ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1.
Έστω δυο διανύσματα

$$\vec{a} = -2\vec{i} - 6\vec{j} \tag{1}$$
$$\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} \tag{2}$$

(α΄) Είναι

$$\vec{a} = -2\vec{i} - 6\vec{j} \Longrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \tag{3}$$

και

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-6}{-2} - \pi = -1.8925 \text{ rad ή } -108.43 \text{ μοίρες} \tag{4}$$

(β΄) Είναι

$$\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} \Longrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \tag{5}$$

και

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2}{-1} + \pi = 2.034 \text{ rad ή } 116.57 \text{ μοίρες} \tag{6}$$

(γ΄) Έχουμε $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$ και τότε

$$\vec{c} = -3\vec{i} - 4\vec{j} \Longrightarrow |\vec{c}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \tag{7}$$

και

$$\psi = \tan^{-1}\frac{-4}{-3} - \pi = -2.2143 \text{ rad ή } -126.87 \text{ μοίρες} \tag{8}$$

(δ΄) Έχουμε $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{i} + 8\vec{j}$ και τότε

$$\vec{d} = \vec{i} + 8\vec{j} \Longrightarrow |\vec{d}| = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65} \tag{9}$$

και

$$\omega = \tan^{-1}\frac{8}{1} = 1.4464 \text{ rad ή } 82.875 \text{ μοίρες} \tag{10}$$

(ε΄) Το διάνυσμα $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$ είναι το αντίθετο του διανύσματος του προηγ. ερωτήματος, δηλ.

$$\vec{e} = -\vec{d} = -\vec{i} - 8\vec{j} \tag{11}$$

και άρα

$$\vec{e} = -\vec{i} - 8\vec{j} \Longrightarrow |\vec{e}| = |\vec{d}| = \sqrt{65} \tag{12}$$

και

$$\zeta = \tan^{-1}\frac{8}{1} - \pi = -1.6952 \text{ rad ή } -97.125 \text{ μοίρες} \tag{13}$$

(ϛ΄) Τα δυο διανύσματα είναι αντίρροπα, άρα η μεταξύ τους γωνία είναι ίση με 180 μοίρες.

Ασκηση 2.
Το διάνυσμα $\vec{x}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{x} = -\lambda(\vec{i} - \vec{j}), \quad \lambda > 0 \tag{14}$$

Από το μέτρο του έχουμε

$$|\vec{x}| = \sqrt{(-\lambda)^2 + \lambda^2} = 3 \Longleftrightarrow \lambda^2 + \lambda^2 = 9 \Longleftrightarrow 2\lambda^2 = 9 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \tag{15}$$

Άρα

$$\vec{x} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{j} \tag{16}$$

Ασκηση 3.
Γνωρίζουμε ότι

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \tag{17}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \tag{18}$$

(α′) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) \cdot (2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = -5$

(β′) $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) \cdot (-\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}) - (\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) \cdot (3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = -13 - 8 = -21$

(γ′) $(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{c}) = ((\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) \cdot (3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}))((-\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})) = 8(-8) = -64$

Ασκηση 4.
Αφού το διάνυσμα $\vec{c}$ είναι κάθετο στο $\vec{a}$, το εσωτερικό τους γινόμενο θα ισούται με μηδέν, δηλ. αν $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j}$, τότε

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \Longleftrightarrow (c_1\vec{i} + c_2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - \vec{j}) = 2c_1 - c_2 = 0 \Longleftrightarrow c_2 = 2c_1 \tag{19}$$

Επίσης

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 1 \Longleftrightarrow (c_1\vec{i} + c_2\vec{j}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j}) = c_1 + 2c_2 = 1 \Longleftrightarrow c_1 = 1 - 2c_2 \tag{20}$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε

$$\vec{c} = \frac{1}{5}\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j} \tag{21}$$

Άσκηση 5.

(α′)

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}\cos(\ln(x)) = -(\ln(x))'\sin(\ln(x)) = -\frac{1}{x}\sin(\ln(x)) \tag{22}$$

(β′)

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}(2x+1)^{-3} = -3(2x+1)'(2x+1)^{-4} = -6(2x+1)^{-4} \tag{23}$$

(γ′)

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 = 7(5x^3 - x^4)'(5x^3 - x^4)^6 = 7(15x^2 - 4x^3)(5x^3 - x^4)^6 \tag{24}$$

(δ′)

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} = \frac{(x^2-1)'(x^2+2) - (x^2+2)'(x^2-1)}{(x^2+2)^2} \tag{25}$$

$$= \frac{2x(x^2+2) - 2x(x^2-1)}{(x^2+2)^2} = \frac{6x}{(x^2+2)^2} \tag{26}$$

Άσκηση 6.

(α')

$$\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx = \int_1^4 \left(\frac{3}{2}x^{1/2} - 4x^{-2}\right) dx = \int_1^4 \left(\left(x^{3/2}\right)' + 4\left(x^{-1}\right)'\right) dx \tag{27}$$

$$= x^{3/2}\Big|_{x=1}^{x=4} + 4x^{-1}\Big|_{x=1}^{x=4} = 4^{3/2} - 1 + (1-4) \tag{28}$$

$$= \sqrt{64} - 4 = 8 - 4 = 4 \tag{29}$$

(β')

$$\int_0^{\pi/6} (1-\cos(3x))\sin(3x)dx = \int_0^{\pi/6} \sin(3x)dx - \int_0^{\pi/6} \sin(3x)\cos(3x)dx \tag{30}$$

$$= \int_0^{\pi/6} \left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)' dx - \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}\sin(6x)dx \tag{31}$$

$$= \int_0^{\pi/6} \left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)' dx - \int_0^{\pi/6} \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{6}\cos(6x)\right)' dx \tag{32}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/6} + \frac{1}{12}\cos(6x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/6} \tag{33}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(\pi/2) + \frac{1}{3}\cos(0) + \frac{1}{12}\cos(\pi) - \frac{1}{12}\cos(0) \tag{34}$$

$$= 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \tag{35}$$