ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

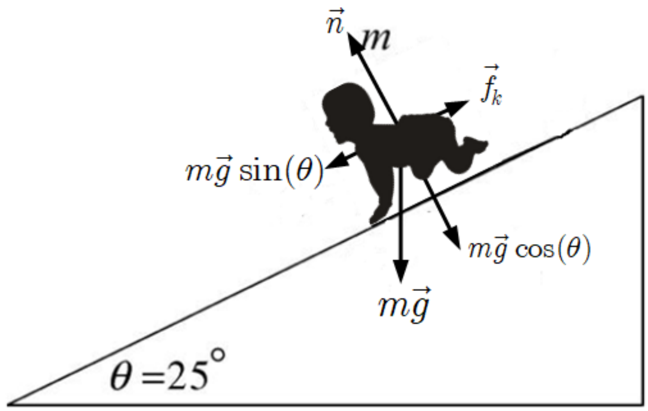
ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1.
Δείτε το Σχήμα 1, όπου φαίνεται ένα στιγμιότυπο της διαδρομής του παιδιού, και οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του. Θεωρούμε θετική φορά της κίνησης προς την κορυφή του κεκλιμένου, παράλληλα στο οποίο τοποθετούμε νοητό άξονα $x'x$. Έτσι η επιτάχυνση θα είναι

$$\vec{a}_x = (-0.86\ \mathrm{m/s^2})\vec{i} \tag{1}$$

Οι συνιστώσες του βάρους, όπως έχουν αναλυθεί στο σχήμα, θα είναι (κατά μέτρο)



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

$$F_{g_x} = F_g \sin(\theta) = 140 \sin(25^\circ) \tag{2}$$
$$F_{g_y} = F_g \cos(\theta) = 140 \cos(25^\circ) \tag{3}$$

(α') Στον άξονα $x'x$, το παιδί επιταχύνεται, άρα ισχύει ο 2ος νόμος του Newton:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Longleftrightarrow \vec{F}_{g_x} + \vec{f}_k = m\vec{a}_x \Longrightarrow -mg\sin(25^\circ) + \mu_k n = ma_x \tag{4}$$

Στον άξονα $y'y$, το παιδί ισορροπεί, άρα ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, δηλ.

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{F}_{g_y} + \vec{n} = \vec{0} \Longrightarrow -mg\cos(25^\circ) + n = 0 \Longleftrightarrow n = mg\cos(25^\circ) \tag{5}$$

Από τις δυο σχέσεις έχουμε

$$-mg\sin(25^\circ) + \mu_k mg\cos(25^\circ) = ma_x \Longleftrightarrow -g\sin(25^\circ) + \mu_k g\cos(25^\circ) = a_x \Longleftrightarrow \mu_k = \frac{a_x + g\sin(25^\circ)}{g\cos(25^\circ)} \tag{6}$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\mu_k = 0.3695 \approx 0.37 \tag{7}$$

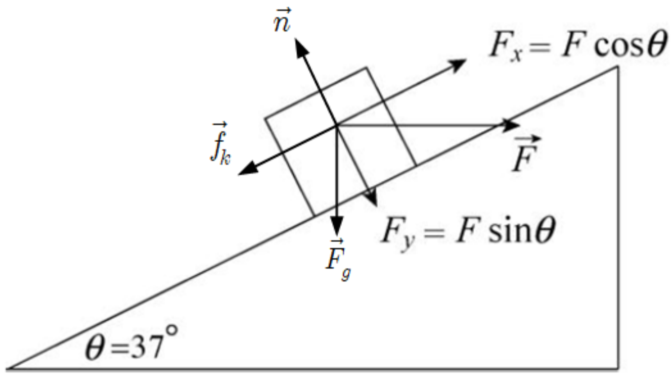
(β') Καταλαβαίνουμε ότι αν η $x-$συνιστώσα του βάρους δεν ήταν αρκετά μεγάλη, δε θα υπερνικούσε τη δύναμη στατικής τριβής, και έτσι το παιδί δε θα γλιστρούσε πάνω στην τσουλήθρα. Για να ολισθήσει λοιπόν θα πρέπει να ισχύει

$$F_{g_x} > f_{s_{max}} \Longleftrightarrow mg\sin(25^\circ) > \mu_s n = \mu_s mg\cos(25^\circ) \Longleftrightarrow \mu_s < \tan(25^\circ) = 0.4663 \approx 0.47 \tag{8}$$

