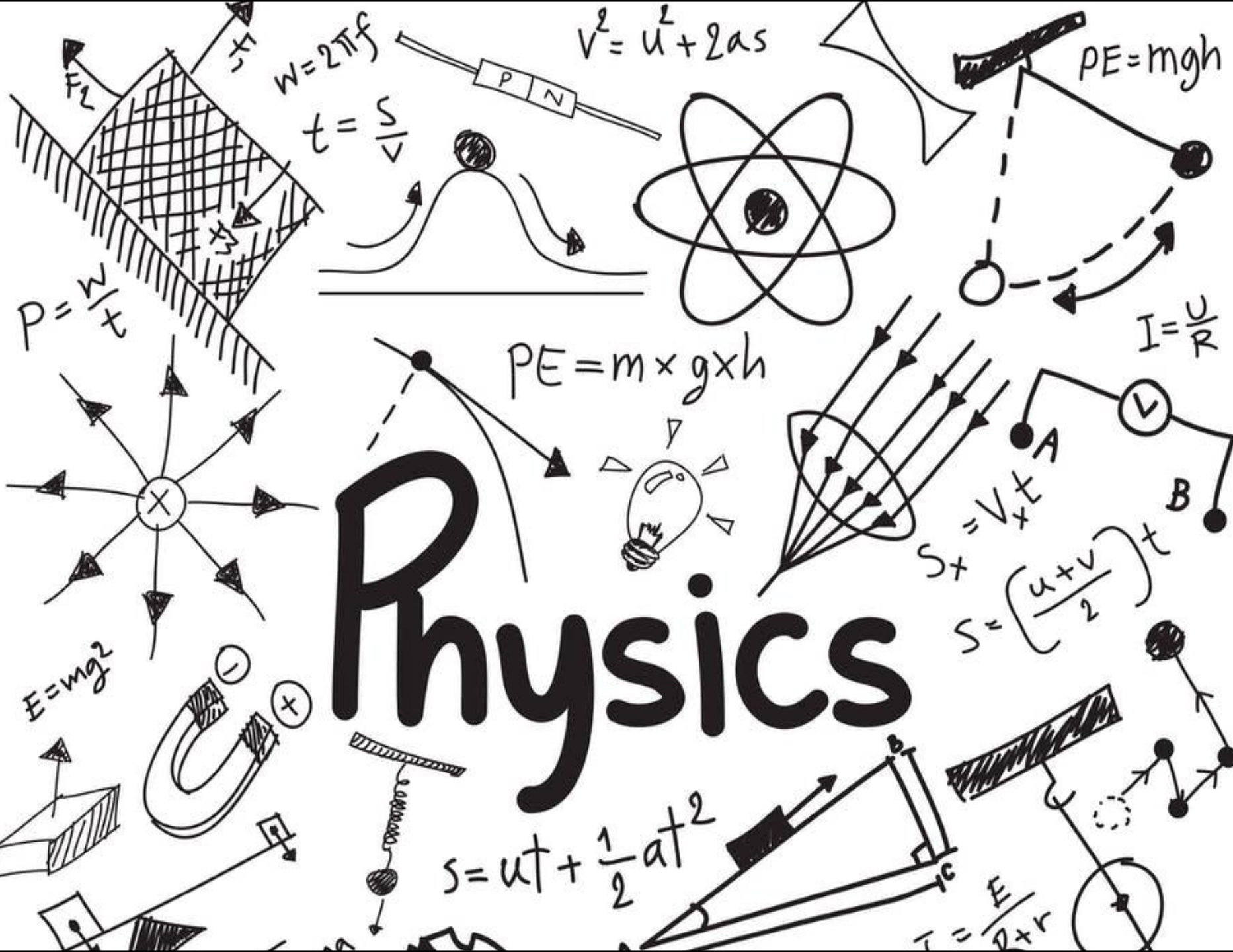


Physics



Reminder...

- Διαλέξεις

- Προαιρετική παρουσία!

- Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε

- Δεν υπάρχουν απουσίες

- Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία

- Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Η κίνηση μπορεί να είναι αναζωογονητική και όμορφη. Αυτά τα σκάφη ανταποκρίνονται σε δυνάμεις αέρα, νερού, και του βάρους του πληρώματος όσο προσπαθούν να ισορροπήσουν στην άκρη του.

1^η Ενότητα Κλασική Μηχανική



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Κίνηση σε μια Διάσταση

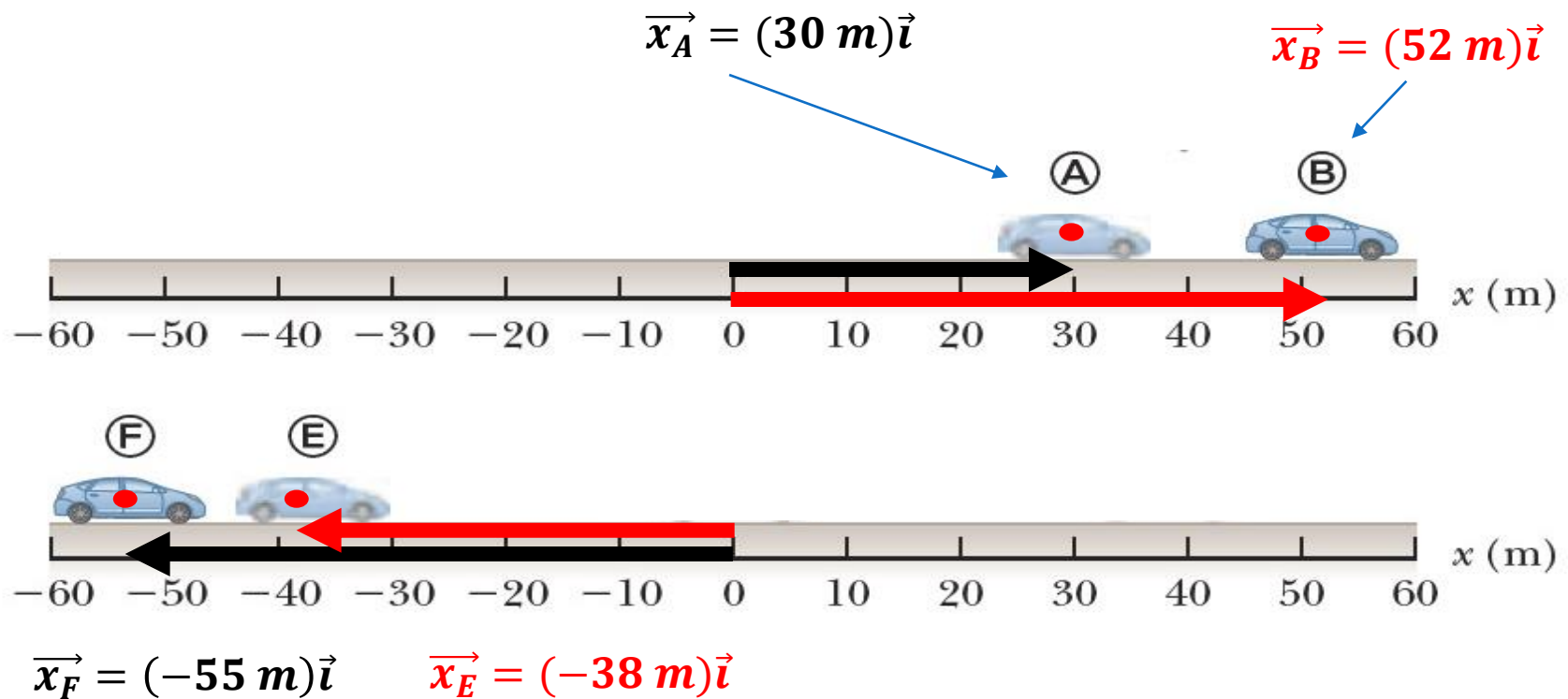
- Κίνηση σε έναν οριζόντιο/κατακόρυφο άξονα
 - Σώμα == σωματίδιο
 - Θεωρούμε απειροστά μικρό το μέγεθός του
 - Αδιαφορούμε **πλήρως** για τις διαστάσεις του
 - Θα γνωρίσουμε τους βασικούς ορισμούς της κινητικής...
 - ...αρχικά σε μια διάσταση και αργότερα σε δυο διαστάσεις
 - Αυτοί είναι:
 - **Η Θέση**
 - **Η Ταχύτητα**
 - **Η Επιτάχυνση**
- ενός σώματος

