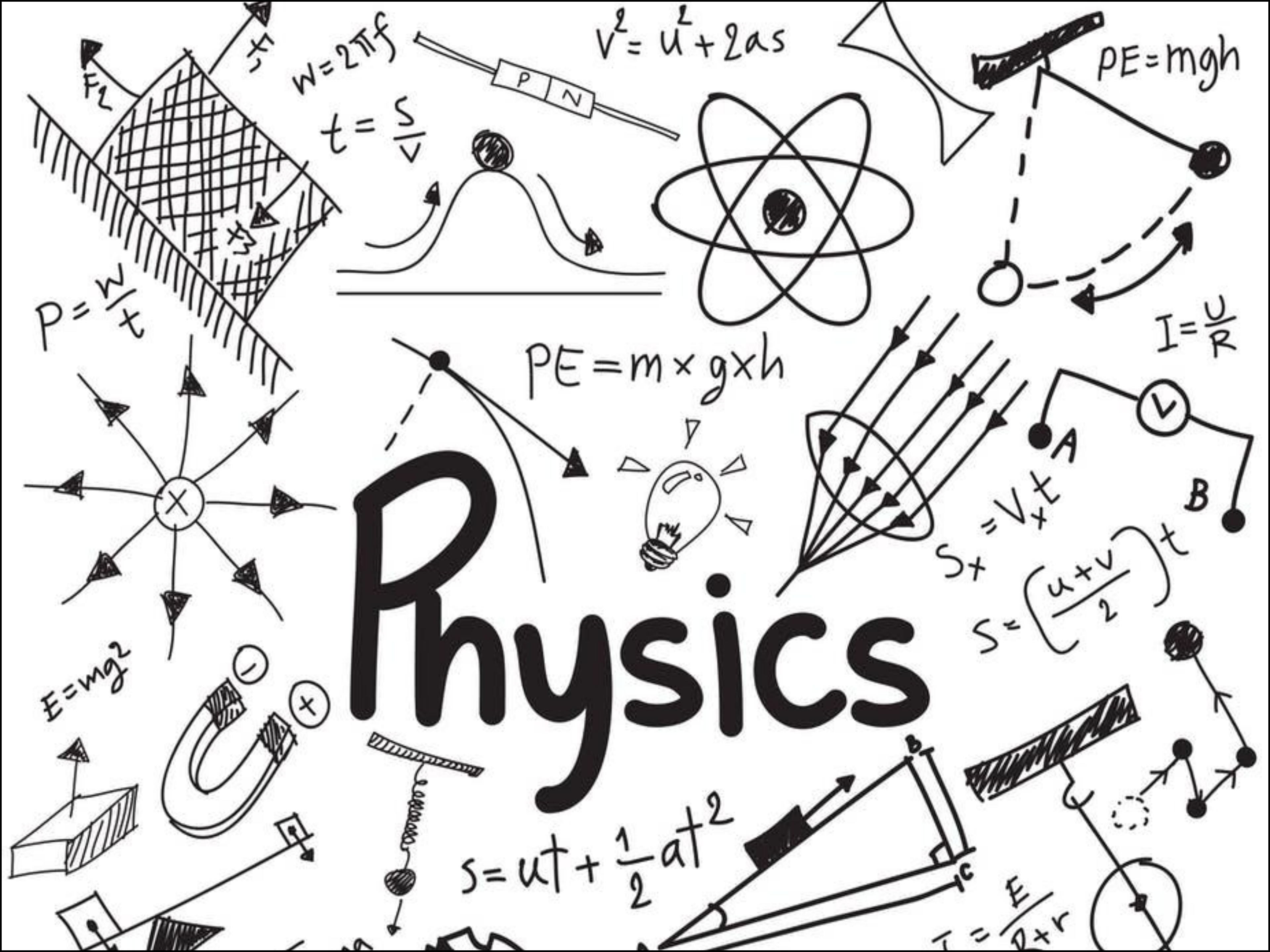


Physics
$W=2\pi f$
$V^2=u^2+2as$
$PE=mgh$
$t=\frac{S}{V}$
P N
F_2
$P=\frac{W}{t}$
$PE=m\times g\times h$
$I=\frac{U}{R}$
A
B
$S=V_x t$
$S=\left(\frac{u+v}{2}\right)t$
$E=mg^2$
$s=ut+\frac{1}{2}at^2$
B
C

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει <u>**σεβασμός**</u> στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

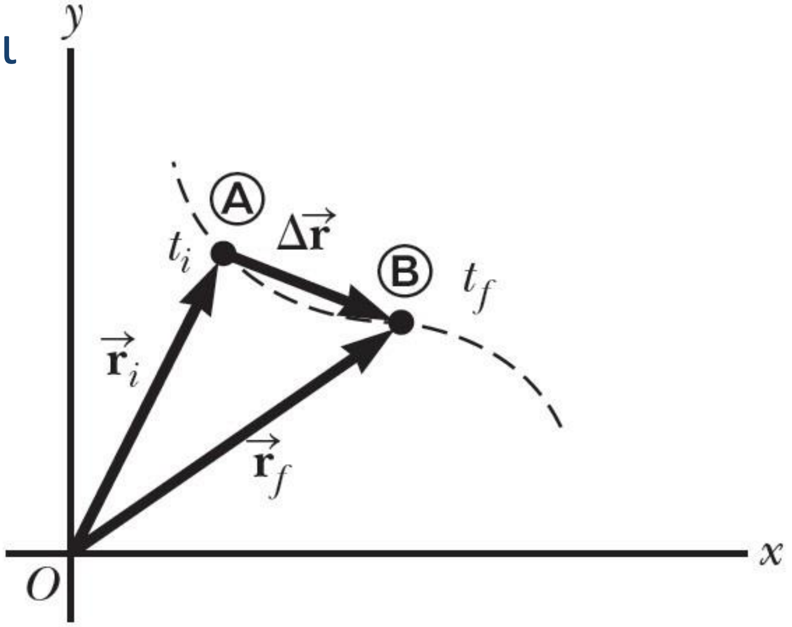
- Ας επεκτείνουμε τις ιδέες που ήδη ξέρουμε στο χώρο xy
  - Χώρος επιπέδου

- Θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση διανυσμάτων
  - ...αλλά και ανάλυσης σε συνιστώσες
  - Δηλ. θα δουλεύουμε κυρίως κατά **άξονες της κίνησης**

- Η γνώση της μονοδιάστατης κίνησης θα είναι πολύτιμη!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στη μια διάσταση, μας αρκούσε ένα μονόμετρο μέγεθος (αριθμ. τιμή) για να ορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου
  - ...λόγω της σύμβασης που κάναμε με τα πρόσημα
- Στις δυο διαστάσεις, χρειαζόμαστε το **διάνυσμα θέσης $\vec{r}$**
  - Ξεκινά από το (0,0) και φτάνει ως τη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy
- **Μετατόπιση $\Delta\vec{\mathrm{r}}$**
  - Διαφορά μεταξύ τελικής και αρχικής θέσης
  - $\Delta\vec{\mathrm{r}} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ορίζουμε τη **Μέση Ταχύτητα** σε ένα χρονικό διάστημα Δt:

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta \mathrm{t}}$$

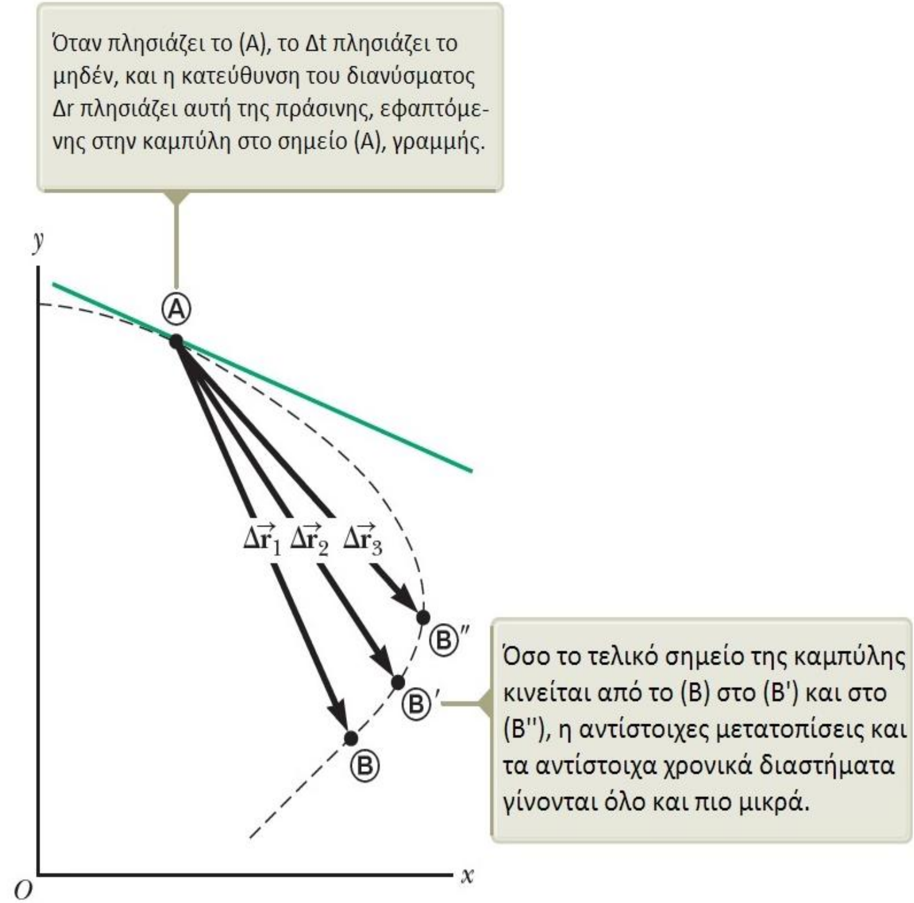
- Διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και φορά με το $\Delta\vec{r}$
  - Θυμηθείτε από την κίνηση σε μια διάσταση:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta \mathrm{t}}$$

- Διάνυσμα ανεξάρτητο της διαδρομής!
  - Γιατί; Εξαρτάται μόνο από το $\Delta\vec{r}$
    - Που εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σωματιδίου

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται ανάμεσα σε 2 σημεία, A και B.
- Παρατηρούμε το σωματίδιο σε όλο και μικρότερα χρονικά δια-στήματα (B, B’, B’’)
- Η κατεύθυνση του $\Delta\vec{r}$ πλησιάζει αυτήν της εφαπτομένης της κα-μπύλης στο σημείο A.



