ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1.
Αφού η απόσταση μεταξύ του υψηλότερου και του χαμηλότερου σημείου της επιφάνειας της θάλασσας είναι d, τότε μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την άνοδο και την κάθοδο της ως απλή αρμονική κίνηση με πλάτος $d/2$. Αν η περίοδος μας δίνεται ως 12.5 ώρες, τότε η συχνότητα θα είναι $\omega = 2\pi f = 2\pi/T = \frac{2\pi}{12.5}$ rad/h. Το πρόβλημα μας ζητά να ξεκινήσουμε τη μέτρησή μας από το υψηλότερο σημείο, δηλ. για $t = 0$, η απλή αρμονική κίνηση της επιφάνειας της θάλασσας θα δίνεται ως

$$x(0) = A\cos(\omega t + \phi) \Longrightarrow \frac{d}{2} = \frac{d}{2}\cos(0 + \phi) \Longrightarrow \cos(\phi) = 1 \Longrightarrow \phi = 0 \tag{1}$$

Άρα

$$x(t) = \frac{d}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{12.5}t\right) \tag{2}$$

με το χρόνο t να εκφράζεται σε ώρες. Για να κατέβει το νερό απόσταση $0.25d$ από το υψηλότερο σημείο, σημαίνει ότι τότε το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $\frac{d}{2} - \frac{d}{4} = \frac{d}{4}$. Οπότε

$$\frac{d}{4} = \frac{d}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{12.5}t\right) \tag{3}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{12.5}t\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \tag{4}$$

$$\frac{2\pi}{12.5}t = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \;\; k \in Z \tag{5}$$

$$\frac{1}{12.5}t = k \pm \frac{1}{6} \tag{6}$$

και θέτοντας $k = 0$ για να βρούμε την πρώτη φορά που κατεβαίνει από το μέγιστο ύψος μέχρι το δοσμένο ύψος, έχουμε

$$\frac{t}{12.5} = \frac{1}{6} \Longleftrightarrow 6t = 12.5 \Longleftrightarrow t = 2.0833 \text{ ώρες} \tag{7}$$

Ασκηση 2.
Στο πρόβλημα αυτό, πρέπει να βρούμε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου, όταν αυτό συμπιέζεται από το σώμα $\{$σφαίρα, σώμα$\}$ μάζας $M + m$. Θεωρούμε ότι, απουσία τριβών, το σύστημα $\{$ελατήριο, σώματα$\}$ είναι απομονωμένο, καθώς η μόνη δύναμη που παράγει έργο στο σύστημα είναι η δύναμη του ελατηρίου (η κάθετη δύναμη από το έδαφος και η δύναμη του βάρους είναι μεν δυνάμεις που δρουν στο σύστημα αλλά είναι κάθετες στη μετατόπιση που πραγματοποιεί το σώμα, και έτσι το έργο τους είναι μηδέν), η οποία είναι συντηρητική. Στη διαδρομή από το σημείο Α (σημείο που το σώμα αποκτά την ταχύτητα που αναφέρει η εκφώνηση) ως το σημείο Β (σημείο μέγιστης συμπίεσης του ελατηρίου), ισχυει η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

$$E^A_{mec} = E^B_{mech} \tag{8}$$

$$K_A + U_{s_A} = K_B + U_{s_B} \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}(m + M)u_A^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{10}$$

$$(m+M)u_A^2 = kx^2 \tag{11}$$

$$x^2 = \frac{(m+M)u_A^2}{k} \tag{12}$$

$$x = \sqrt{\frac{(m+M)u_A^2}{k}} = 0.0329 \text{ m} \tag{13}$$

Επιλέξαμε τη θετική ρίζα καθώς η συμπίεση του ελατηρίου γίνεται προς τα δεξιά, όπου θεωρούμε ότι πρόκειται για τη θετική φορά μετρήσεων θέσης σε σχέση με τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου ($x = 0$). Άρα το πλάτος της ταλάντωσης που θα υποστεί το σύστημα θα είναι $A = 0.033$ m.

