ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1.

(α΄) Ακινητοποίηση του σωματιδίου σημαίνει στιγμιαία ταχύτητα ίση με μηδέν. Άρα

$$u(t) = \frac{d}{dt}x(t) = (4 - 6t^2)' = -12t \tag{1}$$

Προφανώς $u(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0$ s.

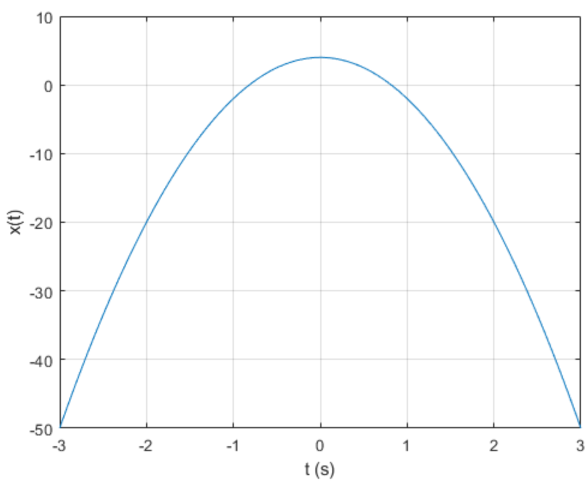
(β΄) Θέση ακινητοποίησης είναι η θέση του σωματιδίου όταν ακινητοποιείται, δηλ. όταν $t = 0$, όπως βρήκαμε πριν. Άρα

$$x(0) = 4 - 6 \cdot 0^2 = 4 \text{ m} \tag{2}$$

(γ΄) Λύνουμε την εξίσωση

$$x(t) = 0 \Longleftrightarrow 4 - 6t^2 = 0 \Longleftrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 0.816 \text{ s} \tag{3}$$

(δ΄) Δείτε το Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1δ.*

Ασκηση 2.

Θα δουλέψουμε στη διαδρομή ΑΒΓ, με Α την αρχική θέση του κόκκινου αυτοκινήτου, Β τη θέση συνάντησης, και Γ την αρχική θέση του πράσινου αυτοκινήτου. Το κοκκινο αυτοκίνητο στις δυο περιπτώσεις που περιγράφονται στην εκφώνηση κινείται ως σώμα υπό σταθερή ταχύτητα σε ευθύγραμμη κίνηση, ίση με $u_{A_1} = 20000/3600 = 50/9$ m/s και $u_{A_2} = 40000/3600 = 100/9$ m/s.

Στη θέση συνάντησης Β, το κόκκινο αυτοκίνητο θα έχει φτάσει σε χρόνο

$$x_{B_1} = x_A + u_{A_1}t_1 \Longleftrightarrow t_1 = \frac{x_{B_1}}{u_{A_1}} = \frac{44.5}{50/9} = 8.01 \text{ s} \tag{4}$$

στην πρώτη περίπτωση, ενώ στη δεύτερη σε χρόνο

$$x_{B_2} = x_A + u_{A_2} t_2 \Longleftrightarrow t_2 = \frac{x_{B_2}}{u_{A_2}} = \frac{76.6}{100/9} = 6.894 \text{ s} \tag{5}$$

Το πράσινο αυτοκίνητο μοντελοποιείται ως σώμα υπό σταθερή επιτάχυνση σε ευθύγραμμη κίνηση. Για τις δυο περιπτώσεις θα έχουμε στη διαδρομή ΓΒ ότι

$$x_{B_1} = x_\Gamma + u_\Gamma t + \frac{1}{2} a_g t_1^2 \tag{6}$$

$$x_{B_2} = x_\Gamma + u_\Gamma t + \frac{1}{2} a_g t_2^2 \tag{7}$$

η οποία γράφεται

$$44.5 = 220 + 8.01 u_\Gamma + \frac{1}{2} a_g \left(8.01\right)^2 \tag{8}$$

$$76.6 = 220 + 6.894 u_\Gamma + \frac{1}{2} a_g \left(6.894\right)^2 \tag{9}$$

δηλ.

$$a_g \left(8.01\right)^2 + 16.02 u_\Gamma + 351 = 0 \tag{10}$$

$$a_g \left(6.894\right)^2 + 13.788 u_\Gamma + 286.8 = 0 \tag{11}$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε

$$a_g = -1.988 \text{ m/s}^2 \tag{12}$$

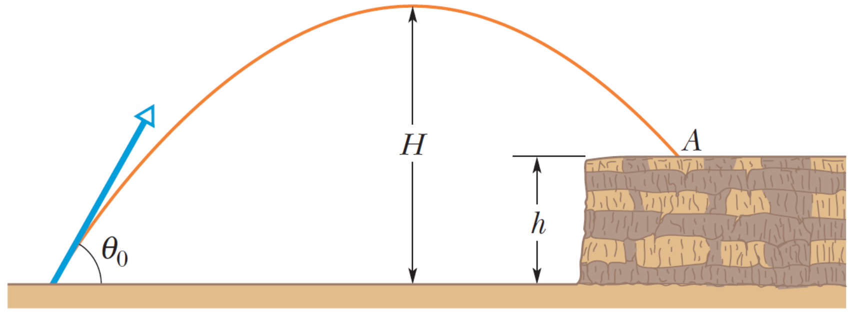
$$u_\Gamma = -13.947 \text{ m/s} \tag{13}$$