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Θέση \vec{x}** : διάνυσμα που ορίζει την τοποθεσία του σώματος σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς (όπως το 0)
 - Διανυσματικό μέγεθος
 - Θα θεωρήσουμε έναν βαθμονομημένο άξονα στον οποίο γίνεται η κίνηση – το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το \vec{i} (οριζόντια κίνηση) ή το \vec{j} (κατακόρυφη κίνηση)
 - Το **πρόσημο** μας δηλώνει τη φορά του διανύσματος
 - $\vec{x}_1 = +3\vec{i}$, $\vec{x}_2 = -12\vec{i}$
- Το πρόσημο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό – ως πρόσημο τιμής στο βαθμονομημένο άξονα
 - Θετικό πρόσημο : το διάνυσμα ξεκινά από ένα σημείο αναφοράς (το 0) και καταλήγει σε κάποια θετική τιμή του άξονα
 - Αντίθετα για αρνητική τιμή

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα:



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ (displacement):** η αλλαγή στη θέση ενός σωματιδίου
- Ορισμός:

$$\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_{\text{τελ}} - \vec{x}_{\text{αρχ}}$$

- με $\vec{x}_{\text{τελ}}$, $\vec{x}_{\text{αρχ}}$ την τελική και την αρχική θέση του σωματιδίου
- Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό: $\vec{x}_{\text{τελ}} \rightarrow \vec{x}_f$, $\vec{x}_{\text{αρχ}} \rightarrow \vec{x}_i$
- Προσοχή: **απόσταση $d \neq$ μέτρο μετατόπισης $|\Delta\vec{x}|$!**
- Παράδειγμα:

Η απόσταση που διανύει ένας αθλητής μπάσκετ, αν απλουστευμένα υποθέσουμε ότι κινείται σε ευθεία γραμμή, είναι μερικά χιλιόμετρα, αλλά η μετατόπιση από την αρχική θέση του (κέντρο γηπέδου) ως την τελική (ξανά στην ίδια περίπου θέση) είναι πολύ μικρότερη (ως μέτρο)!



Κίνηση σε μια Διάσταση

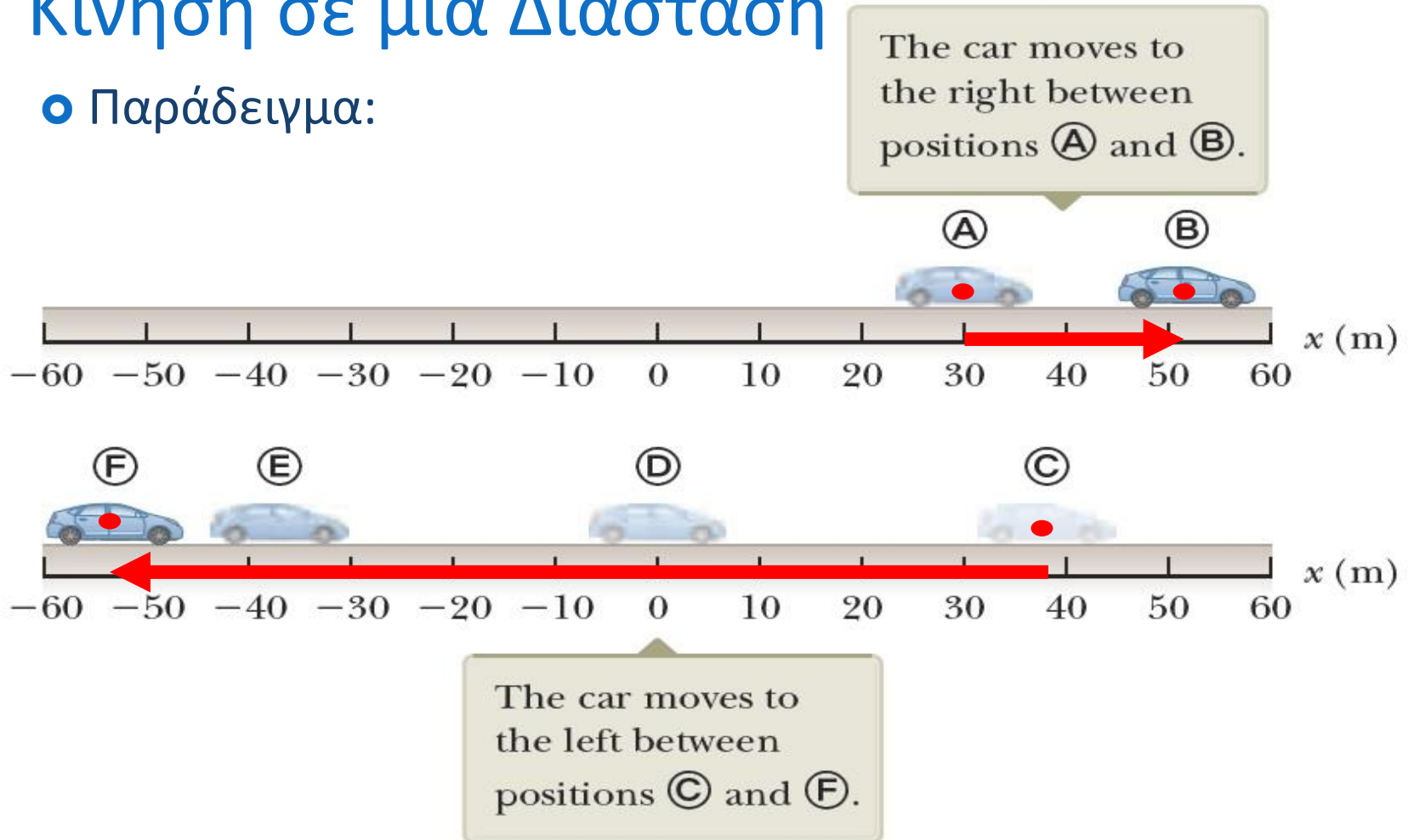
- Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$: διανυσματικό μέγεθος!
 - Έχει μέτρο, διεύθυνση, φορά
- Αν $\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = (x_f - x_i)\vec{l} = \Delta x \vec{l}$:
- $\Delta x = x_f - x_i > 0 \iff$ κίνηση προς τα δεξιά
- $\Delta x = x_f - x_i < 0 \iff$ κίνηση προς τα αριστερά

- Στο Διεθνές Σύστημα, μονάδα μέτρησης της μετατόπισης (όπως και της θέσης) είναι το

1 μέτρο (m)

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα:



$$\Delta \vec{x}_{A \rightarrow B} = \vec{x}_B - \vec{x}_A = 52\vec{i} - 30\vec{i} = (22 \text{ m}) \vec{i}$$

$$\Delta \vec{x}_{C \rightarrow F} = \vec{x}_F - \vec{x}_C = -55\vec{i} - 38\vec{i} = (-93 \text{ m}) \vec{i}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Μέση ταχύτητα (average velocity):

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

- Διάνυσμα: έχει επίσης μέτρο, διεύθυνση και φορά!
- Απαιτούνται δυο σημεία (αρχικό & τελικό)
- Ίδιο πρόσημο με $\Delta\vec{x}$ – γιατί?