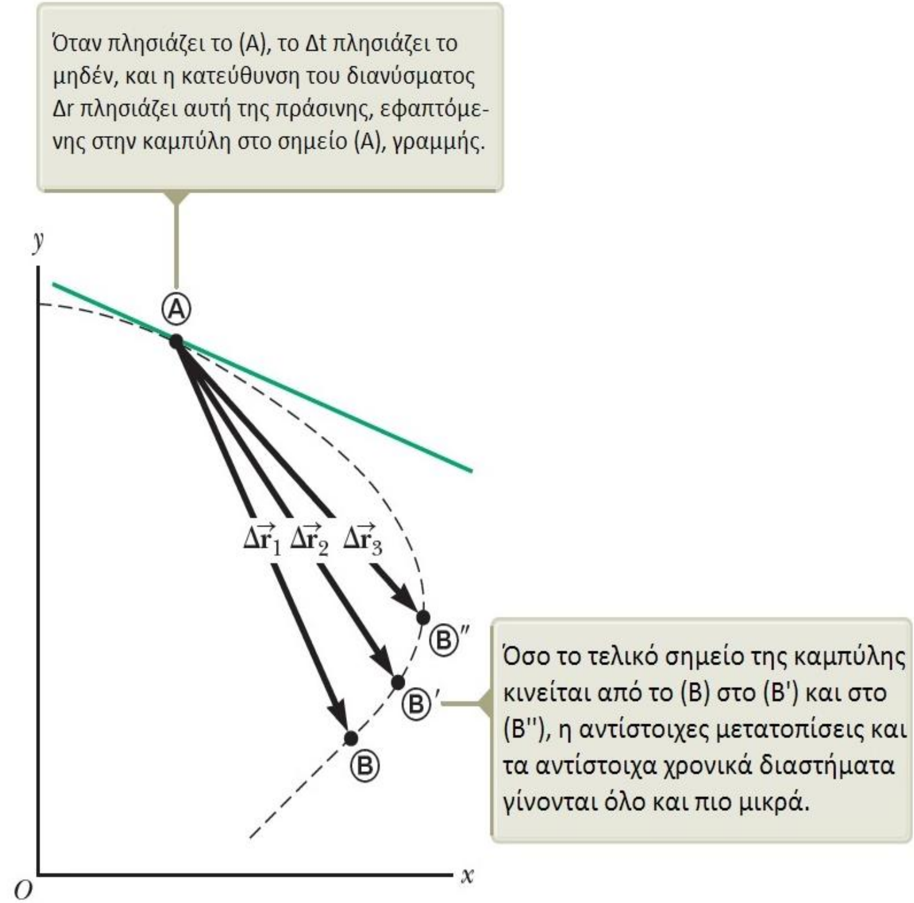
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Στιγμιαία Ταχύτητα**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Η κατεύθυνση της $\vec{v}$ βρίσκεται στην εφαπτο-μένη της καμπύλης στο εκάστοτε σημείο
- Μέτρο ταχύτητας $= |\vec{v}|$
- Θυμηθείτε:

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Μέση Επιτάχυνση**

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

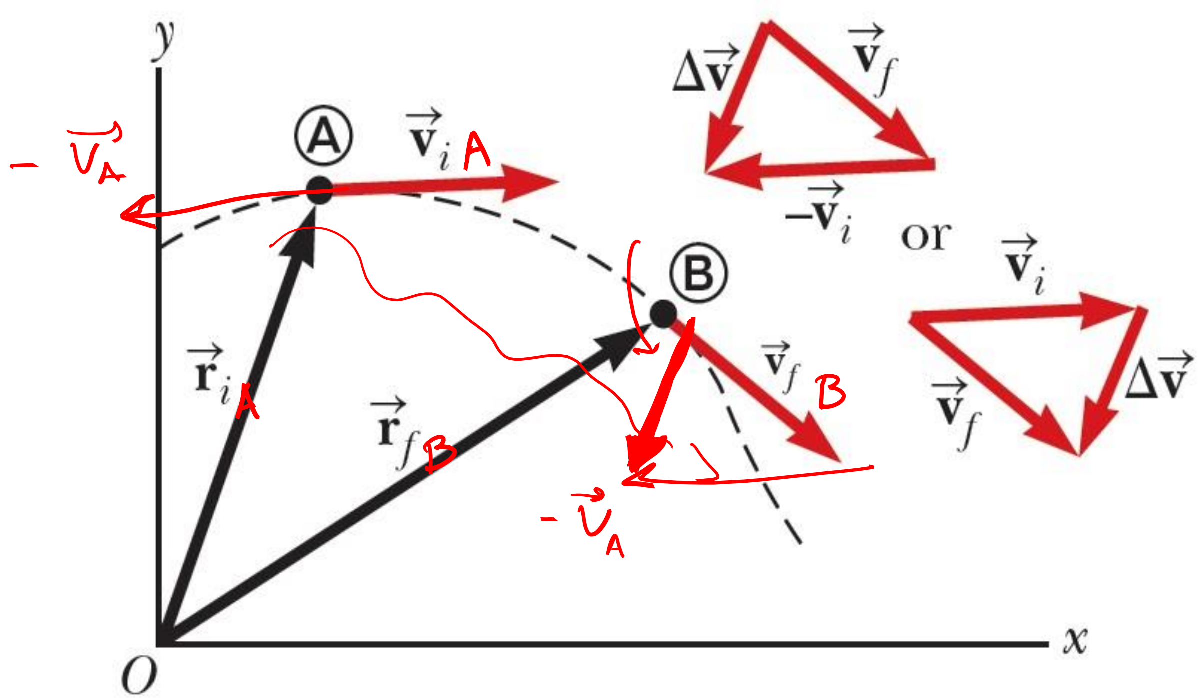
- Διάνυσμα: έχει την ίδια κατεύθυνση με την διανυσματική διαφορά ταχυτήτων $\Delta\vec{v}$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a}_{\mathrm{avg}} \equiv \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Μέση Επιτάχυνση**
- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{a}}_{avg}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Στιγμιαία Επιτάχυνση $\vec{a}$**

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t)$$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Μοντέλο κίνησης**: με **<u>σταθερή</u>** επιτάχυνση
  - …όμοια με την κίνηση στη μια διάσταση

- Θα σκεφτόμαστε με βάση την παρακάτω «αρχή»:
  - **Η κίνηση σε δυο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυο ανεξάρτητες ευθύγραμμες κινήσεις σε δυο κάθετους άξονες:**
    - **Τον άξονα των x**
    - **Τον άξονα των y**

- Έτσι, η κίνηση στον έναν άξονα δεν επηρεάζει την κίνηση στον άλλο (και αντίστροφα)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Διάνυσμα θέσης**

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

με $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αν ξέρουμε το $\vec{\boldsymbol{r}}$, μπορούμε να βρούμε τη στιγμιαία ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{v}}$, ως

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}) = u_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

- Επίσης,

$$u_x = u_{x_i} + a_x t \ , \qquad u_y = u_{y_i} + a_y t$$

- Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} u_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_y\vec{\boldsymbol{\jmath}} &= \left(u_{x_i} + a_x t\right)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \left(u_{y_i} + a_y t\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}} \\ &= \left(u_{x_i}\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_{y_i}\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right) + \left(a_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + a_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right)t \end{aligned}$$

- Δηλ.

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{a}}t$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Διάνυσμα θέσης**

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

με $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αναλύοντας

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}} = \left(x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \left(y_i + u_{y_i}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= (x_i\vec{\boldsymbol{\imath}} + y_i\vec{\boldsymbol{\jmath}}) + \left(u_{x_i}\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_{y_i}\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right)t + \frac{1}{2}\left(a_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + a_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right)t^2$$

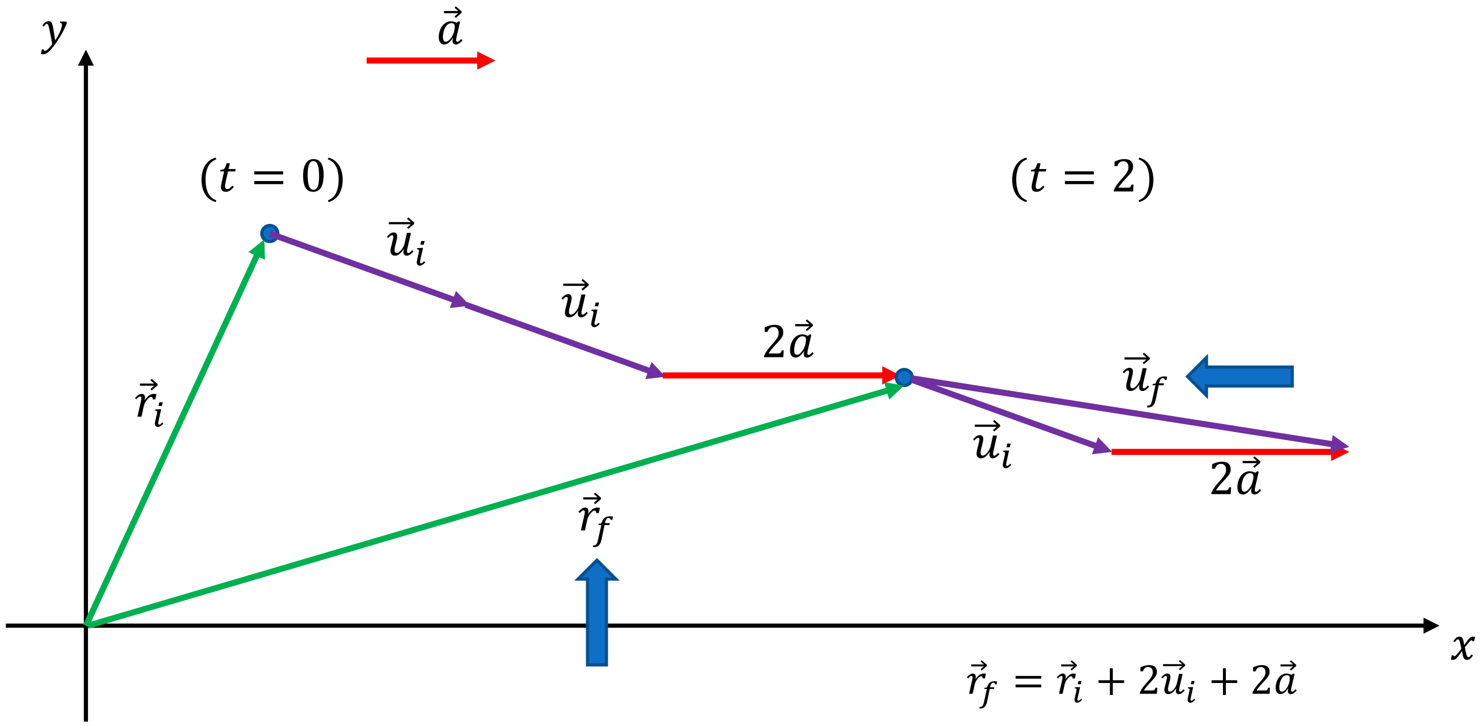
- Έτσι,

$$\vec{\boldsymbol{r}}_f = \vec{\boldsymbol{r}}_i + \vec{\boldsymbol{v}}_i t + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}t^2$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$
$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

- **Quiz:**
- Προβλέψτε τη θέση και την ταχύτητα του σώματος όταν $t = 2$



$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + 2\vec{u}_i + 2\vec{a}$$
$$\vec{u}_f = \vec{u}_i + 2\vec{a}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Αυτές οι εξισώσεις κατασκευάστηκαν από ξεχωριστή μελέτη της κίνησης ΑΝΑ ΑΞΟΝΑ!