Άρα τα όρια του συντελεστή στατικής τριβής θα είναι

$$0.37 < \mu_s < 0.47 \tag{9}$$

Ασκηση 2.
Δείτε το Σχήμα 2. Τοποθετούμε τους άξονες ως εξής: ο $x'x$ παράλληλος με το κεκλιμένο και ο $y'y$ κάθετος σε αυτό, οπότε ως θετικές φορές της κίνησης θεωρούνται οι συμβατικές (πάνω και προς την κορυφή του κεκλιμένου). Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 2.*

(α') Ισχύει ο 2ος νόμος του Newton στον άξονα $x'x$, δηλ.

$$\sum \vec{Forces}_x = m\vec{a}_x \tag{10}$$
$$\vec{F}_x + \vec{F}_{g_x} + \vec{f}_k = m\vec{a}_x \tag{11}$$
$$F\cos(\theta) - f_k - F_{g_x} = ma_x \tag{12}$$
$$F\cos(\theta) - \mu_k n - mg\sin(\theta) = ma_x \tag{13}$$

Ισχύει ο 1ος νόμος του Newton στον άξονα $y'y$, δηλ.

$$\sum \vec{Forces}_y = \vec{0} \tag{14}$$
$$\vec{F}_y + \vec{n} + \vec{F}_{g_y} = \vec{0} \tag{15}$$
$$-F\sin(\theta) + n - mg\cos(\theta) = 0 \tag{16}$$
$$n = F\sin(\theta) + mg\cos(\theta) \tag{17}$$

Από τις δυο σχέσεις που καταλήξαμε, έχουμε

$$a_x = \frac{F}{m}(\cos(\theta) - \mu_k\sin(\theta)) - g(\sin(\theta) + \mu_k\cos(\theta)) \tag{18}$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε $a_x = -2.064$ m/s^2, με το πρόσημο να δηλώνει ότι η $x-$συνιστώσα της επιτάχυνσης έχει φορά προς τη βάση του κεκλιμένου. Προφανώς δεν υπάρχει επιτάχυνση στον άξονα $y'y$ της κίνησης, άρα

$$\vec{a} = (-2.064 \text{ m/s}^2)\vec{i} \tag{19}$$

(β') Αν η αρχική ταχύτητα του κουτιού είναι 4.0 m/s, τότε από τις εξισώσεις της επιταχυνόμενης κίνησης, έχουμε στη διαδρομή $A \to B$, με A την αρχική και B την τελική θέση, ότι

$$u_B^2 = u_A^2 + 2a\Delta x \tag{20}$$
$$0 = 16 - 2 \cdot 2.064\Delta x \tag{21}$$
$$16 = 4.128\Delta x \tag{22}$$
$$\Delta x = 3.875 \text{ m} \tag{23}$$

(γ') Όταν φτάσει στο ψηλότερο σημείο του κεκλιμένου, θα είναι στιγμιαία ακίνητο. Πρέπει να ελέγξουμε αν η στατική τριβή είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των υπολοίπων δυνάμεων που δρουν στο σώμα στον άξονα $x'x$ της κίνησης. Αν ισχύει αυτό, τότε το σώμα δε θα κινηθεί. Ξέρουμε ότι $\mu_s \geq \mu_k$, οπότε στη χειρότερη περίπτωση $\mu_s = \mu_k = 0.3$, και τότε η μεγαλύτερη τιμή της στατικής τριβής θα είναι

$$f_{s,max} = \mu_s n = \mu_s(F\sin(\theta) + mg\cos(\theta)) = 20.767 \text{ N} \tag{24}$$

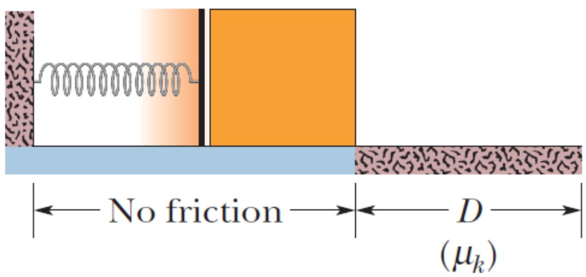
Οι υπόλοιπες δυνάμεις δίνουν

$$F_{rest} = F_x - F_{g_x} = F\cos(\theta) - mg\sin(\theta) = 10.443 \text{ N} \tag{25}$$

Ξεκάθαρα βλέπουμε ότι οι υπόλοιπες δυνάμεις δεν υπερνικούν τη στατική τριβή, οπότε το σώμα θα παραμείνει στην τελική του θέση, σε ηρεμία.