- Μέση αριθμητική ταχύτητα (average speed):

- $s_{avg} \equiv \frac{d}{\Delta t}$, όπου d η απόσταση
- Βαθμωτό μέγεθος – όχι διάνυσμα !

- Προσοχή στη διαφορά τους!

Μονάδα μέτρησης:

$$\frac{m}{s}$$

(μέτρο ανά δευτ/το)

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα (instantaneous velocity)**

- Διάνυσμα: έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά
- Το διάνυσμα της ταχύτητας για κάθε χρονική στιγμή t !
- Αλλιώς: η μέση ταχύτητα όταν μετριέται σε $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

- Όμως

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

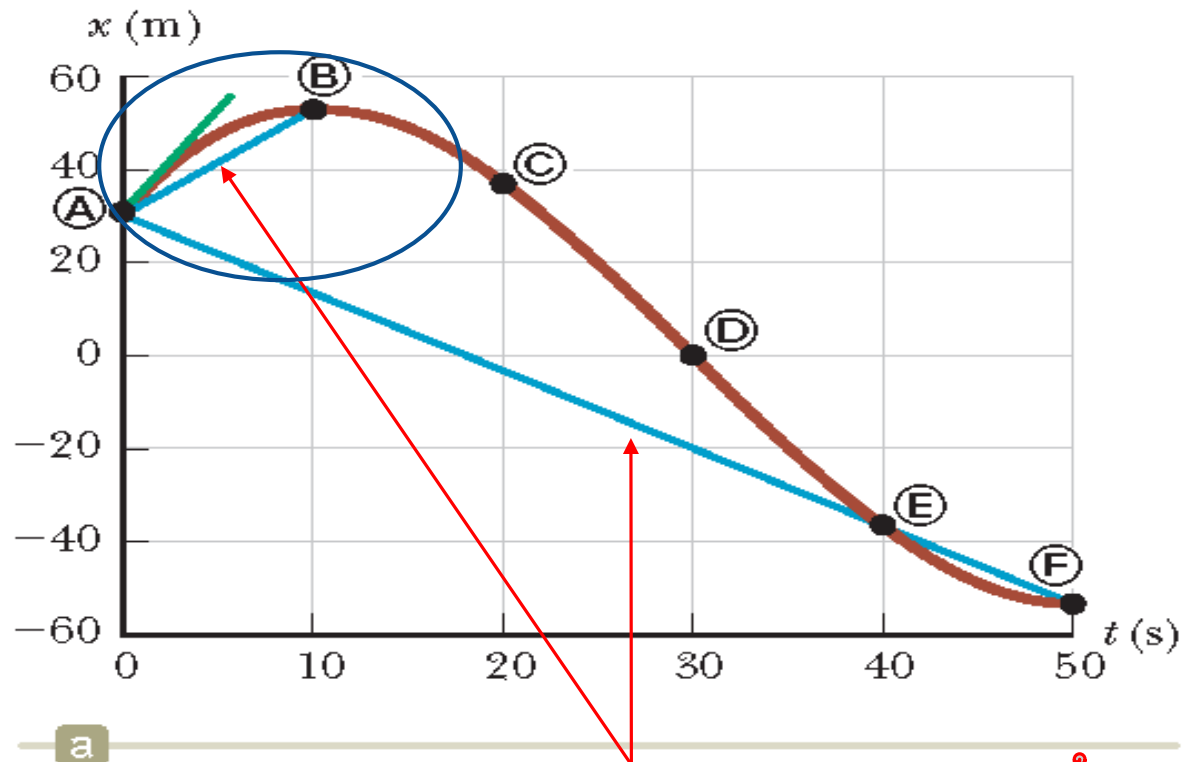
- Άρα: η στιγμιαία ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Στιγμαία Ταχύτητα

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

• Παράδειγμα:



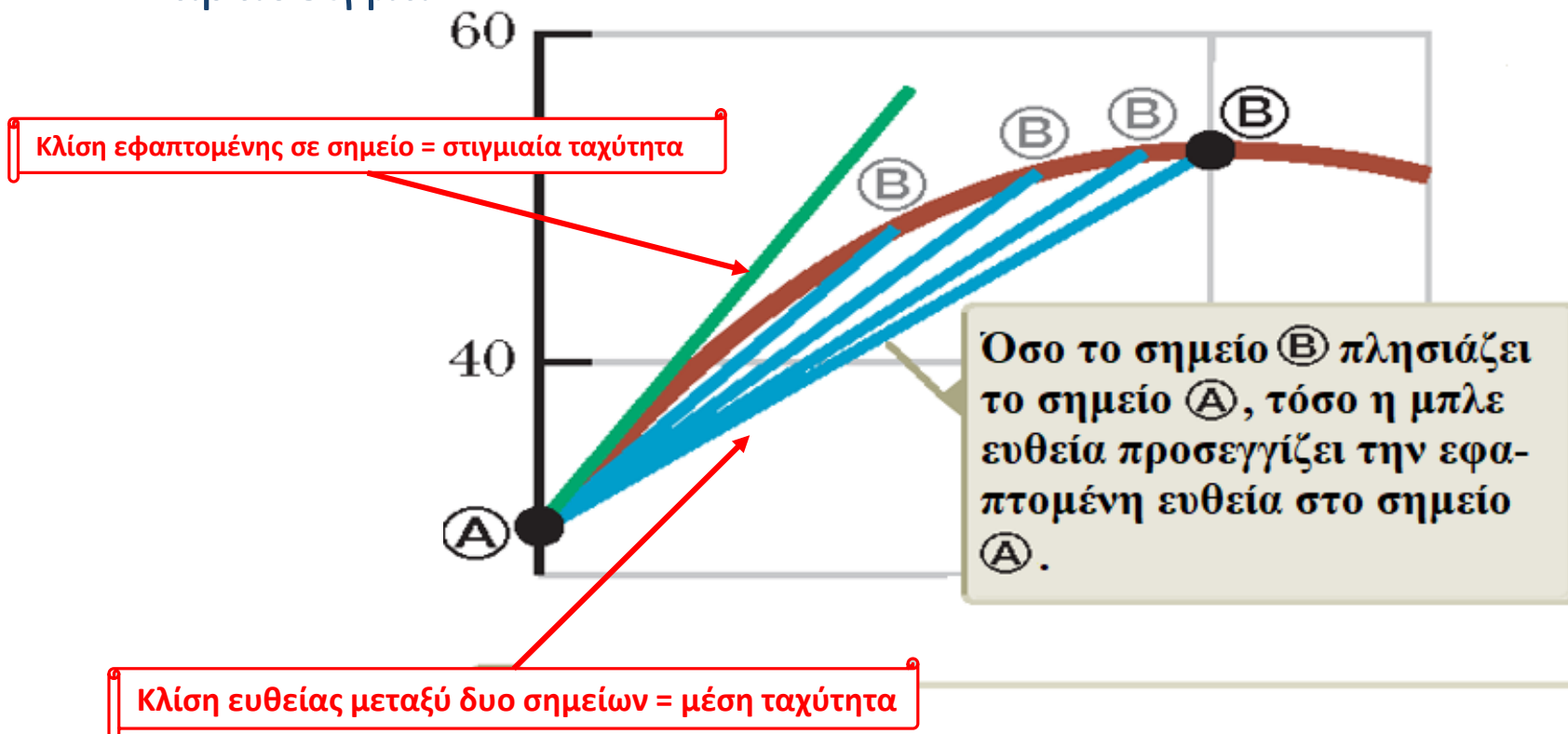
Κλίση ευθείας AF (ή AB) = μέση ταχύτητα

Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Στιγμαία Ταχύτητα

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

◉ Παράδειγμα:



