Φροντιστήριο Φυσικής ΗΥ-112

5ο Φροντιστήριο - Έργο & Ενέργεια
(Θ.Μ.Κ.Ε.Ε. - Α.Δ.Μ.Ε.)

Επιμέλεια:
Σελήσιος Στράτος
selisios@csd.uoc.gr

Ημερομηνία:
6/10/2026

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Τυπολόγιο: Έργο - Ενέργεια

Έργο Σταθερής και Μεταβλητής Δύναμης

Το έργο W μιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$ που προκαλεί μετατόπιση $\Delta\vec{r}$ δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cos\theta \tag{1}$$

Η γενική μορφή του έργου για μια μεταβλητή δύναμη $\vec{F}$ που δρα σε ένα σώμα το οποίο μετατοπίζεται κατά μήκος μιας διαδρομής (από $\vec{r}_i$ έως $\vec{r}_f$) δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2}$$

Αν η κίνηση και η δύναμη περιορίζονται αποκλειστικά σε μια διάσταση (π.χ. στον άξονα x), η σχέση απλοποιείται στο βαθμωτό ολοκλήρωμα:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \tag{3}$$

Ελατήριο και Δύναμη Ελατηρίου

Η δύναμη που ασκεί ένα ιδανικό ελατήριο (Νόμος του Hooke) είναι δύναμη επαναφοράς:

$$\vec{F}_s = -k\vec{x} \tag{4}$$

όπου k η σταθερά του ελατηρίου και x η απομάκρυνση από τη θέση φυσικού μήκους. Η Δυναμική Ενέργεια του συστήματος {σώματος, ελατηρίου} υπολογίζεται ως:

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2 \tag{5}$$

Συντηρητικές και Μη Συντηρητικές Δυνάμεις

- **Συντηρητικές (ή Διατηρητικές) Δυνάμεις:** Το έργο τους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, αλλά μόνο από την αρχική και τελική θέση (π.χ. βάρος, δύναμη ελατηρίου). Το έργο τους σε οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν. Μπορεί να τους αποδοθεί δυναμική ενέργεια U τέτοια ώστε σε ένα πολυμελές σύστημα να ισχύει:
$$\Delta U = -W_{\mathrm{F}_c} \tag{6}$$
- **Μη Συντηρητικές Δυνάμεις:** Το έργο τους εξαρτάται από τη διαδρομή (π.χ. τριβή, αντίσταση αέρα). Προκαλούν μετατροπή της μηχανικής ενέργειας σε άλλες μορφές (π.χ. θερμότητα / εσωτερική ενέργεια).

Απομονωμένο και Μη Απομονωμένο Σύστημα

- **Μη Απομονωμένο Σύστημα:** Αλληλεπιδρά ενεργειακά με το περιβάλλον του. Η μεταβολή της ενέργειας του συστήματος ισούται με το άθροισμα των έργων (ή άλλων μεταφορών ενέργειας) από τις εξωτερικές δυνάμεις:
$$\Delta E_{\mathrm{sys}} = W_{\mathrm{ext}} \tag{7}$$
- **Απομονωμένο Σύστημα:** Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις να παράγουν έργο. Η συνολική ενέργεια διατηρείται. Αν παράγουν έργο μόνο συντηρητικές εσωτερικές δυνάμεις, διατηρείται η Μηχανική Ενέργεια ($E = K + U$):
$$K_i + U_i = K_f + U_f \tag{8}$$

Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου (Θ.Μ.Κ.Ε.Ε.)

Το συνολικό (καθαρό) έργο που παράγεται σε ένα μονομελές σύστημα {σωματίδιο} ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας:

$$\sum W_{ext} = \Delta K = K_f - K_i \quad \text{όπου} \quad K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{9}$$

Άσκηση 1

Αν ένα σώμα κινείται κατά μήκος του άξονα x και του ασκείται δύναμη F η οποία είναι κάθετη στην κίνηση του, τότε πόσο είναι το έργο αυτής της δύναμης; *(Serway, ασκ 7 , σελ 273)*

Λύση:

Το έργο W ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης $\vec{F}$ και της μετατόπισης $\Delta\vec{r}$:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cos\theta \tag{10}$$

Εφόσον η δύναμη $\vec{F}$ είναι κάθετη στην κίνηση (η οποία γίνεται στον άξονα x), η γωνία θ μεταξύ του διανύσματος της δύναμης και της μετατόπισης είναι $90°$. Επειδή $\cos(90°) = 0$, το έργο της δύναμης θα είναι:

$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cdot 0 = 0 \ J \tag{11}$$

Μηδέν. Κάθε δύναμη που είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα ενός σώματος (όπως π.χ. η κεντρομόλος ή η κάθετη αντίδραση του δαπέδου $\vec{n}$ σε οριζόντια κίνηση) δεν παράγει έργο.