- Ας γράψουμε τις δυο *διανυσματικές* εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με <u>σταθερή επιτάχυνση</u>

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

$$u_{y_f} = u_{y_i} + a_y t$$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y_f = y_i + u_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Ισχύουν και όλες οι υπόλοιπες εξισώσεις που περιγράφουν την μονοδιάστατη κίνηση υπό σταθερή ή μηδενική επιτάχυνση!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

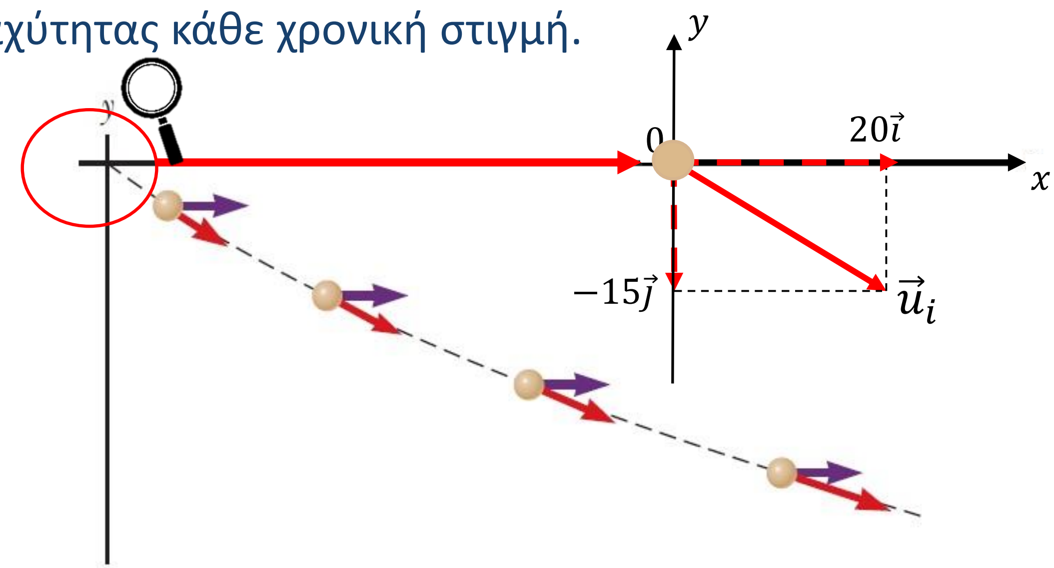
1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

- **Παράδειγμα:**
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\ \mathrm{m}/s$ στον x-άξονα, και $-15\ \mathrm{m}/s$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\imath}$. **Με ποια μοντέλα κίνησης μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου;**

Α) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

Β) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5s$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x.

Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t, και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

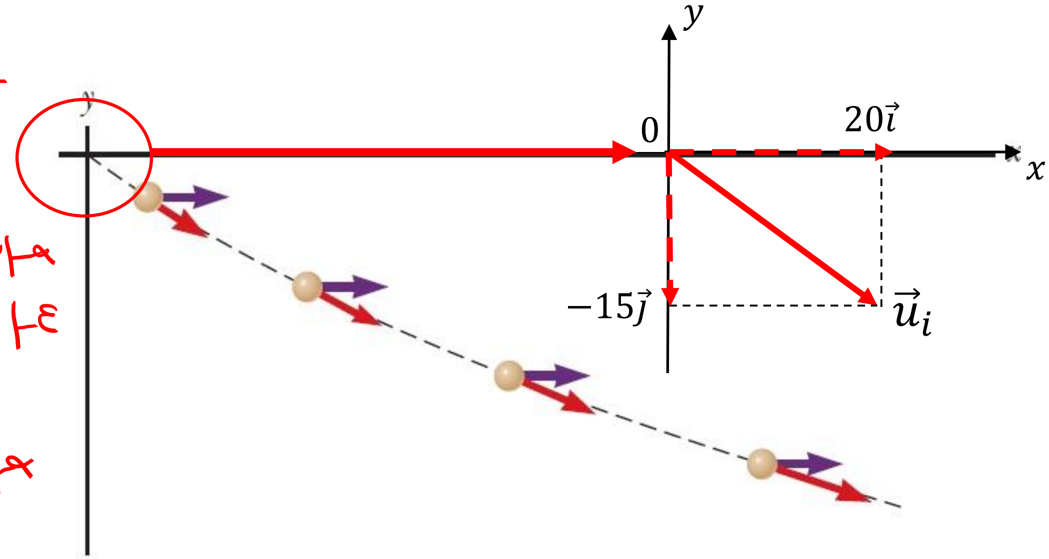
1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \dfrac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\imath}$. **Με ποια μοντέλα κίνησης μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου;**

Από την εκφώνηση, συμπεραίναμε ότι:

→ Στον άξονα x'x, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση.

→ Στον άξονα y'y, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα.



Θεωρούμε $t = 0$ στη συμβολή των αξόνων.

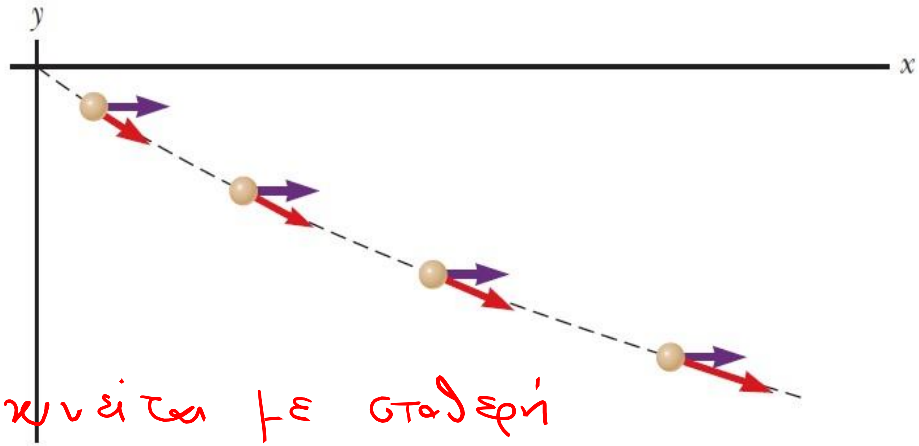
1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x (x_f - x_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα – Λύση**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x-άξονα, και -15m/s στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{a}_x = (4\ \text{m}/s^2)\vec{i}$. Α) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

Στον άξονα y'y, το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα:

$$\vec{u}_y = \left(-15 \tfrac{m}{s}\right)\vec{j} \quad (1)$$



Στον άξονα x'x, το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση:

$$\vec{u}_x = (20 + 4t)\vec{i} \quad (2)$$

Οι (1),(2) δίνουν

$$\vec{u}(t) = \left(20 + 4t \tfrac{m}{s}\right)\vec{i} - \left(15 \tfrac{m}{s}\right)\vec{j}$$

$$1.\quad u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$
$$2.\quad u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$$
$$3.\quad x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$$
$$4.\quad x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$
$$5.\quad u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

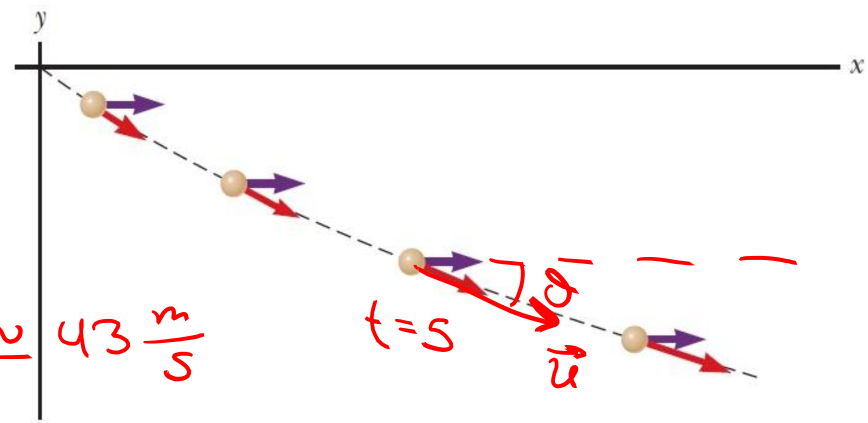
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα - Λύση**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\iota}$. Β) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5s$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x.