Ασκηση 3.

Έστω το σύστημα {κουτί, επιφάνεια}. Θεωρούμε ως θετικές φορές της κίνησης τις συμβατικές (πάνω και δεξιά).



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 3.*

(α') Στη διαδρομή από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου ως τη θέση όπου το σώμα σταματά, η αύξηση της θερμικής ενέργειας θα είναι

$$\Delta E_{th} = f_k \Delta x = f_k D = \mu_k n D = \mu_k m g D = 66.885 \text{ J} \tag{26}$$

με την τελευταία σχέση να ισχύει λόγω ισορροπίας του συστήματος στον άξονα $y'y$:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0} \Longrightarrow n = F_g = mg \tag{27}$$

(β') Η μέγιστη κινητική ενέργεια που λαμβάνει το κουτί ισούται με την αύξηση της θερμικής ενέργειας του συστήματος, καθώς κατά τη στιγμή της απελευθέρωσης του κουτιού από το ελατήριο, το σύστημα έχει τη μέγιστη κινητική ενέργεια (όλη η αποθηκευμένη ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου έχει μετατραπεί σε κινητική). Όλη αυτή η κινητική ενέργεια μετατράπηκε σε θερμική κατά την ολίσθηση του κουτιού στην επιφάνεια με τριβές. Άρα

$$K_{max} = 66.885 \text{ J} \tag{28}$$

(γ') Έστω A η θέση συμπίεσης του ελατηρίου και B η θέση που το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Λόγω απουσίας τριβών στη διαδρομή αυτή, η κινητική ενέργεια που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα και η οποία αντιστοιχεί στη θέση B, θα ισούται με την ελαστική δυναμική ενέργεια του συστήματος στη θέση A. Άρα

$$U_s^A = K^B = K_{max} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}kx^2 = K^B \Longleftrightarrow x^2 = \frac{2K^B}{k} \Longrightarrow x = -0.457 \text{ m} \tag{29}$$

με το πρόσημο να δηλώνει κατεύθυνση (συμπίεση).

Ασκηση 4.
Η εξωτερική σταθερή δύναμη $\vec{F}$ παράγει έργο στο σύστημα $\{$κύβου, επιφάνειας$\}$ ίσο με

$$W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = F\Delta x = 15 \cdot 3 = 45 \text{ J} \tag{30}$$

Η ενέργεια αυτή, που εισήχθη στο σύστημα μέσω παραγωγής έργου, μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια του συστήματος κατά την ολίσθηση του κύβου στην επιφάνεια. Αφού μας δίνεται ότι

$$\Delta E_{th} = \Delta E_{th}^{cube} + \Delta E_{th}^{floor} \tag{31}$$

τότε

$$\Delta E_{th} = \Delta E_{th}^{cube} + \Delta E_{th}^{floor} \iff 45 = 20 + \Delta E_{th}^{floor} \iff \Delta E_{th}^{floor} = 25 \text{ J} \tag{32}$$

Ασκηση 5.

(α΄) Έστω Α το σημείο ρίψης και Β το σημείο μεγίστου ύψους της βολής. Επειδή η μόνη δύναμη που παράγει έργο στο απομονωμένο σύστημα $\{$βλήμα, Γη$\}$ είναι η δύναμη του βάρους, που είναι και συντηρητική, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ στην παραπάνω διαδρομή. Θεωρούμε οτι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι μηδέν στο επίπεδο ρίψης του βλήματος. Θα είναι

$$K_A + U_A = K_B + U_B \tag{33}$$

$$1550 + 0 = \frac{1}{2}mu_B^2 + mgh \tag{34}$$

$$1550 = 0.275u_B^2 + 754.6 \tag{35}$$

$$u_B^2 = 2.892.363 \Longrightarrow u_B = 53.78 \text{ m/s} \tag{36}$$

Όμως στο σημείο μέγιστου ύψους της βολής, η $y-$συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική. Άρα η τιμή που βρήκαμε μόλις αντιστοιχεί στη $x-$συνιστώσα της ταχύτητας, η οποία δεν αλλάζει καθ' όλη τη διάρκεια της διαδρομής, αφού στον άξονα $x'x$ το βλήμα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Άρα

$$u_{i_x} = 53.78 \text{ m/s} \tag{37}$$

(β΄) Από την δοθείσα αρχική κινητική ενέργεια στο σημείο Α (της ρίψης), θα έχουμε

$$K_A = \frac{1}{2}mu_A^2 = \frac{1}{2}m(u_{A_x}^2 + u_{A_y}^2) = 1550 \text{ J} \tag{38}$$