Κίνηση σε μια Διάσταση

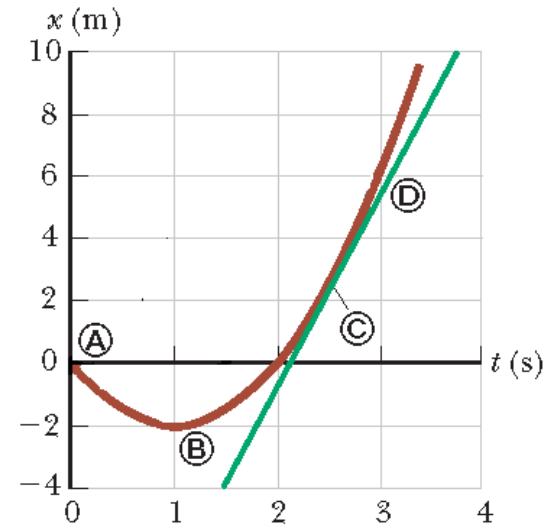
◉ Παράδειγμα:

- ◉ Σωματίδιο κινείται στον οριζόντιο άξονα, με τη θέση του να ορίζεται από τη σχέση

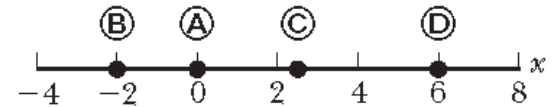
$$x(t) = -4t + 2t^2$$

όπου x είναι η θέση σε m , και t είναι ο χρόνος σε s , όπως στο Σχήμα (α).

- ◉ A. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.
- ◉ B. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.
- ◉ C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.



a



b

Κίνηση σε μια Διάσταση

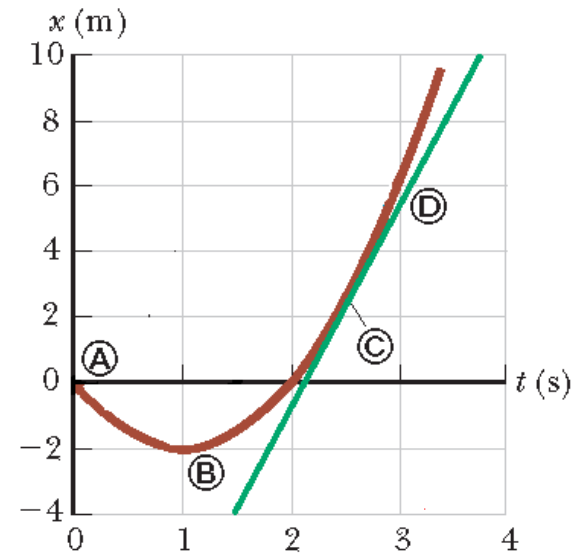
◉ Παράδειγμα – Λύση:

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

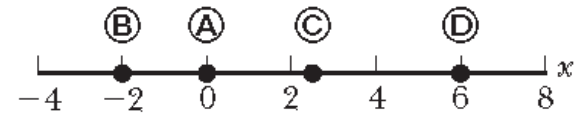
- ◉ Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.

$$\begin{aligned} \bullet \Delta \vec{x}_{A \rightarrow B} &= \vec{x}_B - \vec{x}_A = x_B \cdot \vec{i} - x_A \cdot \vec{i} \\ &= (x_B - x_A) \vec{i} \\ &= (x(t=1) - x(t=0)) \cdot \vec{i} \\ &= (-2 - 0) \cdot \vec{i} = (-2 \text{ m}) \cdot \vec{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \Delta \vec{x}_{B \rightarrow D} &= (x_D - x_B) \cdot \vec{i} \\ &= (x(t=3) - x(t=1)) \cdot \vec{i} \\ &= (6 - (-2)) \cdot \vec{i} = (8 \text{ m}) \cdot \vec{i} \end{aligned}$$



a



b

Κίνηση σε μια Διάσταση

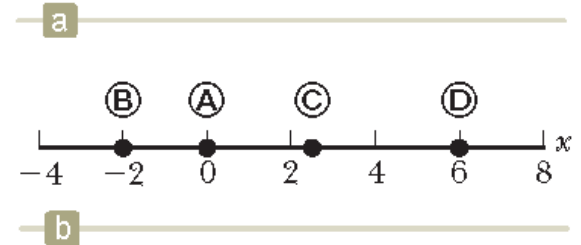
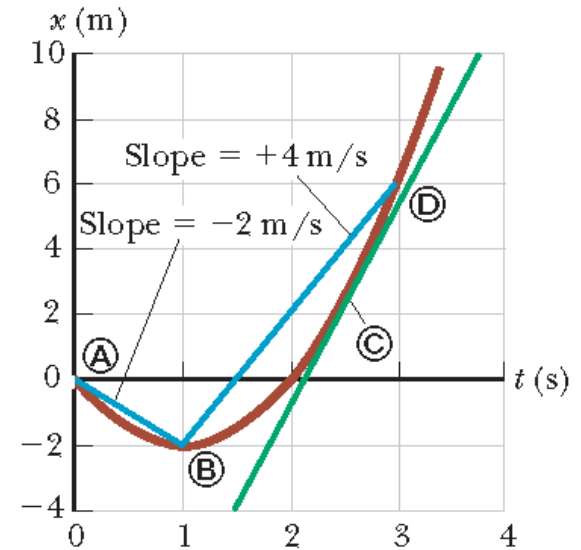
◉ Παράδειγμα – Λύση:

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- ◉ Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.

$$\bullet \quad u_{\text{avg}}^{A \rightarrow B} = \frac{\Delta \vec{x}_{A \rightarrow B}}{\Delta t} = \frac{(-2 \text{ m}) \vec{i}}{1 \text{ s}} = \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \vec{i}$$

$$\bullet \quad u_{\text{avg}}^{B \rightarrow D} = \frac{\Delta \vec{x}_{B \rightarrow D}}{\Delta t} = \frac{(8 \text{ m}) \vec{i}}{(3-1) \text{ s}} = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \vec{i}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

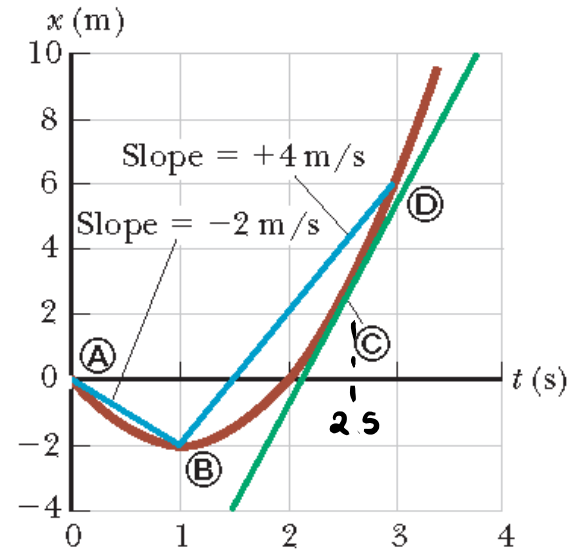
- ◉ C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.

Γνωρίζουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα δίνεται από τον 1^ο παράγωγο της συνάρτησης $x(t)$. Άρα:

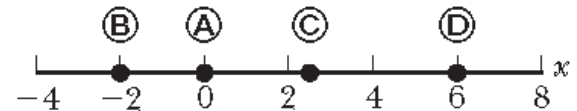
$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{d}{dt} x(t) = x'(t) \\ &= (-4t + 2t^2)' = -4 + 4t \end{aligned}$$

δηλ.

$$\vec{u}(t) = (-4 + 4t) \cdot \vec{i} \quad \xrightarrow{t = \frac{5}{2}} \quad \vec{u}\left(\frac{5}{2}\right) = \left(-4 + \frac{20}{2}\right) \vec{i} = \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \vec{i}$$



a



b

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Μοντέλο κίνησης: υπό σταθερή ταχύτητα

$$u_{avg} = u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = u_x \Delta t \Leftrightarrow (x_f - x_i) = u_x \Delta t$$

- Άρα

$$x_f = x_i + u_x \Delta t$$

- Αν θεωρήσουμε ότι $t_i = 0$:

$$\Delta t = t_f - t_i = t_f = t$$

και τότε

$$x_f = x_i + u_x t$$

- Επίσης, το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με

$$u = \frac{d}{\Delta t}$$

όπου d η απόσταση που διανύθηκε

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Επιτάχυνση (acceleration)**

- Η μεταβολή της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

- **Μέση επιτάχυνση (average acceleration)**

$$\vec{a}_{x,avg} \equiv \frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_{xf} - \vec{u}_{xi}}{t_f - t_i}$$

- **Στιγμαία επιτάχυνση (inst. acceleration)**

$$\vec{a}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}_x}{dt}$$

- Αφού όμως

$$\frac{d}{dt} \vec{u}_x = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{x}}{dt}$$

είναι

$$\vec{a}_x = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

Μονάδα μέτρησης:

$$\frac{m}{s^2}$$

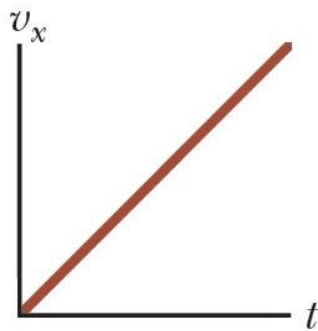
(μέτρο ανά δευτερόλεπτο στο τετράγωνο)

Κίνηση σε μια Διάσταση

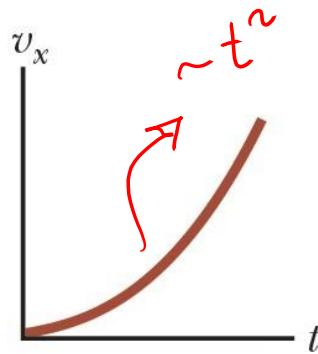
Quiz 1:

- Βρείτε τα ζεύγη ταχύτητας-επιτάχυνσης

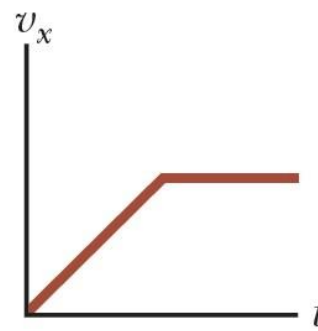
Hint: Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν σχέση παραγώγου-παράγουσας



a



b

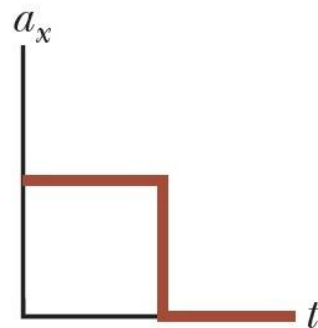


c

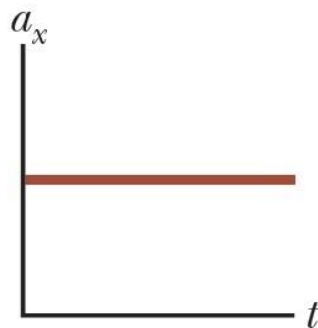
a \rightarrow e

b \rightarrow f

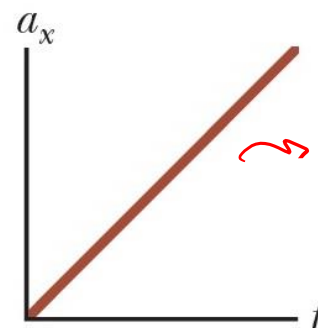
c \rightarrow d



d



e



f

Κίνηση σε μια Διάσταση

Quiz 2:

- Η θέση ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 4 - 27t + t^3$$

- Α) Βρείτε τη συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο
- Β) Βρείτε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο
- Γ) Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή t_0 που το σωματίδιο είχε $u(t_0) = 0$?

A) Είναι $u(t) = \frac{d}{dt} x(t) = (4 - 27t + t^3)' = -27 + 3t^2$

B) —u— $a(t) = \frac{d}{dt} u(t) = (-27 + 3t^2)' = 6t$

Γ) Είναι $u(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9 = 0$

Είναι $(t-3)(t+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ s} & \checkmark \\ t = -3 \text{ s} & \times \end{cases}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Μοντέλο κίνησης: υπό σταθερή επιτάχυνση

- Ορίζουμε θετική φορά κίνησης προς τα δεξιά

- Εξισώσεις Μονοδιάστατης Κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση:

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$

2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$

3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$ ή $x_f = x_i + u_{x,avg}t$

4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική κατάσταση, ενώ ο δείκτης x δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν οριζόντιο άξονα $x'x$ (κάποιες φορές μπορούμε να παραλείψουμε το δείκτη x για απλοποίηση)

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

$$a_{x,avg} = a_x$$

Από τον ορισμό έχουμε

$$a_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta t} = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{t_f - t_i} \xrightarrow{t_i=0, t_f=t} u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Άρα

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

○ Απόδειξη:

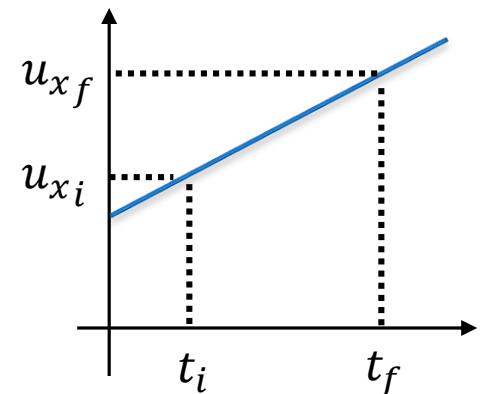
Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε η ταχύτητα (δηλ. το ολοκλήρωμά της) θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου

Έτσι η μέση ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως ο αριθμητικός μέσος της αρχικής ταχύτητας u_{x_i} και της τελικής ταχύτητας u_{x_f}

Δηλ.

$$u_{x\,avg} = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}$$

$$u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t \quad \text{ή} \quad x_f = x_i + u_{x,avg}t$$

Από την προηγούμενη σχέση, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με t :

$$u_{x_{avg}}t = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

$u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Όμως

$$u_{x_{avg}}t = \Delta x = x_f - x_i$$

οπότε

$$(x_f - x_i) = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Λύνοντας ως προς x_f :

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Απόδειξη:

Έχουμε ήδη

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

και

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2} t$$

Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + a_x t + u_{x_i})t \\ &= x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \end{aligned}$$

Άρα

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

○ Απόδειξη:

Έχουμε

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t \Rightarrow t = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}$$

και

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_f} + u_{x_i})t$$

Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + \frac{1}{2}(u_{x_f} + u_{x_i}) \left(\frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x} \right) \\ &= x_i + \frac{u_{x_f}^2 - u_{x_i}^2}{2a_x} \end{aligned}$$