Για $t = 5$ s, θα έχουμε

$\vec{u}(5) = \left(40\frac{m}{s}\right)\vec{i} - \left(15\frac{m}{s}\right)\vec{j}$

Μέτρο: $|\vec{u}(5)| = \sqrt{40^2 + (-15)^2} \simeq 43\frac{m}{s}$



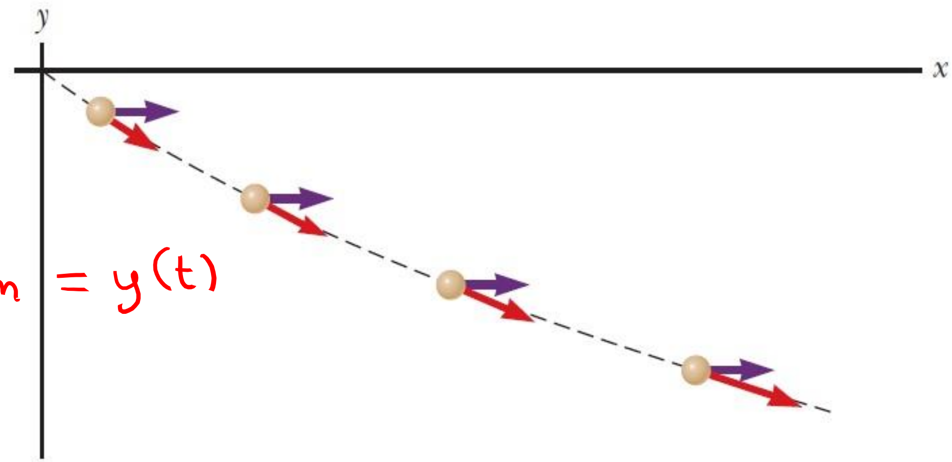
Γωνία: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-15}{40}\right) \simeq -21°$

Επίσης: $x_f = x_i + u_x t$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα - Λύση**:
  - Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20 \mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15 \mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = (4 \mathrm{~m}/s^2)\vec{\imath}$. Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t, και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.



⤳ Στον άξονα y'y:

$y_f = y_i + u_y \cdot t$

$= 0 - 15t = -15t \text{ m} = y(t)$

⤳ Στον άξονα x'x:

$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$

$= 0 + 20t + \frac{1}{2} \cdot 4t^2 = 20t + 2t^2 \text{ m} = x(t)$

Άρα $\vec{r}_f = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \vec{j} = (20t + 2t^2)\vec{i} - 15t \, \vec{j} \text{ m}$

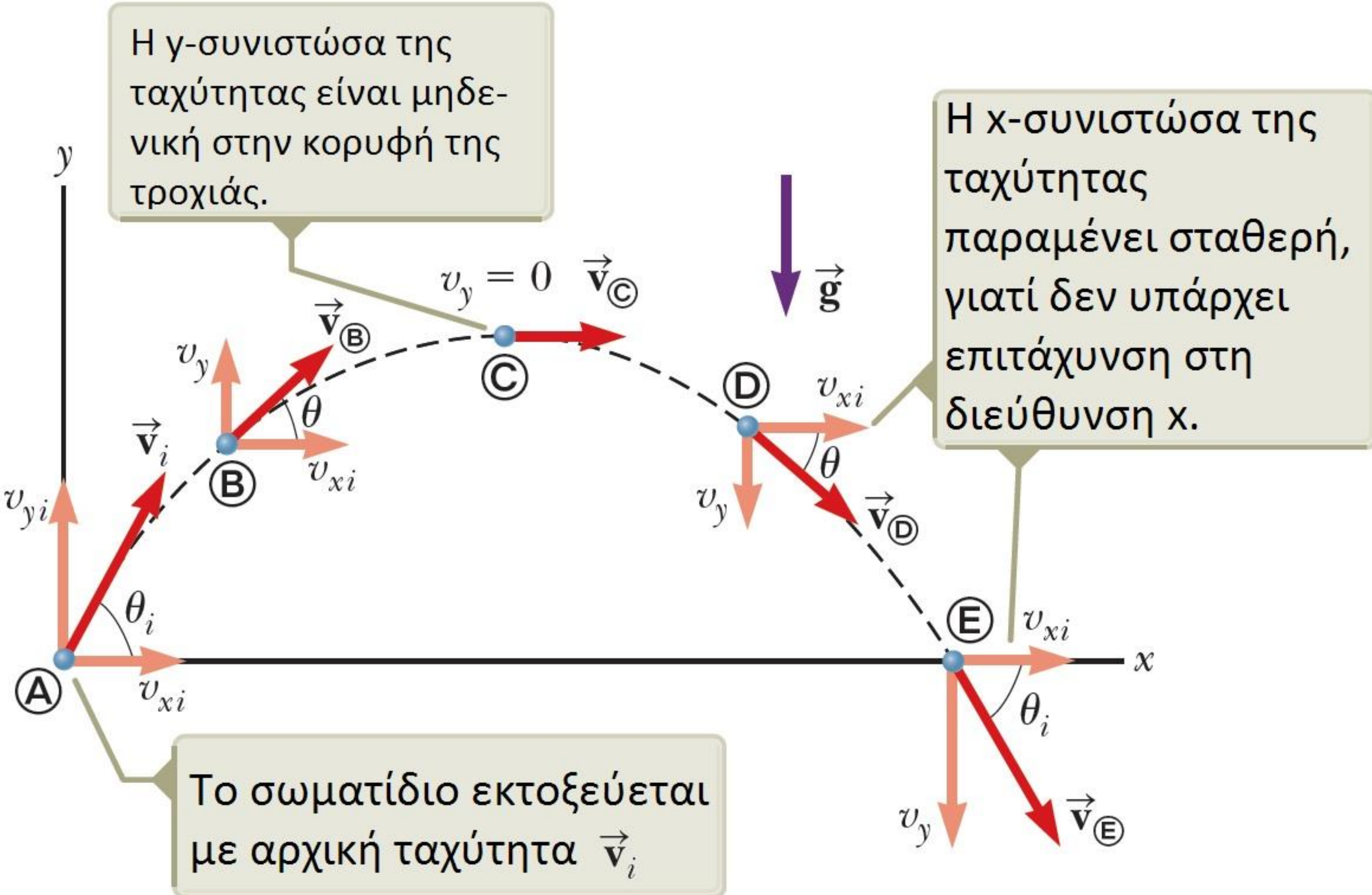
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μια κλασική κίνηση σε δυο διαστάσεις είναι η **βολή.**

- Το μόνο που αλλάζει είναι
  A. Η **επιτάχυνση της βαρύτητας** $\vec{g}$, που θεωρείται σταθερή και κάθετη (με φορά προς τα κάτω) στον άξονα x.
  B. Επίσης, η **αντίσταση του αέρα** θεωρείται αμελητέα.

- Υπό αυτές τις συνθήκες, η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απλή…

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

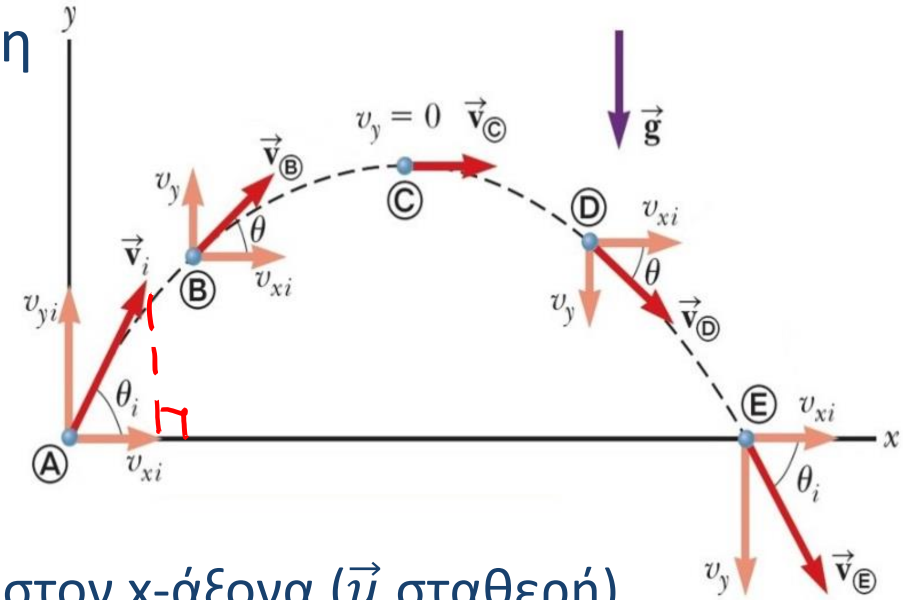


Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο *διανυσματικές* εξισώσεις **βολής**
  - $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{t}$
  - $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{t} + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{t}^{2}$
- Ίδιες με αυτές της Διαφ. 16 (10 slides πριν)!
- Προσοχή! Είναι διανυσματικές εξισώσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας αναλύσουμε την κίνηση



- Αρχική θέση

$$u_{xi} = u_i \cos(\theta_i)$$
$$u_{yi} = u_i \sin(\theta_i)$$

- Δυο συνιστώσες:
  - A) Μηδενική επιτάχυνση στον x-άξονα ($\vec{u}$ σταθερή)
  - B) Σταθερή επιτάχυνση στον y-άξονα (g – βαρυτική επιτάχυνση)

- Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης όπως τις ξέρουμε, θεωρώντας αυθαίρετα μια θετική φορά σε κάθε άξονα (συνήθως πάνω και δεξιά)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Αλγεβρικές εξισώσεις**
- **1)** $x_f = x_i + u_{xi} t$
- **2)** $u_{yf} = u_{yi} - g t$

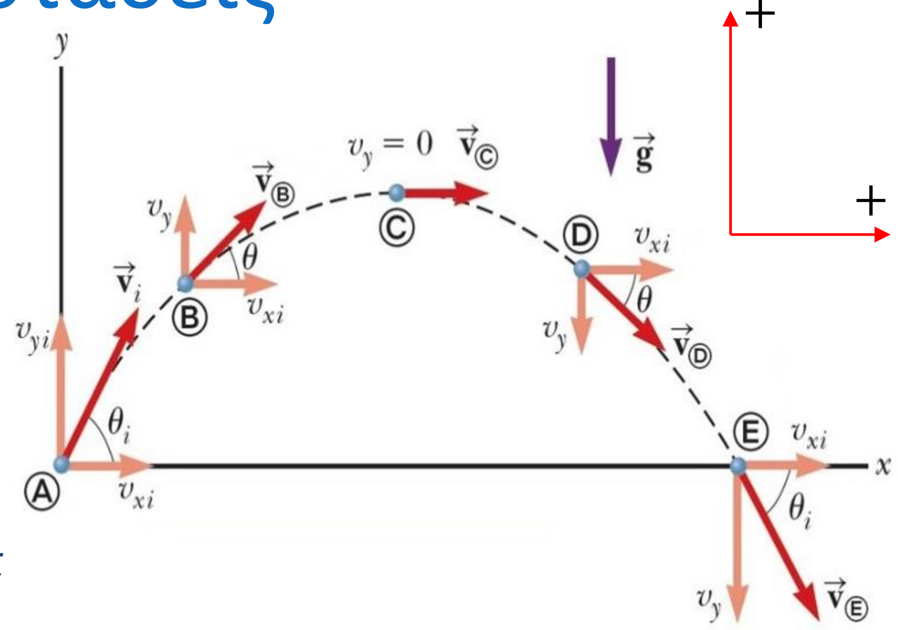
$$u_{y,avg} = \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})$$