Άσκηση 2

(α΄) Βρείτε μία περίπτωση όπου η κινητική ενέργεια είναι: $K > 0$, $K < 0$, $K = 0$.

(β΄) Εξαρτάται η κινητική ενέργεια του συστήματος από το σύστημα αναφοράς στο οποίο μετράμε τις παραμέτρους;

(Serway, ασκ 5 και 9 , σελ 273)

Λύση:

(α΄) Ο τύπος της Κινητικής Ενέργειας είναι $K = \frac{1}{2}mv^2$. Επειδή η μάζα m είναι πάντα θετική και η ταχύτητα υψώνεται στο τετράγωνο ($v^2 \geq 0$), η κινητική ενέργεια είναι ένα βαθμωτό μέγεθος που δεν μπορεί ποτέ να είναι αρνητικό.

- $K > 0$**:** Συμβαίνει σε κάθε περίπτωση που το σώμα κινείται (π.χ. ένα αυτοκίνητο που τρέχει στην εθνική).
- $K < 0$**:** **Αδύνατον**. Δεν υπάρχει περίπτωση να έχουμε αρνητική κινητική ενέργεια.
- $K = 0$**:** Συμβαίνει όταν το σώμα είναι ακίνητο ($v = 0$), π.χ. ένα βιβλίο που ηρεμεί στο τραπέζι.

(β΄) **Όχι**, αν αναφερόμαστε στην απλή επιλογή (ή μετατόπιση) της αρχής των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων.

Έστω ένα σύστημα αναφοράς O όπου η θέση ενός σώματος είναι $\vec{r}$. Αν μετατοπίσουμε την αρχή των αξόνων σε ένα νέο σημείο O' (το οποίο απέχει σταθερή απόσταση $\vec{r}_0$ από το O), η νέα θέση του σώματος θα είναι:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 \tag{12}$$

Η ταχύτητα στο νέο σύστημα προκύπτει από την παράγωγο της θέσης ως προς τον χρόνο. Επειδή το διάνυσμα $\vec{r}_0$ είναι σταθερό, η παράγωγός του είναι μηδέν:

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{d\vec{r}}{dt} - 0 = \vec{v} \tag{13}$$

Βλέπουμε ότι το διάνυσμα της ταχύτητας παραμένει **ακριβώς το ίδιο**. Αφού η κινητική ενέργεια εξαρτάται από το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητας ($K = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$) και το διάνυσμα παραμένει αμετάβλητο, η κινητική ενέργεια **δεν αλλάζει**, ανεξάρτητα από το πού θα τοποθετήσουμε το σύστημα συντεταγμένων μας.

Άσκηση 3

Σε ένα σώμα ασκείται η δύναμη $\vec{F} = (4x)\hat{i} + (3y)\hat{j}$. Το σώμα είναι δεσμευμένο να κινείται κατά μήκος του άξονα $x'x$. Όταν το σώμα έχει κινηθεί 5 m, βρείτε το έργο που έχει παράγει η δύναμη $\vec{F}$ σε αυτή τη διαδρομή. Η F μετριέται σε N και τα x και y σε μέτρα. *(Serway, ασκ 25, σελ 275)*

Λύση:
Η μετατόπιση του σώματος γίνεται αυστηρά κατά μήκος του άξονα x, από $x_i = 0$ έως $x_f = 5$ m. Αφού το σώμα δεν κινείται στον άξονα y, η συντεταγμένη y είναι διαρκώς μηδέν ($y = 0$) και το διαφορικό μετατόπισης είναι $d\vec{r} = dx\hat{i}$. Η δύναμη $\vec{F} = 4x\hat{i} + 3y\hat{j}$ έχει συνιστώσες $F_x = 4x$ και $F_y = 3y$. Το έργο υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^5 (4x\hat{i} + 3y\hat{j}) \cdot (dx\hat{i})$$
$$W = \int_0^5 4x\, dx$$

(Παρατηρήστε ότι η συνιστώσα F_y είναι ούτως ή άλλως μηδέν πάνω στον άξονα x, αλλά ακόμα κι αν δεν ήταν, το έργο της θα ήταν μηδέν αφού δεν υπάρχει μετατόπιση dy).
Ολοκληρώνουμε:

$$W = \left[\frac{4x^2}{2}\right]_0^5 = \left[2x^2\right]_0^5 = 2(5)^2 - 2(0)^2 = 2(25) = 50\ J \tag{14}$$

Άσκηση 4

Να εξηγηθεί το εξής παράδοξο: Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton δράση-αντίδραση, ένα άλογο τραβάει μία άμαξα προς τα εμπρός, όμως και η άμαξα ασκεί αντίθετη δύναμη στο άλογο. Συνεπώς η άμαξα δε μπορεί να κινηθεί. *(Schaum, ασκ 2.84, σελ 59)*

Λύση:
Το «παράδοξο» λύνεται αν κατανοήσουμε πώς εφαρμόζεται ο 3ος και ο 2ος νόμος του Newton. Οι δυνάμεις Δράσης - Αντίδρασης ασκούνται **σε διαφορετικά σώματα** και συνεπώς δεν γίνεται να ακυρωθούν (να προστεθούν αλγεβρικά) στο ίδιο σώμα.