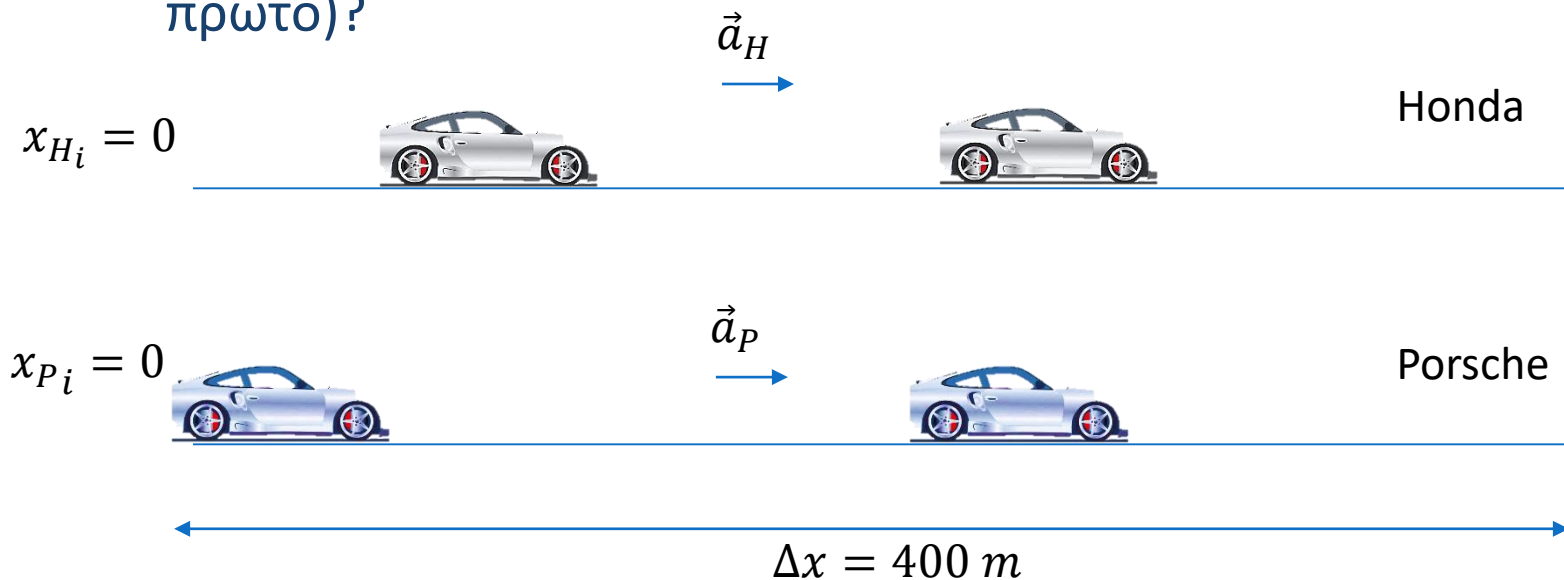
και λύνοντας ως προς $u_{x_f}^2$

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Μια Porsche προκαλεί ένα Honda σε έναν αγώνα ταχύτητας 400 μέτρων. Επειδή $a_P = 3.5 \text{ m/s}^2$ και $a_H = 3.0 \text{ m/s}^2$, το Honda παίρνει προβάδισμα στην αφετηρία κατά 1.0 s . Τα δυο οχήματα ξεκινούν από ακινησία. Περιγράψτε το μοντέλο κίνησης των οχημάτων. Ποιο αυτοκίνητο θα κερδίσει (φτάσει πρώτο)?



Κίνηση σε μια Διάσταση

◦ Παράδειγμα – Λύση:

$$\vec{a}_H = 3.0 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$

$$x_{Hi} = 0$$

A



Honda

B

$$x_{Pi} = 0$$

t = 0

A



Porsche

B

$$\vec{a}_P = 3.5 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$

$$\Delta x = 400 \text{ m}$$

1. $u_{xf} = u_{xi} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t$
4. $x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{xf}^2 = u_{xi}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Το μοντέλο που περιγράφει την κίνηση είναι αυτό της κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση θεωρώντας $x_A = 0$ τη θέση εκκίνησης των δύο οχημάτων. Θεωρούμε $t = 0$, όταν ξεκινάει η Porsche. Τότε τα δύο οχήματα περιγράφουν την κίνησή τους με το μοντέλο της ευθύγραμμης επιταχυνόμενης κίνησης με σταθερή ταχύτητα. Διαδικύουμε στην $A \rightarrow B$.

Κίνηση σε μια Διάσταση

◦ Παράδειγμα – Λύση:

$$\vec{a}_H = 3.0 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$

$$x_{Hi} = 0$$

A



Honda

B

$$x_{Pi} = 0$$

$$t = 0$$

A



$$\vec{a}_P = 3.5 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$



Porsche

B

$$\Delta x = 400 \text{ m}$$

Για την Porsche: (εξ. 4)

$$x_B = x_A + u_A t + \frac{1}{2} a_P t^2$$

$$400 = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} 3.5 t^2$$

$$400 = \frac{1}{2} 3.5 t^2$$

$$800 = 3.5 t^2 \Rightarrow t = \frac{800}{3.5} \approx 15.1 \text{ s}$$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

$$\vec{a}_H = 3.0 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$

$$x_{Hi} = 0$$

A



Honda

B

$$x_{Pi} = 0$$

$$t = 0$$

A



$$\vec{a}_P = 3.5 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$



Porsche

B

$$\Delta x = 400 \text{ m}$$

Για την Honda: (εξ. 4)

$$x_B = x_A + u_A(t+1) + \frac{1}{2} a_H t^2$$

$$400 = 0 + 0(t+1) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (t+1)^2$$

$$800 = 3(t+1)^2$$

$$3t^2 + 6t - 797 = 0 \Rightarrow t \approx 15.3 \text{ s}$$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

$$\vec{a}_H = 3.0 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$

$$x_{Hi} = 0$$

A



Honda

B

$$x_{Pi} = 0$$

$$t = 0$$

A



$$\vec{a}_P = 3.5 \frac{m}{s^2} \vec{i}$$



Porsche

B

$$\Delta x = 400 \text{ m}$$

Άρα τελικά κερδίει η Porsche.

Παρατηρήστε ότι:

I) Επιλέξαμε τη διαδρομή $A \rightarrow B$ και για τα δυο οχήματα.

II) Πατήσαμε το χρονόμετρο ($t=0$) όταν ξεκίνησε η Porsche. Με τον τρόπο αυτό, και οι δυο κινήσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις της ευθύγραμμης κίνησης με σταθερή επιτάχυνση (απλά ο χρόνος της Honda είναι $t+1$).

III) Υπάρχουν κι άλλες λύσεις, πιο περίπλοκες.

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Δεν είναι απαραίτητη η χρήση διανυσμάτων στην κίνηση αυτή
 - Είδατε ότι το τυπολόγιο της κίνησης ήταν αλγεβρικές εξισώσεις
 - Όμως τα αποτελέσματά σας πρέπει να γράφονται διανυσματικά!
 - Προσοχή στην ερμηνεία των αρνητικών μεγεθών!
- Υπενθυμίζεται η σύμβαση ότι : ορίζουμε ως **θετική φορά αυτή προς τα δεξιά**
 - Αντίστοιχα, αρνητική προς τα αριστερά
 - Ορίζετε πάντα θέση και χρόνο αναφοράς σας ($x_i = 0, t_i = 0$)!
- **Κατακόρυφη κίνηση** (κίνηση σε μια διάσταση)
 - Συνήθως ορίζουμε θετική φορά κίνησης προς τα επάνω
 - Επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g} = -9.8\vec{j}$ m/s² (φορά προς τα κάτω)
 - Ίδια μεθοδολογία και εξισώσεις ($x \rightarrow y$)

Κίνηση σε μια Διάσταση

ΌΧΙ $g = 10 \text{ m/s}^2$!!!