Ασκηση 3.
Αναλύοντας την κίνηση, η πέτρα μοντελοποιείται ως σωματίδιο που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα στον οριζόντιο άξονα και ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση στον κατακόρυφο άξονα. Έστω Ο το σημείο που βάλλεται η πέτρα, με συντεταγμένες $O(0,0)$ και $t = 0$ τη στιγμή ακριβώς που ξεκινά τη διαδρομή ΟΑ από το σημείο Ο. Θεωρούμε θετικές φορές της κίνησης στους δυο άξονες τις συμβατικές (πάνω και δεξιά). Μπορούμε να αναλύσουμε την αρχική ταχύτητα $u_i = u_O$ σε συνιστώσες

$$u_{y_O} = u_O \sin(\theta_i) = 42 \sin(60^\circ) = 42 \frac{\sqrt{3}}{2} = 21\sqrt{3} \text{ m/s} \tag{14}$$

$$u_{x_O} = u_O \cos(\theta_i) = 42 \cos(60^\circ) = 42 \frac{1}{2} = 21 \text{ m/s} \tag{15}$$

Ο χρόνος πτήσης της πέτρας είναι $t = 5.5$ s.



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 3.*

(α΄) Η θέση Α του σχήματος έχει συντεταγμένες $(x_A, y_A = h)$. Επειδή η πέτρα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση (της βαρύτητας) στον άξονα $y'y$, θα έχουμε στη διαδρομή ΟΑ ότι

$$y_A = y_O + u_{yO}t - \frac{1}{2}gt^2 \Longleftrightarrow h = 0 + 21\sqrt{3} \cdot 5.5 - 4.9(5.5)^2 = 51.827 \text{ m} \tag{16}$$

(β΄) Στο σημείο Α, η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας είναι ίδια με την οριζόντια συνιστώσα της στο σημείο Ο, λόγω της κίνησης με σταθερή ταχύτητα στον οριζόντιο άξονα. Άρα $u_{x_A} = 21$ m/s. Για την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, γνωρίζουμε τη σχέση

$$u_{y_A} = u_{y_O} - gt \Longleftrightarrow u_{y_A} = 21\sqrt{3} - 9.8(5.5) = -17.527 \text{ m/s} \tag{17}$$

με το αρνητικό πρόσημο να δηλώνει τη φορά του αντίστοιχου διανύσματος (προς τα κάτω). Άρα συνολικά στο σημείο Α θα έχουμε

$$u_A = \sqrt{u_{x_A}^2 + u_{y_A}^2} = 27.353 \text{ m/s} \tag{18}$$

(γ΄) Το μέγιστο ύψος H που φτάνει σε σχέση με το έδαφος μας δίνεται από τη γνωστή σχέση

$$H = \frac{u_O^2 \sin(\theta_i)^2}{2g} = 67.5 \text{ m} \tag{19}$$

Ασκηση 4.

Μοντελοποιούμε την μπάλα του γκολφ ως σωματίδιο που εκτελεί βολή, που σημαίνει ότι στον οριζόντιο άξονα της κίνησης το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα, ενώ στον κατακόρυφο άξονα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση (της βαρύτητας). Από το σχήμα καταλαβαίνουμε ότι η βολή διήρκησε $t = 5$ s, και ότι η ταχύτητα εκτόξευσης και πρόσκρουσης έχει μέτρο $u_b = 31$ m/s. Επίσης, από το σχήμα βλέπουμε ότι στο μέγιστο ύψος, δηλ. στη μέση της διαδρομής ($t = 2.5$), η ταχύτητα έχει μέτρο $u_a = 19$ m/s. Όμως ξέρουμε ότι στο μέγιστο ύψος, η $y-$συνιστώσα της ταχύτητας μηδενίζεται, και άρα η $x-$συνιστώσα της ταχύτητας θα είναι ίση με $u_x = 19$ m/s, στάθερή. Επειδή στο σημείο εκτόξευσης έχουμε

$$u_b = \sqrt{u_{b_x}^2 + u_{b_y}^2} \tag{20}$$

και ξέρουμε ότι $u_{b_x} = u_x = 19$ m/s, θα είναι

$$u_b^2 = u_x^2 + u_{b_y}^2 \Longleftrightarrow 31^2 = 19^2 + u_{b_y}^2 \Longrightarrow u_{b_y}^2 = 600 \Longrightarrow u_{b_y} = 24.495 \text{ m/s} \tag{21}$$