- Για να ελέγξουμε αν θα κινηθεί η άμαξα, μας ενδιαφέρουν αποκλειστικά οι δυνάμεις που ασκούνται **πάνω στην άμαξα**. Η δύναμη που τραβάει το άλογο είναι η μία. Αν αυτή η δύναμη είναι μεγαλύτερη από την τριβή της άμαξας με το έδαφος, η συνισταμένη δύναμη **στην άμαξα** δεν είναι μηδέν και η άμαξα επιταχύνεται προς τα εμπρός (2ος Νόμος). Η δύναμη που ασκεί η άμαξα προς τα πίσω αφορά το άλογο, όχι την άμαξα!
- Αντίστοιχα, πώς κινείται το άλογο προς τα εμπρός; Το άλογο σπρώχνει το έδαφος προς τα πίσω με τις οπλές του (δράση). Το έδαφος σπρώχνει το άλογο προς τα εμπρός (αντίδραση - στατική τριβή). Αν αυτή η δύναμη ώθησης από το έδαφος είναι μεγαλύτερη από το τράβηγμα της άμαξας προς τα πίσω, η συνισταμένη δύναμη **στο άλογο** είναι θετική και το άλογο επιταχύνεται προς τα εμπρός.

Άσκηση 5

1. Με πόση ταχύτητα πρέπει να πετάξουμε μία μπάλα κατακόρυφα ώστε να φτάσει σε μέγιστο ύψος $50m$;

2. Με πόση ταχύτητα πρέπει να πετάξουμε ένα ψυγείο (!) κατακόρυφα προς τα πάνω ώστε να φτάσει σε μέγιστο ύψος $50m$ από το έδαφος; Πόσο διαφέρει η απάντησή σας από το (1) ερώτημα;

Δίνεται $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$. *(Schaum, ασκ 3.52, σελ 80)*

Λύση:
Θα λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.), καθώς δρουν μόνο συντηρητικές δυνάμεις (το βάρος) στο σύστημα {μπάλα ή ψυγείο, Γη}. Θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας ($U = 0$) το έδαφος.

- **Αρχική κατάσταση (i):** Το σώμα βρίσκεται στο έδαφος ($h_i = 0$) και έχει αρχική ταχύτητα v_0. Επομένως

$$U_i = 0$$

και

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$$

- **Τελική κατάσταση (f):** Το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος ($h_f = 50\ \mathrm{m}$), όπου η ταχύτητά του στιγμιαία μηδενίζεται ($v_f = 0$). Επομένως

$$K_f = 0$$

και

$$U_f = mgh_f$$

1. Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε. για την μπάλα στη διαδρομή $i \to f$:

$$\Delta E_{mech}^{i\to f} = 0 \tag{15}$$
$$E_{mech}^{i} = E_{mech}^{f} \tag{16}$$
$$K_i + U_i = K_f + U_f \tag{17}$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgh_f \tag{18}$$
$$\frac{1}{2}v_0^2 = gh_f \quad (\text{η μάζα } m \text{ απλοποιείται}) \tag{19}$$
$$v_0 = \sqrt{2gh_f} \tag{20}$$

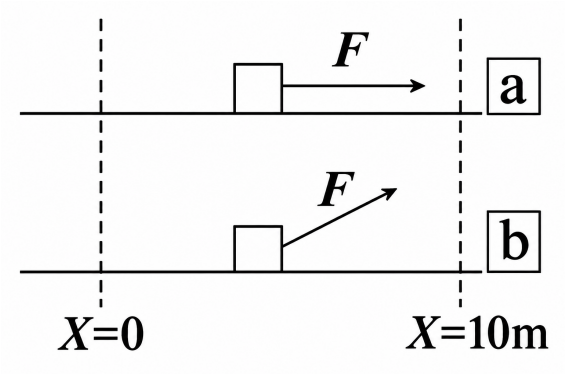
Αντικαθιστούμε τα δεδομένα:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 50} = \sqrt{980} \approx 31.3\ \mathrm{m/s} \tag{21}$$

2. Επειδή η μάζα m του σώματος απλοποιείται στην εξίσωση της Α.Δ.Μ.Ε., η αρχική ταχύτητα που απαιτείται για να φτάσει οποιοδήποτε αντικείμενο σε ένα συγκεκριμένο ύψος είναι **ακριβώς η ίδια**, ανεξάρτητα από τη μάζα του (αγνοώντας την αντίσταση του αέρα). Συνεπώς, το ψυγείο πρέπει να εκτοξευθεί με **ακριβώς την ίδια ταχύτητα** ($\approx 31.3\ \mathrm{m/s}$).