Ασκηση 3.

Όταν $\phi = \pi/5$ και $t = 0$, τότε

$$x(0) = A\cos(\pi/5) \tag{14}$$

Η συνολική ενέργεια του ταλαντωτή θα είναι

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kA^2 \tag{15}$$

για κάθε χρονική στιγμή. Η ελαστική δυναμική ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

$$U(t=0) = \frac{1}{2}kx(0)^2 \tag{16}$$

Ο λόγος των δυο είναι

$$\frac{U(0)}{E_{tot}} = \frac{\frac{1}{2}kx(0)^2}{\frac{1}{2}kA^2} = \frac{\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\pi/5)}{\frac{1}{2}kA^2} = \cos^2(\pi/5) \tag{17}$$

οπότε

$$U(0) = \cos^2(\pi/5)E_{tot} = 0.6545E_{tot} \tag{18}$$

άρα το ποσοστό της συνολικής ενέργειας του ταλαντωτή που βρίσκεται αποθηκευμένο ως ελαστική δυναμική ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι 65.45%.

Ασκηση 4.

Ένα ημιτονοειδές κύμα δίνεται από τη σχέση

$$y(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t + \phi) \tag{19}$$

Για $f = 500$ Hz, $\omega = 2\pi f = 1000\pi$ rad/s και από τη σχέση $u = \lambda f \Longrightarrow \lambda = \frac{u}{f} = \frac{350}{500} = 0.7$ m και άρα $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.7} = \frac{20\pi}{7}$ rad/m. Επίσης, η περίοδος του κύματος θα είναι $T = \frac{1}{f} = 0.002$ sec. Οπότε

$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{20\pi}{7}x \pm 1000\pi t + \phi\right) \tag{20}$$

Έστω ότι το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, δηλ.

$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{20\pi}{7}x - 1000\pi t + \phi\right) \tag{21}$$

(α') Τα σημεία του κύματος που απέχουν ένα μήκος κύματος, έχουν διαφορά φάσης 2π. Άρα τα σημεία που έχουν διαφορά φάσης $\pi/3$ θα έχουν μήκος κύματος $\lambda/6 = 0.1167$ m. Εναλλακτικά, για δυο στοιχεία του κύματος, x_1, x_2, θα πρέπει

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{\pi}{3} \tag{22}$$

$$\frac{20\pi}{7}x_2 - \omega t + \phi - \frac{20\pi}{7}x_1 + \omega t - \phi = \frac{\pi}{3} \tag{23}$$

$$\frac{20\pi}{7}(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3} \tag{24}$$

$$\Delta x = \frac{7}{60} = 0.1167 \text{ m} \tag{25}$$

(β΄) Ξέρουμε ότι ένα σημείο του κύματος εκτελεί Απλή Αρμονική Κίνηση με το ίδιο πλάτος A και συχνότητα ω, αλλά με διαφορέτική φάση. Σε χρόνο μιας περιόδου $T = 0.002$ s, η διαφορά φάσης μεταξύ δυο μετατοπίσεων θα είναι 2π. Σε χρόνο $t = 0.001$ s, που αποτελεί το μισό της περιόδου, η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο μετατοπίσεων θα είναι π rad. Εναλλακτικά, αν θέσουμε $x = 0$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, και $t_2 - t_1 = 0.001$ ο δοσμένος χρόνος, τότε

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \tag{26}$$

$$= -1000\pi(t_2 - t_1) \tag{27}$$

$$= -1000\pi \cdot 0.001 = -\pi \text{ rad} \tag{28}$$

που πρακτικά δηλώνει ότι η διαφορά φάσης ισούται με π.

Ασκηση 5.