$$y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf}) t$$

$$y_f = y_i + u_{yi} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

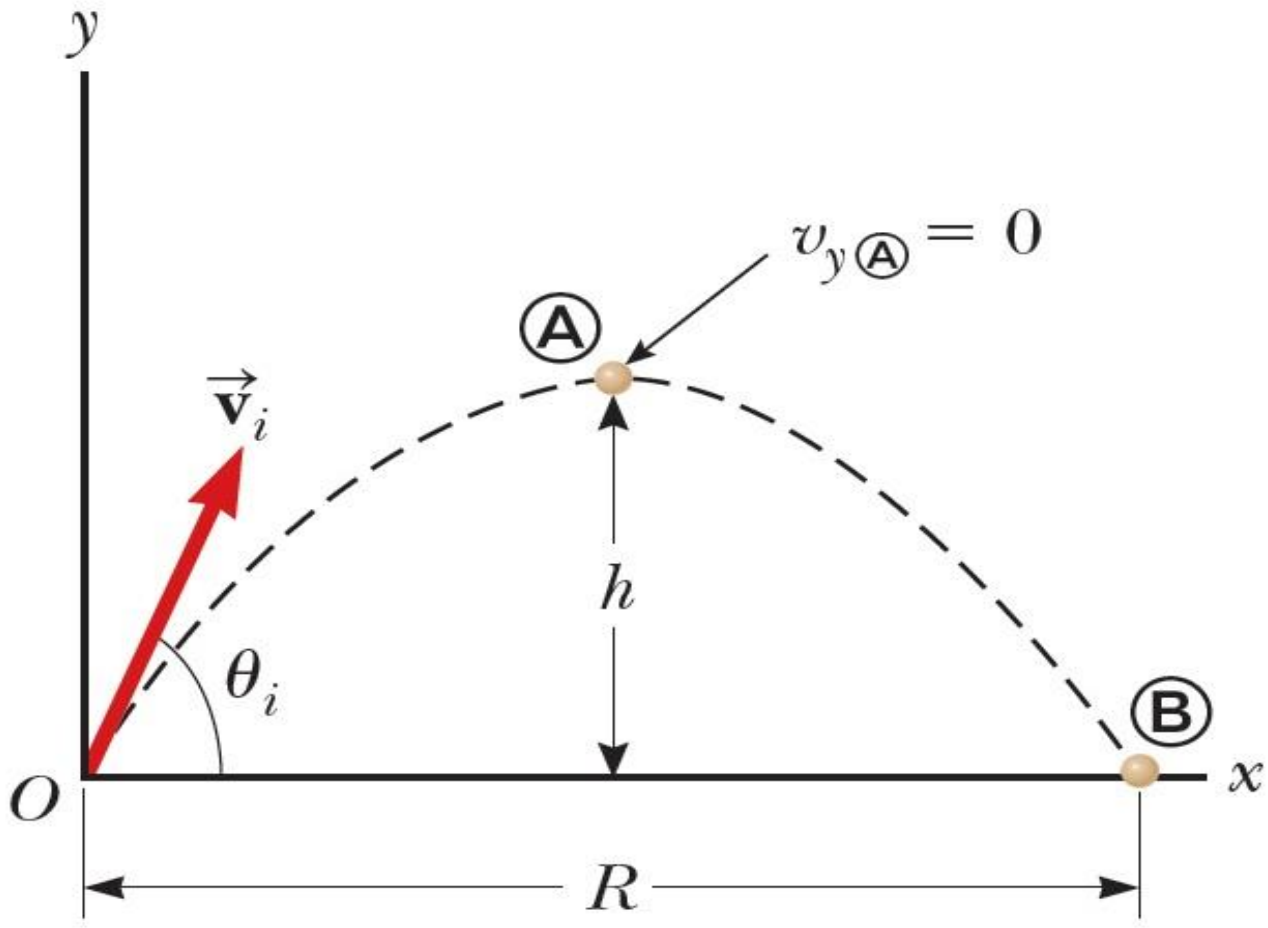
με $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$



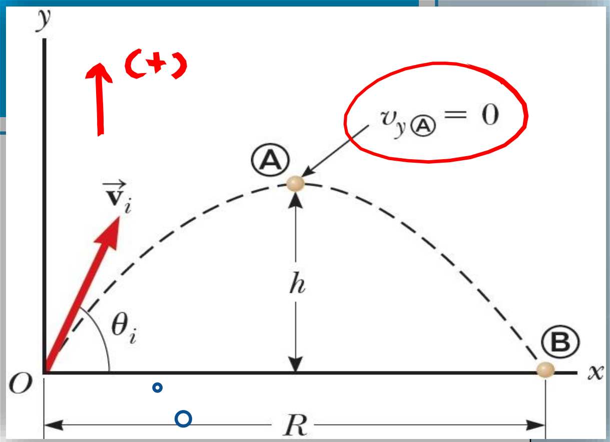
- **Εντελώς** ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Εύρος (ή Βεληνεκές)** $\boldsymbol{R}$ και **Μέγιστο Ύψος** $\boldsymbol{h}$ βολής



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



- Ας βρούμε τα h, R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή ΟΑ:

$$y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 = h$$

$$y_f = y_A, y_i = y_O$$

$$h = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$= 0 + u_i \sin(\theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Επίσης,

$u_{y_A} = 0$!

$$u_{y_f} = u_{y_i} - g t \Leftrightarrow t = \frac{u_{y_i}}{g}$$

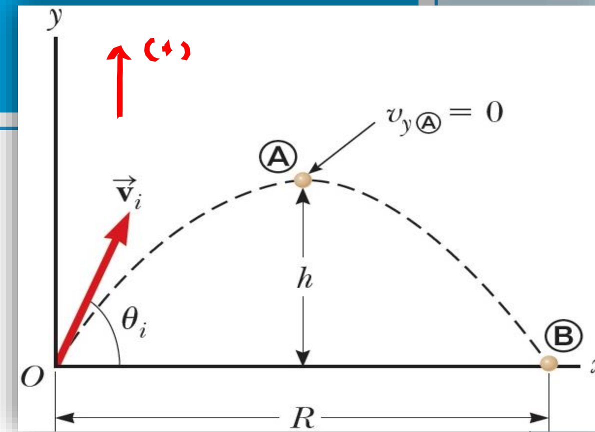
Από τις παραπάνω σχέσεις

$$h = u_i \sin(\theta_i) \left(\frac{u_{y_i}}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{u_{y_i}}{g} \right)^2$$

κι αφού $u_{y_i} = u_i \sin(\theta_i)$ έχουμε

$$\boxed{h = \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



- Ας βρούμε τα h, R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή ΟΒ:

Στον x-άξονα: $x_f = x_i + u_x t \Rightarrow R = x_i + u_x t = u_x t = u_i \cos\theta_i \, t$

Στον y-άξονα: $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0 = 0 + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} g t^{\cancel{2}} = u_{y_i} \cancel{t} \Rightarrow \frac{1}{2} g t = u_{y_i} = u_i \sin\theta_i \Rightarrow t = \frac{2u_i \sin\theta_i}{g}$$

$y_f = y_B, x_f = x_B,$
$y_i = y_O, x_i = x_O$

Από τις παραπάνω σχέσεις,

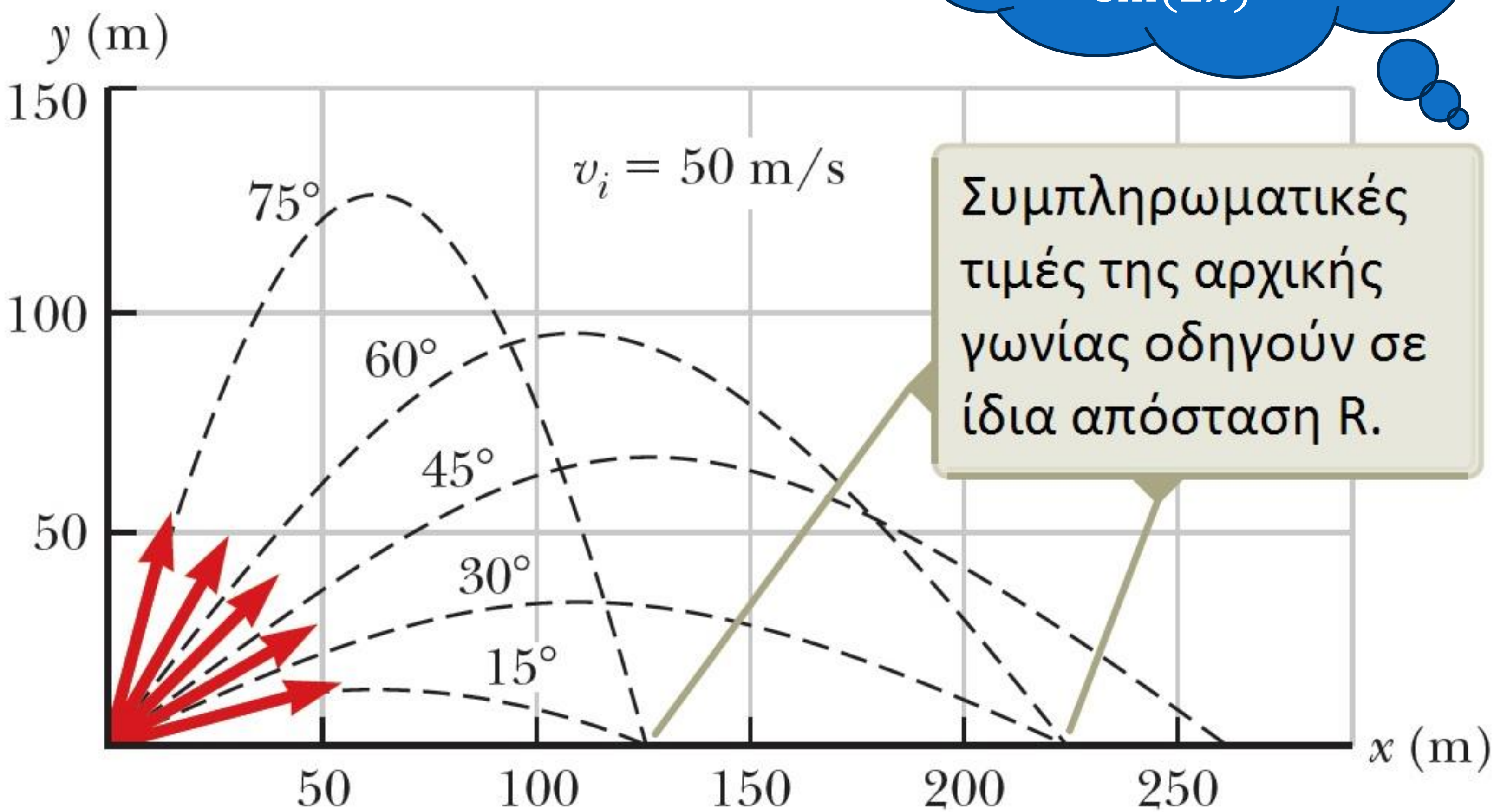
$$R = u_i \cos(\theta_i) \frac{2u_i \sin\theta_i}{g} = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$$