Άσκηση 6

Δύο ολόιδια κιβώτια είναι αρχικά ακίνητα. Ξεκινάει να τους ασκείται η ίδια κατά μέτρο δύναμη, αλλά στην (α) περίπτωση η δύναμη είναι οριζόντια και στη (β) περίπτωση ασκείται υπό γωνία. Ποιό από τα δύο κιβώτια θα φτάσει πιο γρήγορα στα 10 m; Το δάπεδο δεν έχει τριβές.



Λύση:
Ο χρόνος που χρειάζεται για να διανύσουν απόσταση $d = 10m$ ξεκινώντας από την ηρεμία δίνεται από την εξίσωση της κινηματικής:

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Longleftrightarrow d = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Longleftrightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a_x}} \tag{22}$$

Βλέπουμε ότι ο χρόνος t εξαρτάται αντιστρόφως ανάλογα από την οριζόντια επιτάχυνση a_x. Το κιβώτιο με τη μεγαλύτερη οριζόντια επιτάχυνση θα φτάσει πιο γρήγορα.

Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Newton:

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{F_x}{m} \tag{23}$$

- Στην περίπτωση (a) η δύναμη είναι ολόκληρη οριζόντια, άρα: $F_{x,a} = F$.
- Στην περίπτωση (b) η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ, άρα η οριζόντια συνιστώσα της είναι: $F_{x,b} = F\cos\theta$. Επειδή $\cos\theta < 1$, ισχύει

$$F_{x,b} < F_{x,a}$$

Εφόσον $F_{x,a} > F_{x,b}$, συνεπάγεται ότι

$$a_{x,a} > a_{x,b}$$

Αφού η επιτάχυνση στην (α) περίπτωση είναι μεγαλύτερη, το κιβώτιο **(α) θα φτάσει πιο γρήγορα** στα 10 μέτρα.

Σημείωση: Αν υπήρχε τριβή, η κάθετη συνιστώσα της (β) δύναμης θα ελάττωνε την τριβή, οπότε η σύγκριση θα ήταν πιο περίπλοκη, αλλά εδώ το δάπεδο δεν έχει τριβές.

Άσκηση 7

Ένα κιβώτιο μάζας 40 kg, το οποίο είναι αρχικά ακίνητο, ολισθαίνει 5 m πάνω σε ένα τραχύ, οριζόντιο δάπεδο υπό την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης, μέτρου 130 N. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου είναι 0.3. Να βρεθούν:

(α΄) Το έργο που παράγει η ασκούμενη δύναμη.

(β΄) Η αύξηση της εσωτερικής ενέργειας στο σύστημα κιβώτιο-δάπεδο, λόγω τριβής.

(γ΄) Το έργο που παράγει η κάθετη δύναμη.

(δ΄) Το έργο που παράγει η βαρυτική δύναμη.

(ε΄) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κιβωτίου.

(ϛ΄) Το μέτρο της τελικής ταχύτητας του κιβωτίου.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Λύση:

Δεδομένα: $m = 40\ kg$, $d = 5\ m$, $F = 130\ N$, $\mu_k = 0.3$, $v_0 = 0$, $g = 10\ m/s^2$. Η κάθετη δύναμη $\vec{n}$ ισούται με το βάρος (σε οριζόντιο δάπεδο χωρίς άλλες κάθετες δυνάμεις). Από τον 1ο νόμο του Newton και θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \tag{24}$$

$$\vec{F}_g + \vec{n} = \vec{0} \tag{25}$$

$$n - F_g = 0 \tag{26}$$

$$n = mg = 40 \cdot 10 = 400\ N \tag{27}$$

Η δύναμη της κινητικής τριβής είναι: $f_k = \mu_k n = 0.3 \cdot 400 = 120\ N$.