- Ελεύθερη πτώση: $\vec{a}_y = \vec{g} = -9.8\vec{j} \text{ m/s}^2$ σταθερή
 - Ορίζουμε θετική φορά κίνησης προς τα επάνω

• Εξισώσεις Ελεύθερης Πτώσης:

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$

2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$

3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{y_i} + u_{y_f})t$
ή

$$y_f = y_i + u_{y,avg}t$$

4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$

5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική κατάσταση, ενώ ο δείκτης y δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν κατακόρυφο άξονα $y'y$ (συχνά ο δείκτης παραλείπεται)

Στις διπλανές εξισώσεις, η επιτάχυνση της βαρύτητας χρησιμοποιείται κατά μέτρο, $g = |\vec{g}| = 9.8 \text{ m/s}^2$

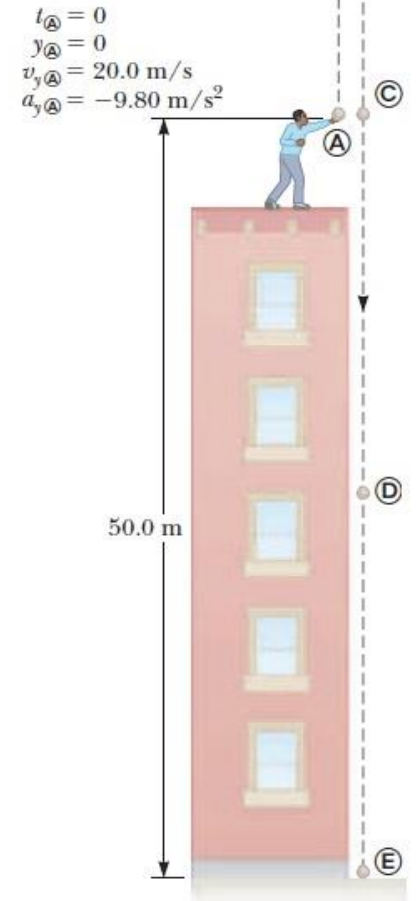
Αν ορίσετε θετική φορά κίνησης προς τα κάτω (δηλ. με ίδια φορά με το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας), τότε όπου $-g$ θέτουμε g στις διπλανές σχέσεις

Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m. Δεν υπάρχουν αντιστάσεις λόγω αέρα.
 - ◉ Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.
 - ◉ Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
 - ◉ Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
 - ◉ Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
 - ◉ Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5$ s.

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

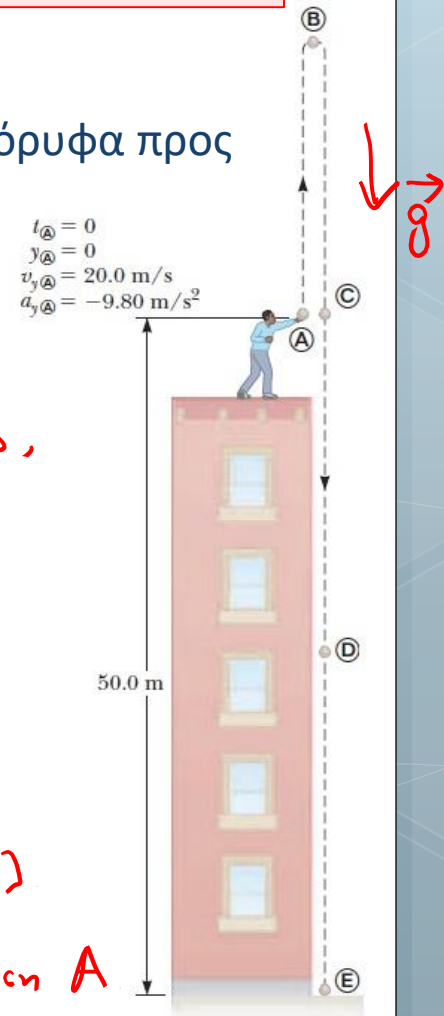
◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
 - ◉ A) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.

Η κίνηση της μπάλας είναι, σε κάθε διάστημα της, ευθύγραμμη με σταθερή επιτάχυνση $\vec{g} = \left(-9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \vec{j}$

Άρα θα μοντελοποιήσουμε την κίνηση με τις εξισώσεις της επιταχυνόμενης κίνησης, στον άξονα y . Επιλέγουμε ότι $t_A = 0$, $y_A = 0$, δηλ χρονική αναφορά και σημείο αναφοράς είναι η θέση A

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- ◉ Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.

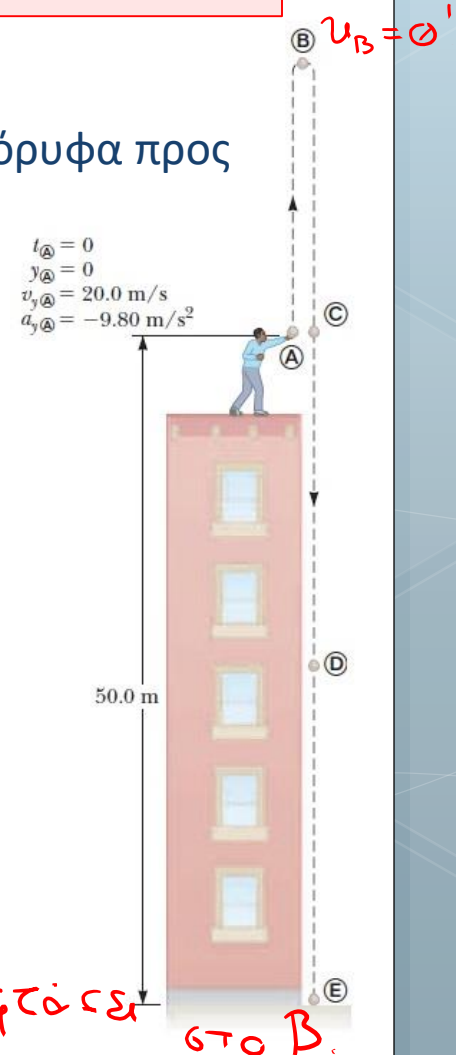
Δαλζιάει στη διαδρομή A → B. Είναι:

$$u_B = u_A - gt$$

$$0 = 20 - 9.8t$$

$$t = \frac{20}{9.8} \text{ s} \approx 2.04 \text{ sec}$$

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Άρα χρειάζεται 2.04 s για να φτάσει στο B.

Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- ◉ Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.

Δαδειούμεε στη διαδρομή A → B.

Είνα

$$y_B = y_A + \frac{1}{2} (u_A + u_B) t$$

Μέγιστο ύψος

$$y_B = 0 + \frac{1}{2} (20 + 0) \cdot 2.04$$

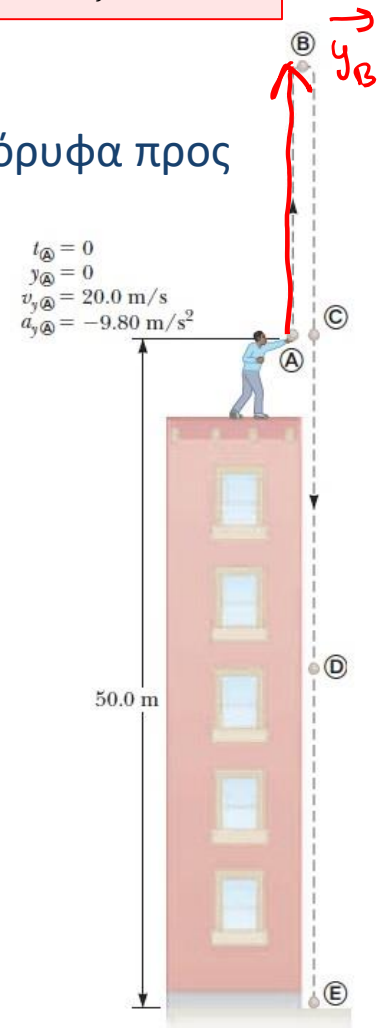
"
 h_{max}

$$= 10 \cdot 2.04$$

$$\approx 20.4 \text{ m}$$

Αντ. $\vec{y}_B = (20.4 \text{ m}) \vec{j}$

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2} (u_{y_i} + u_{y_f}) t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- ◉ Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.

Δαδειουμε στη διαδρομή A → C.