Έστω ότι η χρονική στιγμή που αναφέρει το πρόβλημα είναι η $t = 0$. Τότε, για το στοιχείο Α, θα έχουμε

$$s(x_A, 0) = s_{max}\cos(kx_A + \phi) \Longleftrightarrow s(2, 0) = 6 \cdot 10^{-9}\cos(2k + \phi) = 6 \cdot 10^{-9} \tag{29}$$

ενώ για το στοιχείο Β θα είναι

$$s(x_B, 0) = s_{max}\cos(kx_B + \phi) \Longleftrightarrow s(2.07, 0) = 6 \cdot 10^{-9}\cos(2.07k + \phi) = 2 \cdot 10^{-9} \tag{30}$$

Για να βρούμε τη συχνότητα, δεδομένης της ταχυτητας διάδοσης, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$u = \lambda f \tag{31}$$

άρα χρειαζόμαστε το μήκος κύματος λ. Από την πρώτη σχέση παίρνουμε ότι

$$\cos(2k + \phi) = 1 \Longleftrightarrow 2k + \phi = 0 \Longleftrightarrow \phi = -2k \tag{32}$$

και αντικαθιστώντας στη δεύτερη

$$3\cos(2.07k + \phi) = 1 \Longleftrightarrow \cos(2.07k + \phi) = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow 2.07k + \phi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.231 \tag{33}$$

και άρα

$$2.07k - 2k = 1.231 \Longleftrightarrow 0.07k = 1.231 \Longleftrightarrow k = 17.585 \tag{34}$$

και από τη σχέση

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Longleftrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = 0.357 \text{ m} \tag{35}$$

Τέλος, η εξίσωση (31) μας δίνει

$$f = \frac{u}{\lambda} = \frac{343}{0.357} = 960.78 \text{ Hz} \tag{36}$$

Ασκηση 6.

(α′) Ο οδηγός του φορτηγού θεωρείται κινούμενος παρατηρητής που πλησιάζει την πηγή και ο ανιχνευτής κίνησης είναι ακίνητη πηγή ηχητικών κυμάτων. Από την εξίσωση Doppler έχουμε

$$f_{driver} = \frac{u + u_0}{u} f = \frac{45 + 343}{343} 0.15 = 0.169 \text{ MHz} \tag{37}$$

(β′) Το φορτηγό ανακλά τα κύματα που λαμβάνει, άρα μπορούμε να το θεωρήσουμε ώς μια δευτερεύουσα πηγή, κινούμενη προς ακίνητο παρατηρητή, με συχνότητα εκπομπής τη συχνότητα που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Άρα

$$f_{motion-detector} = \frac{u}{u - u_s} f_{driver} = \frac{343}{343 - 45} \frac{343 + 45}{343} 0.15 = \frac{388}{298} 0.15 = 0.1953 \text{ MHz} \tag{38}$$

Ασκηση 7.

Η ένταση του ήχου που εκπέμπει ισοτροπικά μια πηγή σε απόσταση r δίνεται ως

$$I = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2} \tag{39}$$

με P_{avg} τη μέση ισχύ της πηγής.

(α′) Αν $r_1 = 10$ m και $r_2 = 5$ m, τότε

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P}{4\pi r_1^2}}{\frac{P}{4\pi r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \tag{40}$$

η οποία δίνει

$$\frac{0.008}{I_2} = \frac{25}{100} \iff I_2 = 0.008 \cdot 4 = 0.032 \text{ W/m}^2 \tag{41}$$

(β′) Η ηχοστάθμη δίνεται από τη σχέση

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_0} \tag{42}$$

με I_0 την ένταση αναφοράς στα 1000 Hz, που είναι 10^{-12} W/m^2. Άρα

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{8 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \log_{10}(8 \cdot 10^9) \tag{43}$$

$$= 10 \log_{10} 8 + 10 \log_{10} 10^9 = 90 + 10 \log_{10} 8 \tag{44}$$

$$= 9.03 + 90 = 99.03 \text{ dB} \tag{45}$$