(α΄) Το έργο της σταθερής οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ (ομόρροπη της κίνησης, $\theta = 0^\circ$) είναι:

$$W_F = Fd\cos(0^\circ) = 130 \cdot 5 = 650\ J \tag{28}$$

(β΄) Το έργο της τριβής αντιπροσωπεύει τη μεταφορά ενέργειας σε θερμική ενέργεια (θερμότητα) στο σύστημα {σώμα, δάπεδο}. Η αύξηση της θερμικής ενέργειας ΔE_{int} είναι:

$$\Delta E_{\text{th}} = f_k d = 120 \cdot 5 = 600\ J \tag{29}$$

(Το έργο της τριβής είναι $W_f = -f_k d = -600\ J$, αλλά η ερώτηση ζητά την αύξηση της θερμικής ενέργειας που είναι θετική ποσότητα).

(γ΄) Η κάθετη δύναμη (αντίδραση του δαπέδου) $\vec{n}$ είναι πάντα κάθετη στη μετατόπιση ($\theta = 90^\circ$).

$$W_n = \vec{n} \cdot \vec{d} = nd\cos(90^\circ) = 0\ J \tag{30}$$

(δ΄) Το βάρος $\vec{F}_g$ είναι επίσης κάθετο στη μετατόπιση.

$$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgd\cos(90^\circ) = 0\ J \tag{31}$$

(ε΄) Από το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας Θ.Μ.Κ.Ε. στη ζητούμενη διαδρομή, για το σύστημα {κιβώτιο}, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των έργων των εξωτερικών δυνάμεων (συνολικό έργο):

$$\Delta K = \sum W_{\text{ext}} = W_F + W_f + W_N + W_w = 650 - 600 + 0 + 0 = 50\ J \tag{32}$$

(ϛ′) Γνωρίζουμε ότι $\Delta K = K_f - K_i$. Επειδή ξεκινάει από την ηρεμία ($v_0 = 0$), η αρχική κινητική ενέργεια είναι $K_i = 0$. Επομένως:

$$K_f = 50 \iff 20v_f^2 = 50 \iff v_f = \sqrt{2.5} \approx 1.58 \text{ m/s} \tag{33}$$

Άσκηση 8

Ένα σώμα μάζας 250 g αφήνεται να πέσει πάνω σε ένα κατακόρυφο, αρχικά μη συσπειρωμένο ελατήριο, του οποίου η σταθερά ελατηρίου είναι $k = 2.5\ N/cm$. Το σώμα προσκολλάται στο ελατήριο και το συσπειρώνει κατά 12 cm, μέχρι να σταματήσει στιγμιαία. Κατά τη διάρκεια της συσπείρωσης του ελατηρίου, να υπολογίσετε:

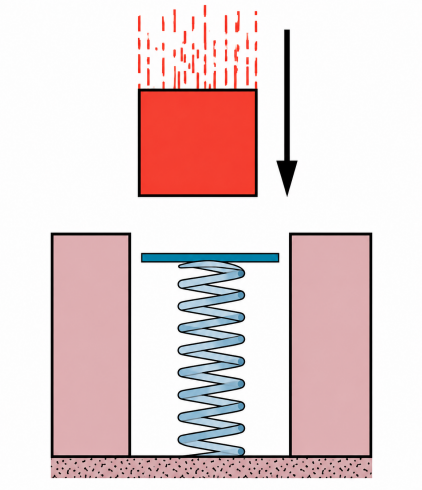
(α′) Το έργο που παράγεται από τη βαρυτική δύναμη που ασκείται στο σώμα.

(β′) Το έργο που παράγεται από τη δύναμη του ελατηρίου.

(γ′) Την ταχύτητα του σώματος ακριβώς πριν από τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο.

(δ′) Αν η ταχύτητα πρόσκρουσης του σώματος στο ελατήριο διπλασιαστεί, ποια θα είναι η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου;

Να θεωρήσετε ότι οι τριβές είναι αμελητέες. Δίνεται $g = 9.8\ \text{m/s}^2$. *(Halliday, άσκ 62, σελ 175)*



Λύση:
Μετατρέπουμε τα δεδομένα στο S.I.: $m = 250\ g = 0.25\ kg$. $k = 2.5\ N/cm = 2.5 \times 100\ N/m = 250\ N/m$. Η μετατόπιση της συσπείρωσης είναι προς τα κάτω: $\Delta y = 12\ cm = 0.12\ m$.

(α′) Το βάρος είναι σταθερή δύναμη και δρα προς τα κάτω, στην ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση της μάζας κατά τη συσπείρωση:

$$W_g = mg\Delta y \cos(0^\circ) = (0.25)(9.8)(0.12) = 0.294\ J \tag{34}$$

(β′) Το έργο του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση

$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Εδώ το ελατήριο είναι αρχικά στο φυσικό του μήκος ($x_i = 0$) και τελικά συμπιέζεται κατά $x_f = 0.12\ m$.

$$W_s = 0 - \frac{1}{2}(250)(0.12)^2 = -125(0.0144) = -1.8\ J \tag{35}$$

(Το έργο είναι αρνητικό διότι η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα πάνω, αντίθετα από τη μετατόπιση προς τα κάτω).