Ειναι

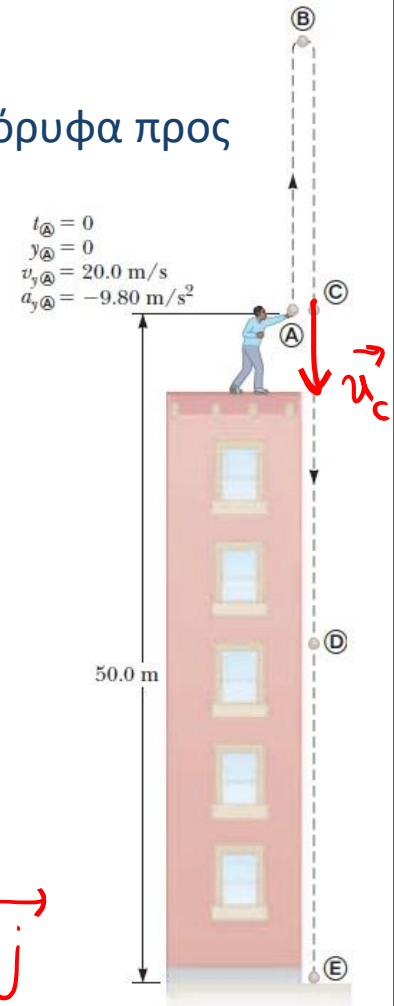
$$u_c^2 = u_A^2 - 2g \Delta y_{A \rightarrow C}$$

$$u_c^2 = 20^2 - 2 \cdot 9.8 \cdot 0$$

$$u_c^2 = 400 \Rightarrow u_c = \pm 20 \frac{m}{s}$$

Επιλεγομε $u_c = -20 \frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_c = (-20 \frac{m}{s}) \vec{j}$

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- ◉ Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.

- $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
- $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
- $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{y_i} + u_{y_f})t$
- $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
- $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

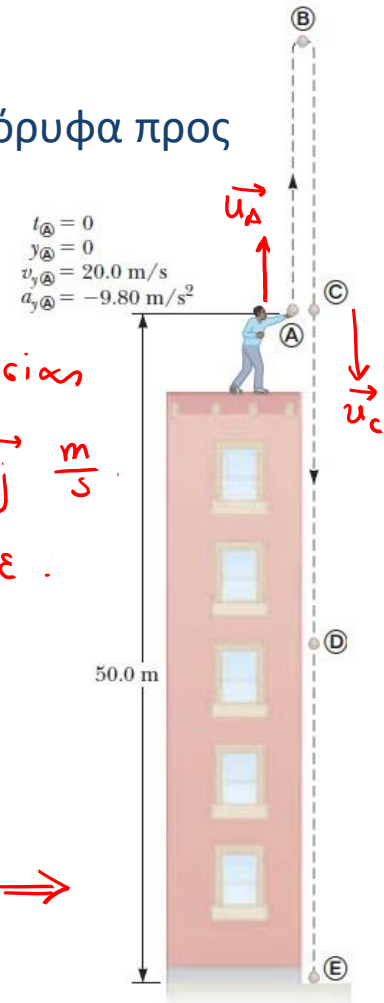
Θα μπορούσαμε να πούμε ότι $t_{A \rightarrow B} = t_{B \rightarrow C}$, λόγω απουσίας αντιστάσεων του αέρα, και άρα $\vec{u}_C = -\vec{u}_A = -20\vec{j} \frac{m}{s}$.
 Πώς ξέρουμε όμως ότι $t_{A \rightarrow B} = t_{B \rightarrow C}$? Ας το δείμε.

Διοδρετή A → B: δείξουμε ότι $t_{A \rightarrow B} = \frac{u_A}{g}$ (1)

Διοδρετή B → C: $y_C = y_B + u_B t_{B \rightarrow C} - \frac{1}{2} g t_{B \rightarrow C}^2$

$$0 = h_{max} + 0 \cdot t_{B \rightarrow C} - \frac{1}{2} g t_{B \rightarrow C}^2$$

Όμως $h_{max} = \frac{u_A^2 - u_B^2}{2g}$, όπως δείξαμε πριν
 από 2 slides } ⇒



Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- ◉ Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.

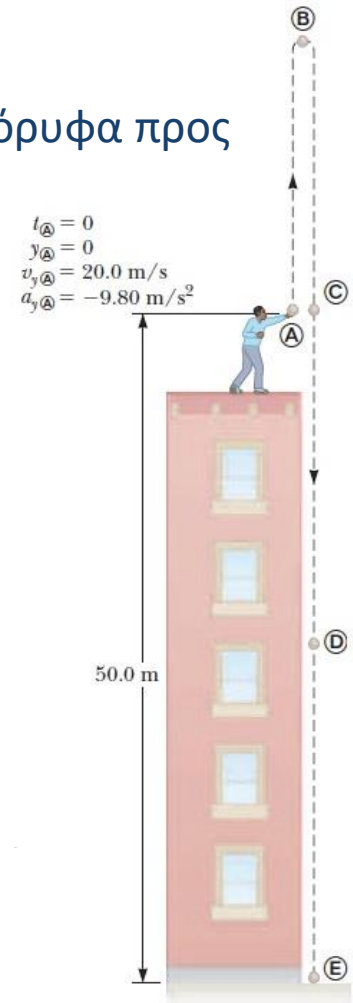
$$\Rightarrow \emptyset = \frac{u_A^2 - u_B^2}{2g} - \frac{1}{2} g t_{B \rightarrow C}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_A^2 - \emptyset}{2g} = \frac{1}{2} g t_{B \rightarrow C}^2 \Leftrightarrow \frac{u_A^2}{g} = g t_{B \rightarrow C}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_A^2}{g^2} = t_{B \rightarrow C}^2 \Leftrightarrow t_{B \rightarrow C} = \sqrt{\frac{u_A^2}{g^2}} = \frac{u_A}{g} \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1), (2) μας δίνουν ότι $t_{A \rightarrow B} = t_{B \rightarrow C}$.

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- ◉ Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5$ s.

Δαδειάζει στη διαδρομή A → D.

Είναι

$$u_D = u_A - g t_{A \rightarrow D}$$

$$u_D = 20 - 9.8 \cdot 5 = 20 - 49 = -29 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άρα $\vec{u}_D = (-29 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \vec{j}$

Επίσης,

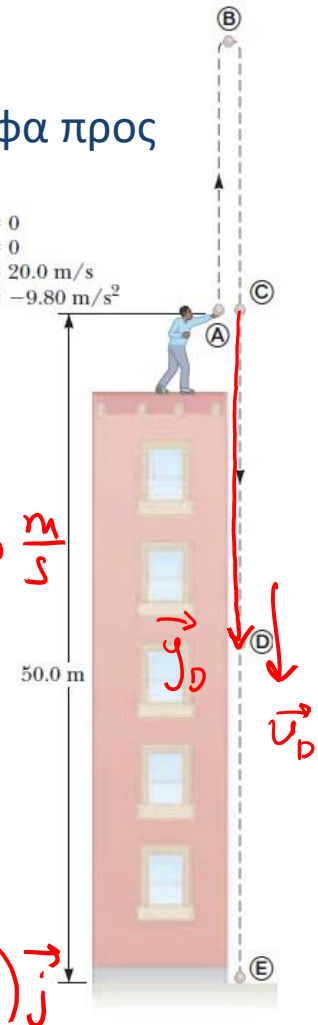
$$y_D = y_A + \frac{1}{2} (u_A + u_D) \cdot t$$

$$= 0 + \frac{1}{2} (20 + (-29)) \cdot 5$$

$$= -22.5 \text{ m} \Rightarrow \vec{y}_D = (-22.5 \text{ m}) \vec{j}$$

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2} (u_{yi} + u_{yf}) t$
4. $y_f = y_i + u_{yi} t - \frac{1}{2} g t^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$$\begin{aligned} t_{\text{A}} &= 0 \\ y_{\text{A}} &= 0 \\ v_{y_{\text{A}}} &= 20.0 \text{ m/s} \\ a_{y_{\text{A}}} &= -9.80 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$





Τέλος Διάλεξης

