ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2026
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.
Εφόσον η επιτάχυνση είναι σταθερή και η κίνηση είναι μονοδιάστατη, από τις εξισώσεις επιταχυνόμενης κίνησης η θέση γράφεται ως

$$x(t) = x_0 + u_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{1}$$

Από τα δεδομένα έχουμε $x_0 = x(0) = 2$ m. Για $t = 1$ s,

$$1 = 2 + u_0 + \frac{1}{2} a \tag{2}$$

άρα

$$u_0 + \frac{1}{2} a = -1 \tag{3}$$

Για $t = 3$ s,

$$4 = 2 + 3u_0 + \frac{9}{2} a \tag{4}$$

ή, διαιρώντας με 4,

$$\frac{3}{4} u_0 + \frac{9}{8} a = 1 \tag{5}$$

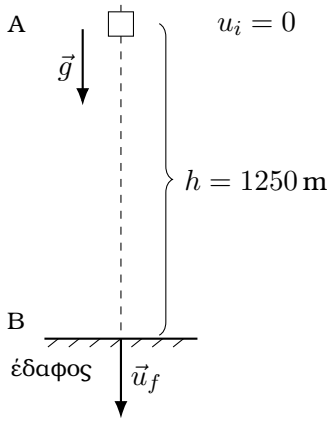
Από τις δύο τελευταίες σχέσεις (3,5) προκύπτει

$$a = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \mathrm{m/s^2} \tag{6}$$

Επομένως η επιτάχυνση έχει φορά προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x και

$$\vec{a} = \left(\frac{5}{3} \ \mathrm{m/s^2} \right) \vec{i} \tag{7}$$

Άσκηση 2.
Δείτε το παρακάτω σχήμα. Θεωρούμε θετική τη φορά προς τα πάνω. Σημείο αναφοράς το σημείο A, δηλ. $y_A = 0$. Δουλεύουμε στη διαδρομή $A \to B$ και θεωρούμε $t = 0$ στη θέση Α.



Το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση. Τότε

$$a = -g = -9.8 \text{ m/s}^2 \tag{8}$$

ενώ $u_i = u_A = 0$. Η μετατόπιση μέχρι το έδαφος είναι

$$\Delta y = y_B - y_A = -1250 \text{ m} \tag{9}$$

Από τη σχέση

$$u_B^2 = u_A^2 + 2a\Delta y \Longleftrightarrow u_B^2 = u_A^2 - 2g\Delta y \tag{10}$$

παίρνουμε

$$u_B^2 = -2 \cdot 9.8 \cdot (-1250) = 24500 \tag{11}$$

οπότε

$$|u_f| = \sqrt{24500} = 156.5 \text{ m/s} \tag{12}$$

Η φορά είναι προς τα κάτω, άρα, με δεδομένο ότι η θετική φορά που πήραμε είναι προς τα πάνω,

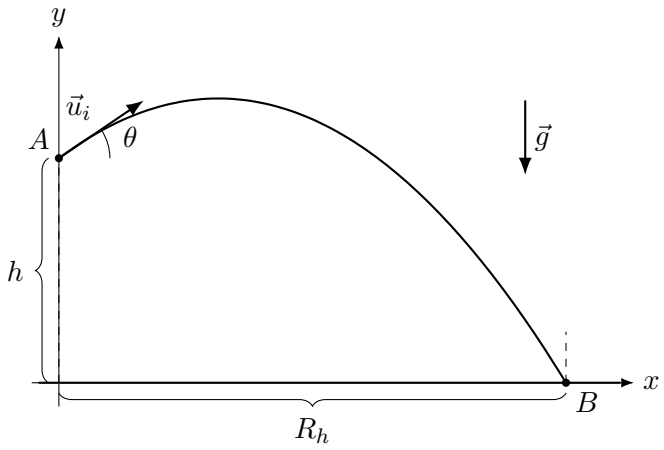
$$\vec{u}_f = -(156.5 \text{ m/s})\vec{j} \tag{13}$$

Για μετατροπή σε km/h,

$$156.5 \times 3.6 = 563.5 \text{ km/h} \tag{14}$$

Η τιμή αυτή δεν είναι ρεαλιστική για πραγματικό αντικείμενο μέσα στην ατμόσφαιρα, επειδή αγνοήσαμε την αντίσταση του αέρα. Σε πραγματική πτώση η αεροδυναμική αντίσταση αυξάνεται με την ταχύτητα και τελικά μπορεί να οδηγήσει σε οριακή ταχύτητα σημαντικά μικρότερη από την παραπάνω ιδανική πρόβλεψη.