(γ΄) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τη φάση της συσπείρωσης του ελατηρίου θεωρώντας ως σύστημα το {σώμα}. Το σώμα σταματάει στιγμιαία, άρα η τελική κινητική ενέργεια είναι $K_f = 0$. Η κινητική ενέργεια K_i αφορά την ακριβώς τη στιγμή πριν την επαφή.

$$\sum W_{ext} = K_f - K_i \tag{36}$$

$$W_g + W_s = 0 - K_i \tag{37}$$

$$0.294 - 1.8 = -K_i \tag{38}$$

$$K_i = 1.506\ J \tag{39}$$

Από τον τύπο της κινητικής ενέργειας βρίσκουμε την ταχύτητα:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 \Longrightarrow 1.506 = \frac{1}{2}(0.25)v_i^2 \Longrightarrow v_i^2 = \frac{2(1.506)}{0.25} = 12.048 \Longrightarrow v_i \approx 3.47\ \text{m/s} \tag{40}$$

(δ΄) Αν η νέα ταχύτητα είναι $v' = 2v_i$, η νέα κινητική ενέργεια θα τετραπλασιαστεί (αφού η ταχύτητα είναι στο τετράγωνο):

$$K_i' = 4K_i = 4(1.506) = 6.024\ J$$

Εφαρμόζουμε ξανά το Θ.Μ.Κ.Ε. για τη νέα άγνωστη συσπείρωση x':

$$\begin{aligned} W_g' + W_s' &= K_f - K_i' \\ mgx' - \frac{1}{2}k(x')^2 &= 0 - 6.024 \\ (0.25)(9.8)x' - 125(x')^2 &= -6.024 \\ 125(x')^2 - 2.45x' - 6.024 &= 0 \end{aligned}$$

Λύνουμε την εξίσωση 2ου βαθμού:

$$\Delta = (-2.45)^2 - 4(125)(-6.024) = 6.0025 + 3012 = 3018.0025 \Rightarrow \sqrt{\Delta} \approx 54.936$$

Κρατάμε τη θετική ρίζα (αφού μιλάμε για απόσταση συσπείρωσης):

$$x' = \frac{2.45 + 54.936}{2 \cdot 125} = \frac{57.386}{250} \approx 0.2295\ \text{m (ή } 22.95\ \text{cm)} \tag{41}$$

Άσκηση 9

Στο παρακάτω σχήμα, ένα γουρουνάκι, του οποίου τα πόδια είναι λιπασμένα (ώστε να μην υπάρχουν τριβές), έχει τη δυνατότητα να επιλέξει ανάμεσα σε τρεις διαφορετικές διαδρομές-τσουλήθρες, κατά μήκος των οποίων μπορεί να ολισθήσει μέχρι να φτάσει στο έδαφος. Να κατατάξετε τις τρεις διαδρομές με βάση το έργο που παράγει η βαρυτική δύναμη στο γουρουνάκι κατά την κάθοδό του, ξεκινώντας από τη διαδρομή στην οποία παράγεται το μεγαλύτερο έργο. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση:
Το έργο που παράγεται στις 3 διαδρομές **είναι ακριβώς το ίδιο**, οπότε:

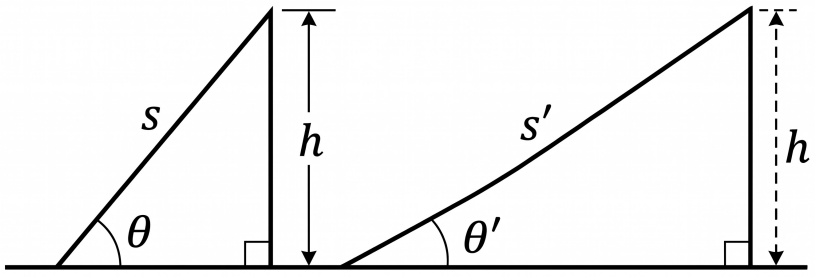
$$W_a = W_b = W_c \tag{42}$$

Αιτιολόγηση: Η βαρυτική δύναμη (το βάρος) είναι μια **Συντηρητική (ή Διατηρητική) δύναμη**. Το θεμελιώδες χαρακτηριστικό των συντηρητικών δυνάμεων είναι ότι το έργο που παράγουν εξαρτάται **αποκλειστικά** από την αρχική και την τελική θέση του σώματος και είναι **πλήρως ανεξάρτητο από τη διαδρομή** που θα ακολουθήσει αυτό. Αφού και στις τρεις περιπτώσεις το γουρουνάκι ξεκινάει από το ίδιο αρχικό ύψος και καταλήγει στο ίδιο τελικό (το έδαφος), η κατακόρυφη μετατόπισή του (h) είναι η ίδια, συνεπώς το παραγόμενο έργο ($W_g = mgh$) είναι ίσο για όλες τις διαδρομές.