Έτσι

$$\boxed{R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

$$\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \sin(\pi - 2x) = \sin(2x)$$



Συμπληρωματικές τιμές της αρχικής γωνίας οδηγούν σε ίδια απόσταση R.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα:**
- Ο Γιάννης Αντετοκούνμπο σουτάρει την μπάλα υπό γωνία 40˚ με το οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση 10 m από το καλάθι (buzzer beater). Το ύψος του είναι 2.0 m ενώ το ύψος της μπασκέτας είναι 3.0 m.
  Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;
  Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

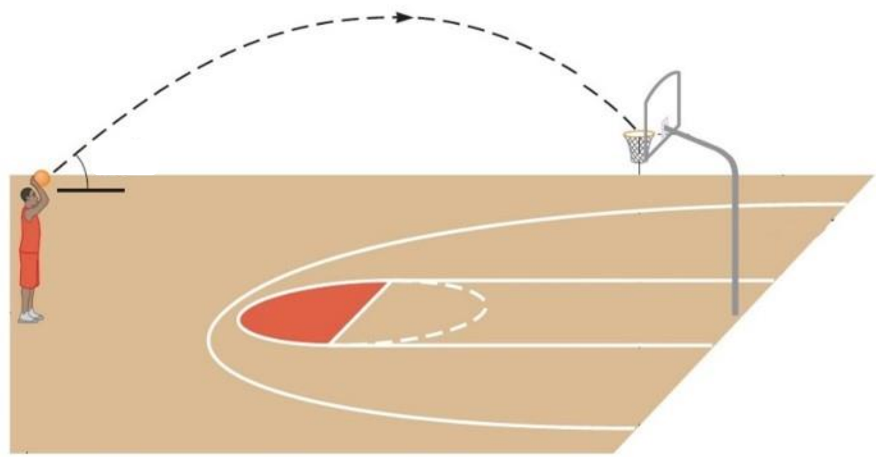
1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

Μόνο η επιτάχυνση της βαρύτητας δρα στο πρόβλημα, άρα

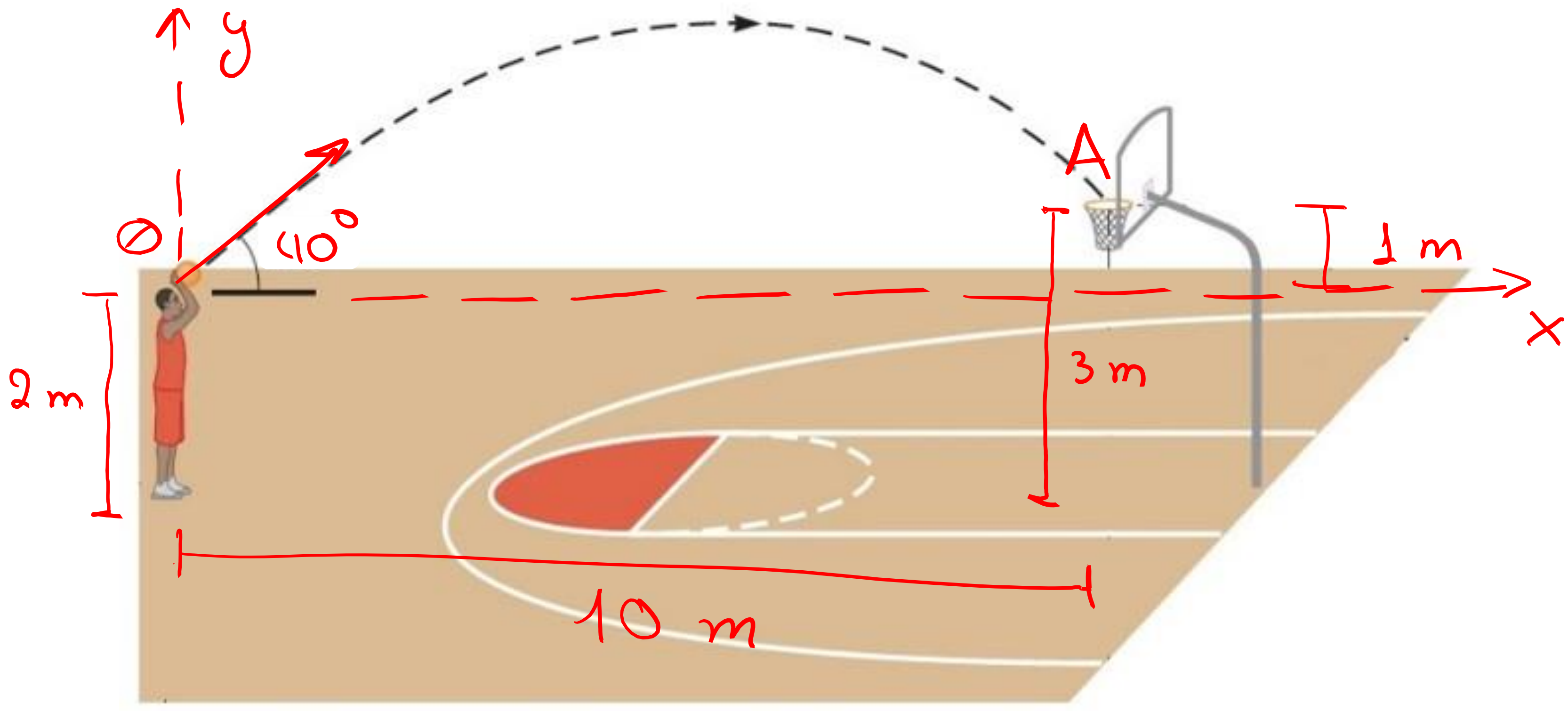
$$\vec{\alpha} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$
$$= 0\,\vec{i} - g\,\vec{j}$$
$$= -g\,\vec{j}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

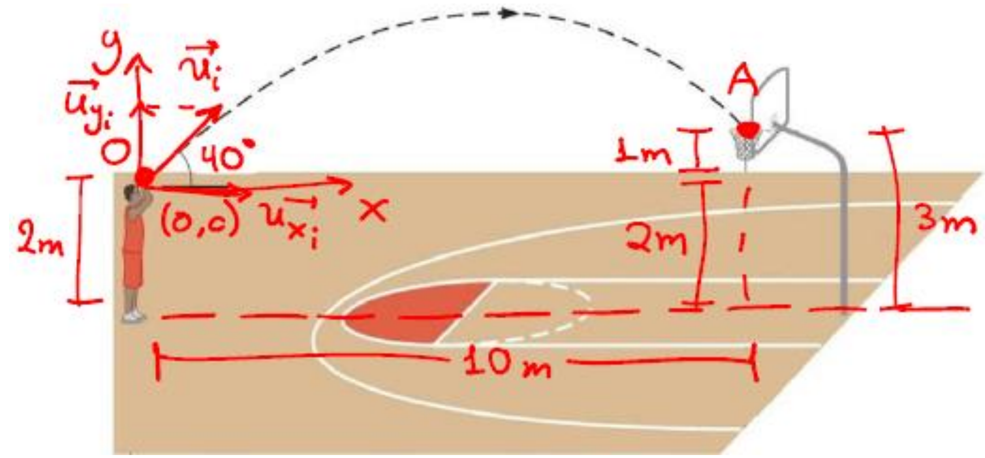
- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    B) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;



1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;
    Δίνονται:
    $\tan(40^o) = 0.84,$
    $\cos(40^o) = 0.76,$
    $\cos^2(40^o) = 0.58$



Επιλέξαμε να τοποθετήσουμε το σημείο O(0,0) στα χέρια του παίκτη.

Στον x'x άξονα: $\left.\begin{array}{l} x_A = x_0 + u_{x_0} t \\ u_{x_0} = u_i \cos(40^\circ) \end{array}\right\} \Rightarrow$

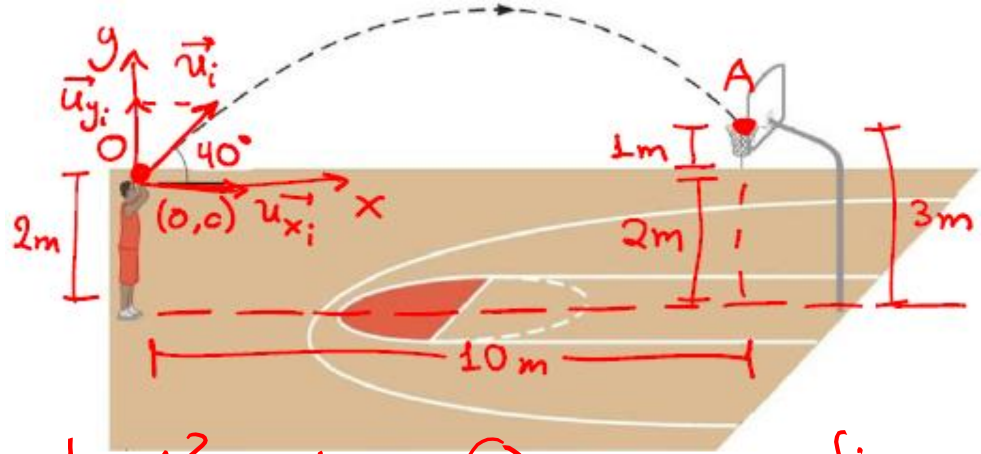
$\Rightarrow x_A = x_0 + u_i \cos(40^\circ) t \Rightarrow 10 = 0 + u_i \cos(40^\circ) t$

$\Rightarrow t = 10 / u_i \cos(40^\circ)$. (1)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

$$\underbrace{y_A = y_0 + u_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2}_{(4)}$$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    B) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;
    Δίνονται:
    $\tan(40^o) = 0.84$,
    $\cos(40^o) = 0.76$,
    $\cos^2(40^o) = 0.58$