Λύνοντας ως προς u_{A_y}, παίρνουμε

$$\frac{3100}{0.55} = u_{A_x}^2 + u_{A_y}^2 \Longrightarrow u_{A_y}^2 = 2744.000 \Longrightarrow u_{A_y} = 52.383 \text{ m/s} \tag{39}$$

(γ΄) Έστω Α το σημείο ρίψης και Γ το σημείο που αναφέρεται στο ερώτημα (όπου η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ισούται με -65 m/s). Στον άξονα $y'y$, το βλήμα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση. Από τις εξισώσεις της κινητικής έχουμε

$$u_{\Gamma_y}^2 = u_{A_y}^2 - 2g\Delta y \iff (-65)^2 = 2744 - 19.6(y_\Gamma - y_A) \iff 1481 = -19.6(y_\Gamma - 0) \tag{40}$$

που μας δίνει

$$y_\Gamma = -75.56 \text{ m} \tag{41}$$

Ασκηση 6 - Δύσκολη (bonus 10%).

Έστω το σύστημα $\{$σώμα, επιφάνεια, Γη$\}$, που είναι απομονωμένο και πολυμελές. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΕ στη διαδρομή από την αρχική θέση ως την τελική θέση (που σταματά). Η αρχική και τελική κινητική ενέργεια θα είναι μηδέν, προφανώς. Επίσης είναι εμφανές ότι θα σταματήσει στο επίπεδο κεντρικό τμήμα, αλλά το ερώτημα είναι πόσες φορές θα περάσει από αυτό το τμήμα μέχρι να σταματήσει. Για παράδειγμα, αν σταματήσει την πρώτη φορά που θα περάσει από το κεντρικό τμήμα, τότε η βαρυτική δυναμική ενέργεια που έχει αρχικά, μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια, η οποία θα είναι

$$\Delta E_{th} = f_k d \tag{42}$$

με $d \leq L$ την απόσταση από το αριστερό άκρο του κεντρικού τμήματος, και $f_k = \mu_k mg$, από τον 1ο νόμο του Newton στον άξονα $y'y$ της κίνησης του σώματος στο κεντρικό τμήμα. Αν σταματήσει τη δεύτερη φορά που θα περάσει, η βαρυτική δυναμική ενέργεια που έχει στην αρχική θέση μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια, η οποία θα είναι

$$\Delta E_{th} = f_k(L + d) = \mu_k mg(L + d) \tag{43}$$

Αν γενικεύσουμε για n περάσματα, θα δούμε ότι

$$\Delta E_{th} = f_k((n-1)L + d) = \mu_k mg((n-1)L + d) \tag{44}$$

Από την ΑΔΕ μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης, έχουμε

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta E_{th} = 0 \tag{45}$$
$$K_f - K_i + U_{g_f} - U_{g_i} + \Delta E_{th} = 0 \tag{46}$$
$$0 - 0 + 0 - mgh + \mu_k mg((n-1)L + d) = 0 \tag{47}$$
$$mgh = \mu_k mg((n-1)L + d) \tag{48}$$

Όμως $h = L/2$, οπότε

$$\frac{L}{2} = \mu_k((n-1)L + d) \Longleftrightarrow \frac{d}{L} = 1 + \frac{1}{2\mu_k} - n \Longleftrightarrow \frac{d}{L} = \frac{7}{2} - n \tag{49}$$

Προφανώς ο λόγος $\frac{d}{L}$ πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος με τη μονάδα (σκεφτείτε το σαν το ποσοστό της διαδρομής L που καλύπτει το σώμα μέχρι να σταματήσει). Άρα

$$0 \leq \frac{d}{L} \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{7}{2} - n \leq 1 \Longrightarrow n = 3 \tag{50}$$

Άρα για αυτήν την τιμή του n έχουμε

$$\frac{d}{L} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow d = \frac{L}{2} = 0.2 \text{ m} \tag{51}$$

δηλ. το σώμα σταματά στο 3ο πέρασμα από το κεντρικό τμήμα και σταματά στα 0.2 m από το αριστερό άκρο του κεντρικού τμήματος.