Σχόλιο: Γιατί προτιμάμε μικρότερες κλίσεις (Ράμπες); Επιλέγουμε μια μικρότερη κλίση επειδή χρειαζόμαστε μικρότερη δύναμη για να ανεβάσουμε ένα σώμα στο ίδιο ύψος. Ας το δούμε μαθηματικά. Σε ένα κεκλιμένο επίπεδο χωρίς τριβές, η δύναμη που απαιτείται για να κινήσουμε ένα σώμα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του επιπέδου είναι ίση με την παράλληλη συνιστώσα του βάρους:

$$F = mg\sin\theta \tag{43}$$

Όσο μικρότερη είναι η γωνία θ, τόσο μικρότερη είναι η απαιτούμενη δύναμη.



Σχήμα 1: Απότομη κλίση (θ, s) ς Μικρή κλίση (θ', s').

Υπάρχει όμως ένα αντάλλαγμα!

- **Απότομη κλίση:** Μεγαλύτερη δύναμη, μικρότερη διαδρομή (s).
- **Μικρή κλίση:** Μικρότερη δύναμη, μεγαλύτερη διαδρομή (s').

Και εδώ έρχεται το ενδιαφέρον: **Το έργο παραμένει το ίδιο!** Το έργο της δύναμης F κατά μήκος του επιπέδου είναι:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = F\cdot s$$

Από τη γεωμετρία του τριγώνου γνωρίζουμε ότι

$$\sin\theta = \frac{h}{s} \Rightarrow s = \frac{h}{\sin\theta}$$

Αντικαθιστώντας τα F και s:

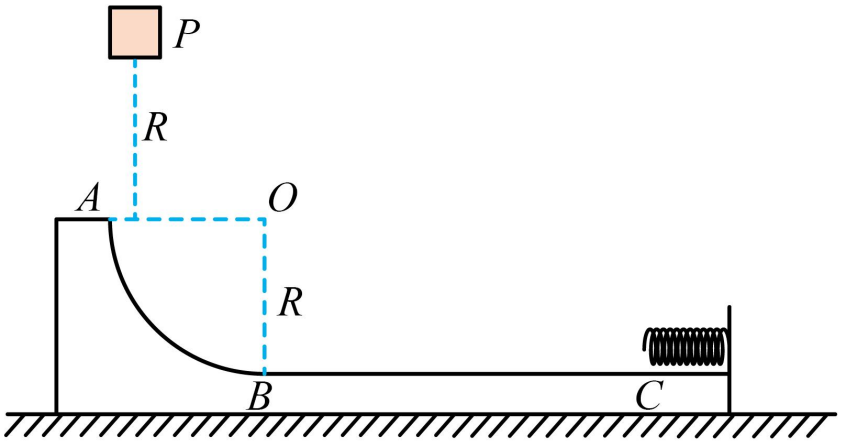
$$W = (mg\sin\theta)\cdot\left(\frac{h}{\sin\theta}\right)$$

$$W = mgh$$

Αυτός είναι ο λόγος που κατασκευάζουμε ράμπες αντί για απότομες ανηφόρες: ανταλλάσσουμε μικρότερη απαιτούμενη δύναμη με μεγαλύτερη απόσταση. Η ενέργεια που απαιτείται παραμένει ίδια (στην ιδανική περίπτωση χωρίς τριβές).

Άσκηση 10

Ένα σώμα Σ μάζας $m = 2\,kg$ αφήνεται ελεύθερο από τη θέση Α, από ύψος $h = 2\,m$, και ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε μια τεταρτοκυκλική τροχιά ακτίνας R. Στη συνέχεια, το σώμα εισέρχεται σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_k = 0.2$. Σε απόσταση $d = 1\,m$ από το σημείο εισόδου στο οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται στερεωμένο ένα οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100\,N/m$. Το ελατήριο αρχικά βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Το σώμα έρχεται σε επαφή με το ελατήριο και το συμπιέζει. Η τριβή συνεχίζει να δρα και στο τμήμα που το σώμα συμπιέζει το ελατήριο. Δίνεται $g = 9.8\,m/s^2$.



Να υπολογίσετε:

(α′) Την ταχύτητα του σώματος Σ ακριβώς πριν έρθει σε επαφή με το ελατήριο.

(β′) Τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου μέχρι να ακινητοποιηθεί το σώμα.

(γ′) Το συνολικό έργο της τριβής από τη στιγμή που το σώμα εισέρχεται στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι την πλήρη ακινητοποίησή του.