Στα y'y άξονα:

$$y_A = y_0 + u_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

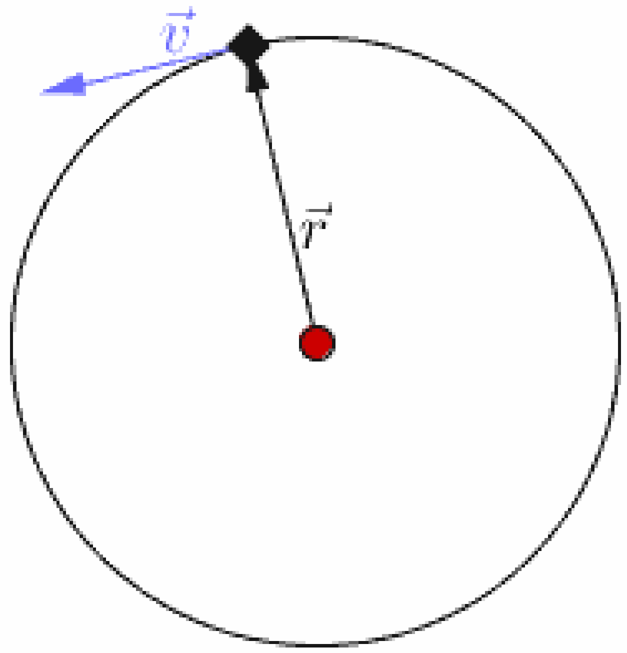
$1 = 0 + u_i \sin(40^o) t - \frac{1}{2} g t^2$. Λόγω (1), η σχέση δίνει

$$1 = \cancel{u_i} \sin(40^o) \frac{10}{\cancel{u_i} \cos(40^o)} - \frac{1}{2} g \left(\frac{10}{u_i \cos(40^o)}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$1 = 10 \tan(40^o) - \frac{1}{2} g \frac{100}{u_i^2 \cos^2(40^o)} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow u_i \cong 10.7 \frac{m}{s}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο

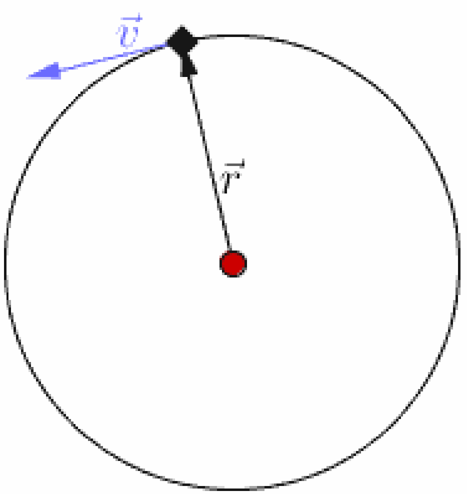


Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Το σωματίδιο διατρέχει την περιφέρεια του κύκλου μια φορά σε χρόνο

$$u = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{u}$$

  - Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **περίοδος**



  - Άρα έχουμε δυο σχέσεις:

$$u = \frac{2\pi r}{T}$$

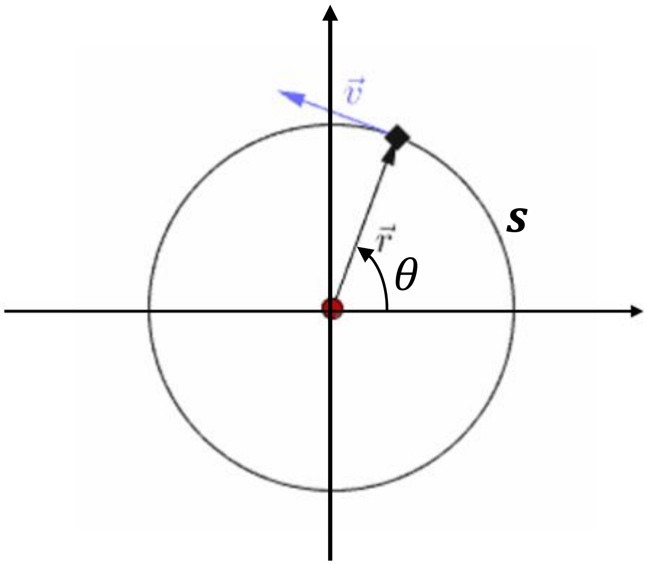
και

$$T = \frac{2\pi r}{u}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - **Γωνιακή θέση**
    - Αντί για xy συντεταγμένες, εκφράζουμε καλύτερα τη θέση του σωματιδίου συναρτήσει της απόστασης r από το κέντρο της κίνησης, και της γωνίας θ που αυτή διαγράφει ως προς τον $x'x$
    - Από Γεωμετρία ξέρουμε ότι

$$\theta_{rad} = \frac{s}{r}$$



  - **Γωνιακή μετατόπιση**
    - Όπως φαντάζεστε…

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

    - Ο λόγος

$$\omega_{avg} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

ονομάζεται **μέση γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega_{avg}}$**

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Αν στο λόγο

$$\omega_{avg} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

στείλουμε το $\Delta t \to 0$, τότε παίρνουμε τη **στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα**

Στην **<u>ομαλή</u>** κυκλική κίνηση:

$$\omega_{avg} = \omega$$

και τότε

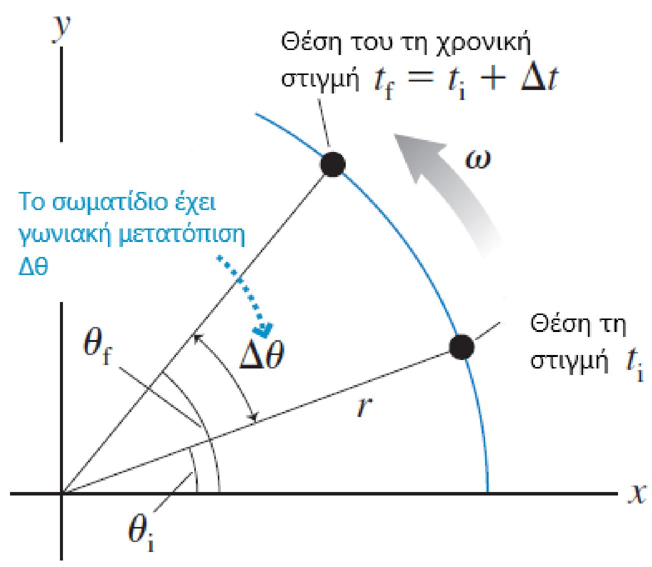
$$\theta_f = \theta_i + \omega t$$

$x_f = x_i + u_x t$

- **Στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα**:

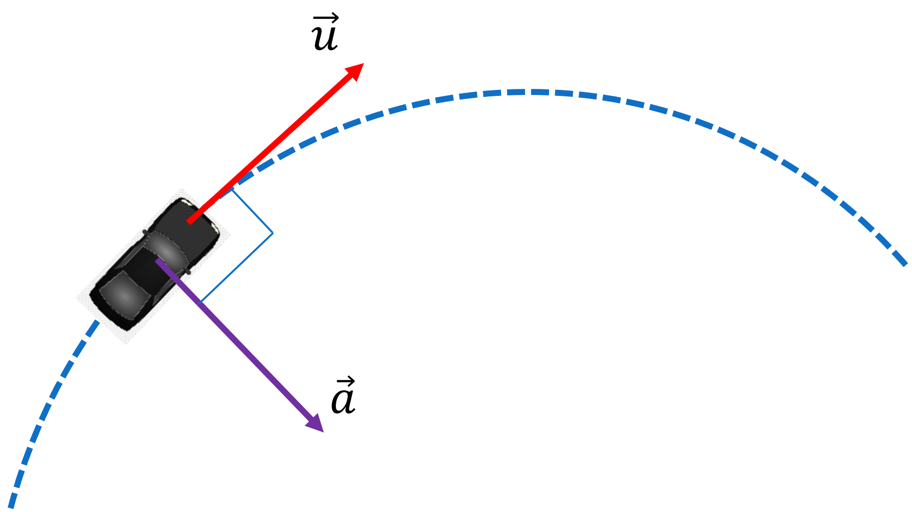
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

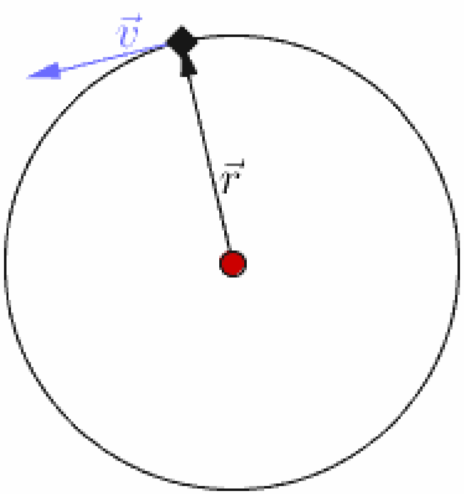
  - Ισούται με το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής θέσης κατά την κίνηση



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
  - Σταθερή <u>αριθμητική</u> ταχύτητα σε απόσταση r
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
      - Εφαπτόμενο σε διάφορα σημεία του κύκλου
      - Ως εκ τούτου, το σώμα επιταχύνεται!