Άσκηση 3.
Δείτε το παρακάτω σχήμα.



Επιλέγουμε την αρχή των αξόνων στο σημείο του εδάφους ακριβώς στο σημείο εκτόξευσης. Θεωρούμε θετική φορά της κίνησης προς τα πάνω και προς τα δεξιά. Το σώμα εκτελεί βολή, άρα κινείται με σταθερή ταχύτητα στον άξονα $x'x$ και με σταθερή επιτάχυνση στον κατακόρυφο άξονα $y'y$. Δουλεύουμε στη διαδρομή $A \to B$ και θεωρούμε $t = 0$ στη θέση Α. Τότε

$$x(0) = x_0 = 0 \tag{15}$$

$$y(0) = y_0 = h \tag{16}$$

και οι αρχικές συνιστώσες της ταχύτητας είναι

$$u_{ix} = u_{xA} = u_i \cos\theta, \qquad u_{iy} = u_{yA} = u_i \sin\theta \tag{17}$$

Η οριζόντια κίνηση, λόγω σταθερής ταχύτητας,

$$x(t) = x_0 + u_{xA}t = 0 + u_i\cos(\theta)\,t \tag{18}$$

ενώ κατακόρυφα

$$y(t) = y_0 + u_{yA}t - \frac{1}{2}gt^2 = h + u_i\sin(\theta)\,t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{19}$$

Κατά την πρόσκρουση στο έδαφος, $y_B = 0$, άρα

$$y_B = y_A + u_{yA}t - \frac{1}{2}gt^2 \iff \frac{1}{2}gt^2 - u_i\sin(\theta)\,t - h = 0 \tag{20}$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση δίνει

$$t = \frac{u_i\sin\theta \pm \sqrt{u_i^2\sin^2\theta + 2gh}}{g} \tag{21}$$

Η λύση με το αρνητικό πρόσημο δεν αντιστοιχεί σε θετικό χρόνο πτήσης, επομένως

$$t = \frac{u_i\sin\theta + \sqrt{u_i^2\sin^2\theta + 2gh}}{g} \tag{22}$$

Η οριζόντια απόσταση είναι

$$R_h = x(t) = u_i\cos(\theta)\,t \tag{23}$$

οπότε

$$R_h = \frac{u_i\cos\theta}{g}\left(u_i\sin\theta + \sqrt{u_i^2\sin^2\theta + 2gh}\right) \tag{24}$$

Για $h = 0$ και για τη συνήθη περίπτωση $0 \le \theta \le \pi/2$,

$$\sqrt{u_i^2\sin^2\theta} = u_i\sin\theta \tag{25}$$

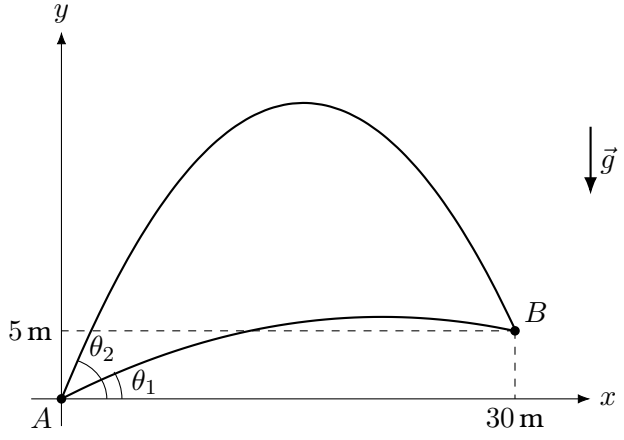
Άρα

$$R_h = \frac{2u_i^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u_i^2\sin(2\theta)}{g} \tag{26}$$

που είναι η σχέση του βεληνεκούς/εύρους βολής που είδαμε στις διαλέξεις.

Άσκηση 4.

Δείτε το παρακάτω σχήμα. Τοποθετούμε τη συμβολή των αξόνων στη θέση εκτόξευσης. Θεωρούμε θετικές φορές τις συμβατικές (πάνω και δεξιά). Δουλεύουμε στη διαδρομή $A \to B$ και θεωρούμε $t = 0$ στη θέση Α. Το σώμα εκτελεί βολή, οπότε έχουμε κίνηση με σταθερή ταχύτητα στον άξονα $x'x$ και κίνηση με σταθερή επιτάχυνση στον άξονα $y'y$.