Λύση:

(α′) **Ταχύτητα του Σ πριν το ελατήριο:**
Έστω το σύστημα {σώμα, Γη}. Από την αρχική θέση (έστω Α) μέχρι τη βάση της τεταρτοκυκλικής τροχιάς (έστω Β), επειδή δεν υπάρχουν τριβές, και η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η δύναμη του βάρους (συντηρητική), ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.):

$$K_A + U_A = K_B + U_B \tag{44}$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 \tag{45}$$

$$v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9.8\cdot 2} = \sqrt{39.2} \approx 6.26\ m/s \tag{46}$$

Η κινητική ενέργεια στο σημείο Β είναι $K_B = mgh = 2 \cdot 9.8 \cdot 2 = 39.2\ J$.

Στο οριζόντιο τμήμα, από το σημείο Β μέχρι το σημείο επαφής με το ελατήριο (έστω Γ) σε απόσταση $d = 1\ m$, ασκείται στο Σ τριβή ολίσθησης:

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg = 0.2 \cdot 2 \cdot 9.8 = 3.92\ N \tag{47}$$

με $n = F_g = mg$ από τον 1ο νόμο του Newton.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) για τη διαδρομή Β $\to$ Γ για το σύστημα {σώμα}:

$$K_\Gamma - K_B = W_{f_k} \tag{48}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - K_B = -f_k \cdot d \tag{49}$$

$$\frac{1}{2}(2)v_1^2 - 39.2 = -3.92 \cdot 1 \tag{50}$$

$$v_1^2 - 39.2 = -3.92 \Rightarrow v_1^2 = 35.28 \Rightarrow v_1 = \sqrt{35.28} \approx 5.94\ m/s \tag{51}$$

Άρα, η ταχύτητα του Σ ακριβώς πριν την επαφή με το ελατήριο είναι $v_1 \approx 5.94\ m/s$ και η κινητική του ενέργεια εκεί είναι $K_\Gamma = 35.28\ J$.

(β′) **Μέγιστη συσπείρωση ελατηρίου:**
Καθώς το σώμα κινείται για να συσπειρώσει το ελατήριο κατά μέγιστη απόσταση Δx, δέχεται τη δύναμη του ελατηρίου και την τριβή ολίσθησης ($f_k = 3.92\ N$). Στη μέγιστη συσπείρωση, το σώμα σταματάει στιγμιαία, οπότε $K_f = 0$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από το σημείο Γ (επαφή) μέχρι το σημείο μέγιστης συσπείρωσης:

$$K_f - K_\Gamma = W_{\text{ελ}} + W_{T2} \tag{52}$$

$$0 - 35.28 = -\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 - T \cdot \Delta x \tag{53}$$

$$-35.28 = -\frac{1}{2}(100)(\Delta x)^2 - 3.92\Delta x \tag{54}$$

$$-35.28 = -50(\Delta x)^2 - 3.92\Delta x \tag{55}$$

$$50(\Delta x)^2 + 3.92\Delta x - 35.28 = 0 \tag{56}$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$\Delta_{dis} = b^2 - 4ac = (3.92)^2 - 4(50)(-35.28) = 15.3664 + 7056 = 7071.3664 \Rightarrow \sqrt{\Delta_{dis}} \approx 84.09$$

Λύνοντας ως προς Δx (κρατάμε τη θετική ρίζα):

$$\Delta x = \frac{-3.92 + 84.09}{2(50)} = \frac{80.17}{100} \approx 0.80\ m$$

Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι $\Delta x = 0.80\ m$ (ή $80\ cm$).

(γ′) **Συνολικό έργο της τριβής:**
Το σώμα κινείται συνολικά υπό την επίδραση της τριβής για απόσταση $s_{\text{ολ}} = d + \Delta x = 1 + 0.80 = 1.80\ m$. Το συνολικό έργο της τριβής σε όλη την οριζόντια διαδρομή είναι:

$$W_{T,\text{ολ}} = -f_k \cdot s_{\text{ολ}} = -3.92 \cdot 1.80 \approx -7.06\ J$$

(Εναλλακτικά, από Α.Δ.Ε. για όλο το σύστημα: Η αρχική μηχανική ενέργεια $E_{\alpha\rho\chi} = mgh = 39.2\ J$ μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια ελατηρίου $U_{\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}(100)(0.80)^2 = 32\ J$ και σε θερμότητα μέσω του έργου της τριβής. Άρα $|W_{T,\text{ολ}}| = 39.2 - 32 = 7.2\ J$. Η μικρή διαφορά (7.06 έναντι 7.2) οφείλεται στις στρογγυλοποιήσεις του Δx).