(α΄) Το εύρος της βολής δίνεται ως

$$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g} \tag{22}$$

Ξέρουμε ότι $u_i = u_b = 31$ m/s αλλά δεν ξέρουμε τη γωνία ρίψης. Μπορούμε να τη βρούμε ως

$$\theta_i = \tan^{-1} \frac{u_{b_y}}{u_{b_x}} = \tan^{-1} \frac{24.495}{19} = 52.2^\circ \tag{23}$$

και άρα

$$R = \frac{31^2 \sin(104.4^\circ)}{9.8} = 94.98 \text{ m} \tag{24}$$

(β΄) Το μέγιστο ύψος που λαμβάνει είναι

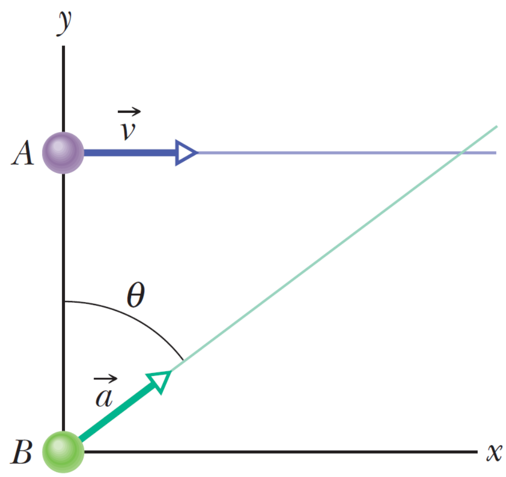
$$h_{max} = \frac{u_i^2 \sin(\theta_i)^2}{2g} = \frac{31^2 \sin(52.2^\circ)^2}{19.6} = 30.6 \text{ m} \tag{25}$$

Ασκηση 5.

Το σωματίδιο Α κινείται κατά μήκος της ευθείας $y = 30$ m με σταθερή ταχύτητα $u_A = 3$ m/s και παράλληλη στον άξονα $x'x$. Άρα θα φτάσει στο σημείο συνάντησης Γ μετά από χρόνο t, δηλ. στη διαδρομή ΑΓ για το σωματίδιο Α θα είναι

$$x_\Gamma = x_A + u_A t = 3t \tag{26}$$

Τη στιγμή που το σωματίδιο Α συναντά τον άξονα $y'y$ (όπως στο Σχήμα 3), θεωρούμε $t = 0$, και το σωματίδιο Β ξεκινά από τη συμβολή των αξόνων με μηδενική αρχική ταχύτητα και σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a = 0.4$ m/s^2.



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 5.*

Το σωματίδιο Β κινείται με σταθερή επιτάχυνση και στους δυο άξονες, $\vec{a}_x$ και $\vec{a}_y$ αντίστοιχα, δηλ.

$$a_y = a\cos(\theta) = 0.4\cos(\theta) \tag{27}$$
$$a_x = a\sin(\theta) = 0.4\sin(\theta) \tag{28}$$

Για το σωματίδιο Β θα έχουμε στη διαδρομή ΒΓ ότι

$$y_\Gamma = y_B + u_{B_y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \iff 30 = 0 + 0t + 0.2\cos(\theta)t^2 \iff t^2 = \frac{150}{\cos(\theta)} \tag{29}$$

και

$$x_\Gamma = x_B + u_{B_x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \iff x_\Gamma = 0 + 0t + 0.2\sin(\theta)t^2 \tag{30}$$

κι από την προηγούμενη σχέση

$$x_\Gamma = 0.2\sin(\theta)\frac{150}{\cos(\theta)} \iff x_\Gamma = 30\tan(\theta) \tag{31}$$

Επειδή το σημείο Γ είναι σημείο συνάντησης, θα ισχύει ισότητα μεταξύ των σχέσεων (26,31), οπότε

$$3t = 30\tan(\theta) \iff t^2 = 100\tan^2(\theta) \iff \frac{150}{\cos(\theta)} = 100\tan^2(\theta) = 100\left(\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right) = 100\left(\frac{1-\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right) \tag{32}$$

που δίνει

$$2\cos^2(\theta) + 3\cos(\theta) - 2 = 0 \tag{33}$$

το οποίο πολυώνυμο έχει ρίζες $x_1 = -2$, $x_2 = 0.5$. Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται αφού $|\cos(\theta)| \leq 1$, και άρα

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \implies \theta = 60^\circ \tag{34}$$