(α΄) Στον οριζόντιο άξονα

$$x(t) = u_i \cos(\theta)\, t \tag{27}$$

και στον κατακόρυφο άξονα

$$y(t) = u_i \sin(\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{28}$$

Από την πρώτη,

$$t = \frac{x}{u_i \cos\theta} \tag{29}$$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη,

$$y = u_i \sin\theta \frac{x}{u_i \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{u_i \cos\theta} \right)^2 \tag{30}$$

$$= x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 u_i^2 \cos^2\theta} \tag{31}$$

Άρα

$$y = x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 u_i^2 \cos^2\theta} \tag{32}$$

(β΄) Θέτουμε

$$w = \tan\theta \tag{33}$$

Χρησιμοποιώντας τη δοσμένη σχέση $1/\cos^2\theta = 1 + w^2$, η εξίσωση της τροχιάς γίνεται

$$y = xw - \frac{g x^2}{2 u_i^2}(1 + w^2) \tag{34}$$

Για $x = 30$ m, $y = 5.0$ m, $u_i = 22$ m/s και $g = 9.8$ m/s^2,

$$\frac{g x^2}{2 u_i^2} = \frac{9.8(30)^2}{2(22)^2} = 9.112 \tag{35}$$

Επομένως

$$5 = 30w - 9.112(1 + w^2) \tag{36}$$

ή

$$9.112 w^2 - 30 w + 14.112 = 0 \tag{37}$$

Με τον τύπο της δευτεροβάθμιας εξίσωσης,

$$w = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4(9.112)(14.112)}}{2(9.112)} \tag{38}$$

Οι δύο ρίζες είναι

$$w_1 = 0.569, \qquad w_2 = 2.724 \tag{39}$$

Άρα

$$\theta_1 = \tan^{-1}(0.569) = 29.6^\circ \tag{40}$$

και

$$\theta_2 = \tan^{-1}(2.724) = 69.8^\circ \tag{41}$$

Άσκηση 5.
Η ταχύτητα είναι

$$\vec{u}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = (2t^2 - 8t + 5)\vec{i} + 4\vec{j} \tag{42}$$

(α΄) Η επιτάχυνση προκύπτει από την παράγωγο της ταχύτητας,

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{u}}{dt} = (4t - 8)\vec{i} \tag{43}$$

Για $t = 3.0$ s,

$$\vec{a}(3) = (4.00\ \mathrm{m/s^2})\vec{i} \tag{44}$$

(β΄) Η επιτάχυνση μηδενίζεται όταν

$$4t - 8 = 0, \tag{45}$$

άρα

$$t = 2.00\ \mathrm{s} \tag{46}$$

(γ΄) Για να μηδενιστεί η ταχύτητα πρέπει να μηδενιστούν ταυτόχρονα και οι δύο συνιστώσες της. Όμως

$$u_y(t) = 4\ \mathrm{m/s} \tag{47}$$

για κάθε t. Συνεπώς

$$\vec{u}(t) \neq \vec{0} \quad \text{για κάθε } t \tag{48}$$

(δ΄) Το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$|\vec{u}| = \sqrt{(2t^2 - 8t + 5)^2 + 4^2} \tag{49}$$

Θέλουμε $|\vec{u}| = 5$ m/s, οπότε

$$(2t^2 - 8t + 5)^2 + 16 = 25 \tag{50}$$

δηλαδή

$$(2t^2 - 8t + 5)^2 = 9 \tag{51}$$

Άρα έχουμε δύο περιπτώσεις. Πρώτα,

$$2t^2 - 8t + 5 = 3 \tag{52}$$

οπότε

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \tag{53}$$

και

$$t = 2 \pm \sqrt{3} \tag{54}$$

Άρα

$$t_1 = 0.268\ \mathrm{s}, \qquad t_3 = 3.73\ \mathrm{s} \tag{55}$$

Στη δεύτερη περίπτωση,

$$2t^2 - 8t + 5 = -3 \tag{56}$$

οπότε

$$t^2 - 4t + 4 = 0 = (t - 2)^2 \tag{57}$$

και επομένως

$$t_2 = 2.00\ \mathrm{s} \tag{58}$$

Συνεπώς

$$t \approx 0.268,\ 2.00,\ 3.73\ \mathrm{s} \tag{59}$$