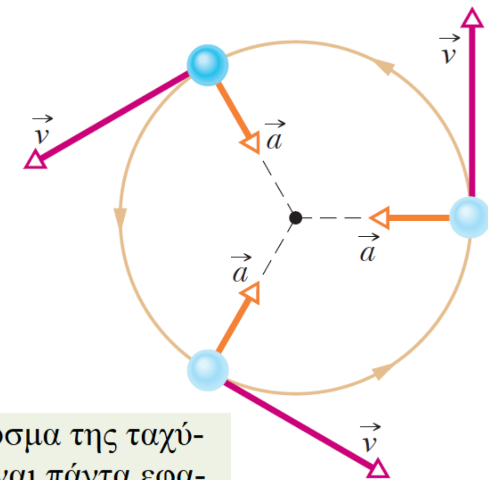




Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
  - Σταθερή <u>αριθμητική</u> ταχύτητα σε απόσταση r
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
      - Εφαπτόμενο σε διάφορα σημεία του κύκλου
      - Ως εκ τούτου, το σώμα επιταχύνεται!
  - Σταθερή επιτάχυνση κατά μέτρο
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα επιτάχυνσης
    - Όμως κατευθύνεται πάντα ακτινικά προς τα «μέσα»!
      - **Κεντρομόλος επιτάχυνση**

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - **Κεντρομόλος επιτάχυνση**

$$a = \frac{u^2}{r}$$

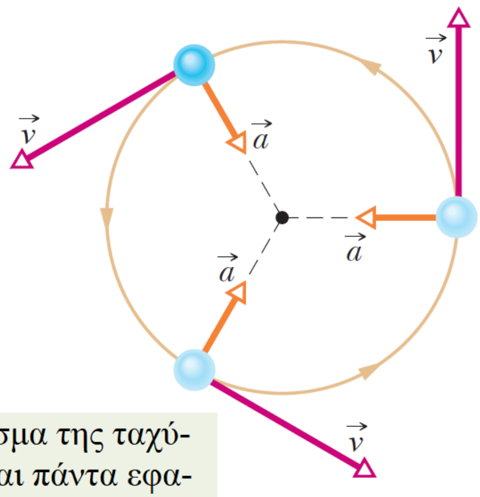
  - Ξέρουμε ότι

$$u = \frac{2\pi r}{T}$$

και από την πρώτη σχέση έχουμε

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi u}{T}$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



  - Μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι

$$u = r\omega \quad \text{και} \quad a = r\omega^2$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

1. $a = \frac{u^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

2. $u = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα:**
  - Η άκρη του λάστιχου του αυτοκινήτου σας, ακτίνας $r = 0.3\ \mathrm{m}$, περιστρέφεται με μια γωνιακή ταχύτητα ω. Πόση είναι αυτή όταν το αυτοκίνητο τρέχει με ταχύτητα $54\ \mathrm{km/h}$?

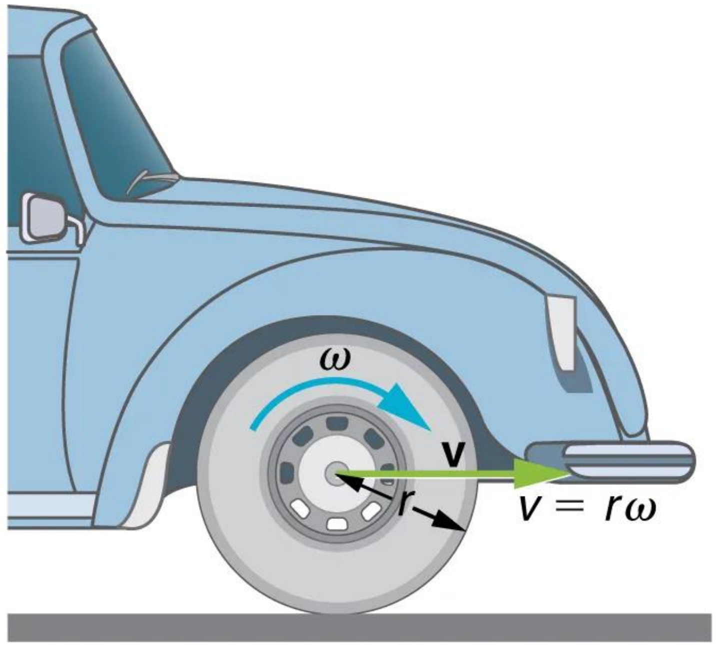
Ξέραμε ότι $u = r\omega \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \omega = \frac{u}{r}$

Είναι $u = 54\ \frac{km}{h} = \frac{54.000\ m}{3600\ s}$

$= 15\ \frac{m}{s}$

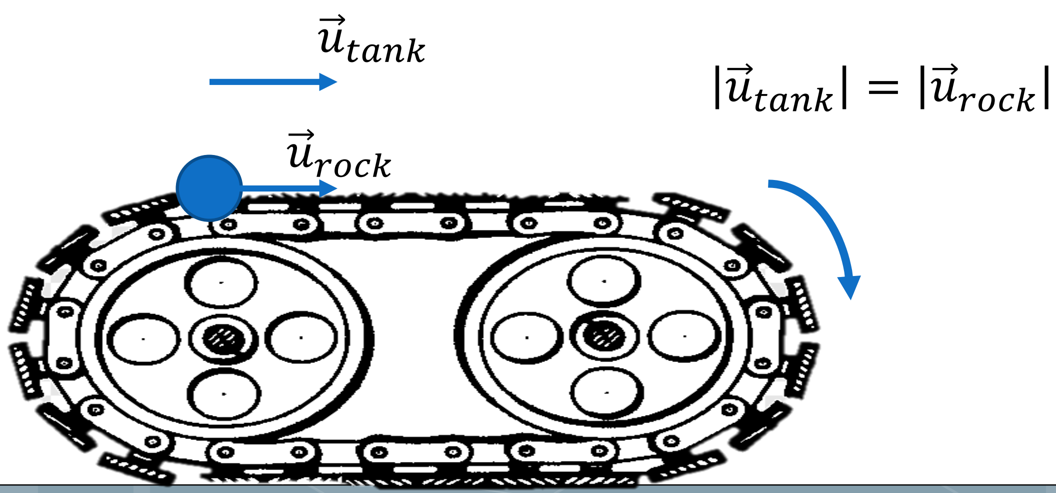
Άρα $\omega = \frac{15}{0.3} = 50\ \frac{rad}{s}$



1. $a = \frac{u^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$
2. $u = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$

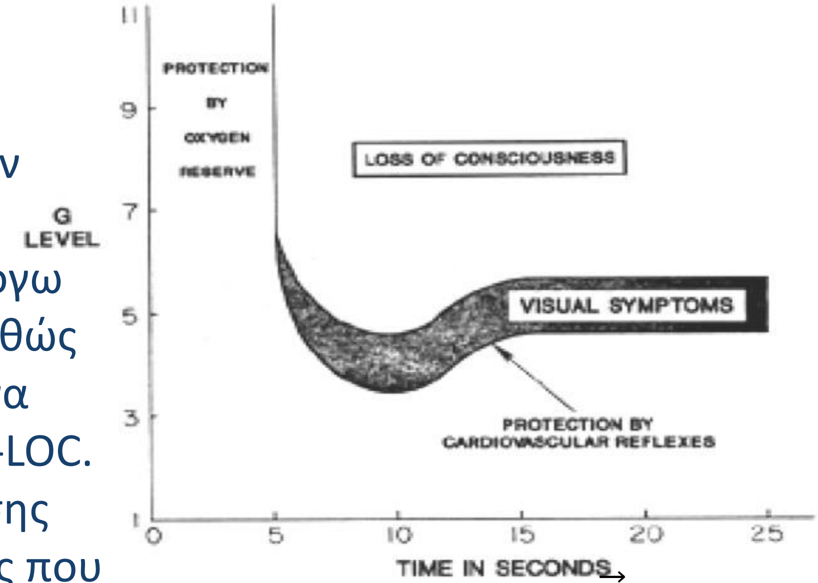
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

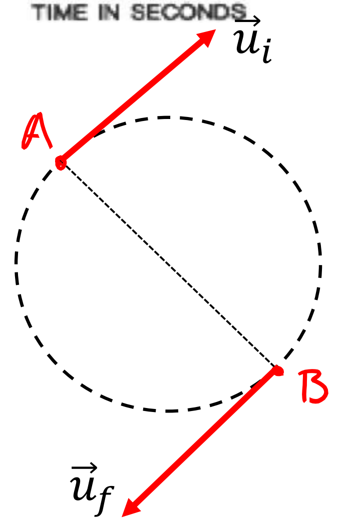
- **Παράδειγμα:**
- Σημείωση: γιατί υποθέσαμε νωρίτερα ότι η γραμμική ταχύτητα της άκρης της ρόδας είναι ίδια σε μέτρο με την ταχύτητα κινησης του οχήματος προς τα δεξιά? Σκεφτείτε ένα τανκ με αυτές της «πεπλατυσμένες» ρόδες (ερπύστριες). Θεωρείστε ένα «χαλίκι» επάνω τους και φανταστείτε τις να κινούν το όχημα προς τα δεξιά. Το χαλίκι και το όχημα δε θα έχουν την ίδια ταχύτητα ***κατά μέτρο***? ☺



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα:**
  - Οι πιλότοι μαχητικών αεροσκαφών προβληματίζονται όταν έχουν να πάρουν πολύ κλειστές στροφές λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Καθώς η επιτάχυνση αυξάνεται, μπορεί να συμβεί μια συνθήκη γνωστή ως g-LOC. Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{\imath} + 500\,\vec{\jmath}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή (πριν «κλείσει» πλήρη κύκλο) με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{\imath} - 500\,\vec{\jmath}$ m/s ?





Θεωρούμε ότι το αεροσκάφος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, δηλ. $|\vec{u}| = |\vec{u}_A| = |\vec{u}_B|$.

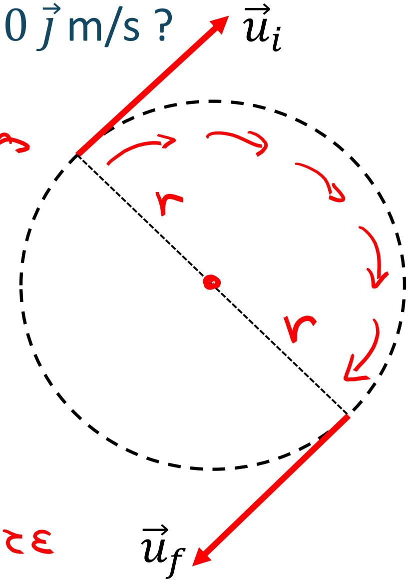
1. $a = \frac{u^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{2\pi u}{T}$

2. $\boxed{u = \frac{2\pi r}{T}} = r\omega$

$\rightarrow r = \frac{uT}{2\pi}$ (2)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{\imath} + 500\,\vec{\jmath}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή (πριν «κλείσει» πλήρη κύκλο) με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{\imath} - 500\,\vec{\jmath}$ m/s ?



Από το σχήμα, καταλαβαίνουμε ότι η περίοδος της κίνησης είναι $T = 48$ sec.

Επίσης, $|\vec{u}| = \sqrt{400^2 + 500^2} \simeq 640.3\ \frac{m}{s}$

Από τη σχέση (2), έχω $r = \frac{uT}{2\pi}$

Επίσης, $a = \frac{u^2}{r} = \frac{u^2}{\frac{uT}{2\pi}} = \frac{2\pi u}{T}$, οπότε

$a = \frac{2\pi\, 640.3}{48} \simeq 83.8\ \frac{m}{s^2} \xrightarrow{:g} a \simeq 8.6g$

https://www.youtube.com/watch?v=XqckN5OchAI

Τέλος Διάλεξης