Φροντιστήριο Φυσικής ΗΥ-112

4ο Φροντιστήριο - Νόμοι του Newton
(2ος Νόμος, Δυνάμεις, Τριβή)

Επιμέλεια:
Σελήσιος Στράτος
selisios@csd.uoc.gr

Ημερομηνία:
23/10/2026

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Τυπολόγιο: Δυναμική και Νόμοι του Newton

2ος Νόμος του Newton (Θεμελιώδης Νόμος της Δυναμικής)

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) ενός σώματος είναι ανάλογος της συνισταμένης δύναμης που του ασκείται και αντιστρόφως ανάλογος της μάζας του:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

Σε επίπεδο συνιστωσών (π.χ. στο καρτεσιανό σύστημα $x - y$):

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x$$
$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

Βάρος

Το βάρος $\vec{F}_g$ (ή $\vec{B}$ ή $\vec{w}$) είναι η βαρυτική δύναμη που ασκεί η Γη σε ένα σώμα μάζας m:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \tag{2}$$

όπου $\vec{g} = -9.8\vec{j}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας (με φορά πάντα προς το κέντρο της Γης).

Νόμοι της Τριβής

Η δύναμη της τριβής αντιστέκεται στη σχετική κίνηση μεταξύ δύο επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή. Εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών και την κάθετη δύναμη $\vec{n}$ (ή $\vec{F}_N$ ή $\vec{N}$).

- **Στατική Τριβή (f_s):** Εμφανίζεται όταν το σώμα τείνει να κινηθεί αλλά παραμένει ακίνητο. Προσαρμόζεται ώστε να εξισορροπεί τις εξωτερικές δυνάμεις, μέχρι μια μέγιστη τιμή:

  $$f_s \leq f_{s,\max} \quad \text{όπου} \quad f_{s,\max} = \mu_s n \tag{3}$$

  (μ_s: συντελεστής στατικής τριβής)

- **Κινητική Τριβή (f_k):** Εμφανίζεται όταν το σώμα ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια. Το μέτρο της θεωρείται πρακτικά σταθερό:

  $$f_k = \mu_k n \tag{4}$$

  (μ_k: συντελεστής κινητικής τριβής, συνήθως $\mu_k < \mu_s$)

Άσκηση 1

Ένα σώμα μάζας $m = 3$ kg έχει επιτάχυνση που δίνεται απ' τη σχέση:

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} \quad (\mathrm{m/s^2}) \tag{5}$$

Να υπολογιστούν:

(α΄) Η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ που δρα στο σώμα.

(β΄) Το μέτρο της $\vec{F}$.

(Serway, άσκ. 1, σελ. 197 , Schaum, άσκ. 3.1-3.2, σελ. 65)

Λύση:

(α΄) Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Newton, η συνισταμένη δύναμη ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{6}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές που δίνονται:

$$\vec{F} = 3 \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j}) \tag{7}$$

$$\vec{F} = 6\hat{i} + 15\hat{j} \quad (\mathrm{N}) \tag{8}$$

(β΄) Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης υπολογίζεται από τις συνιστώσες της ($F_x = 6N, F_y = 15N$):

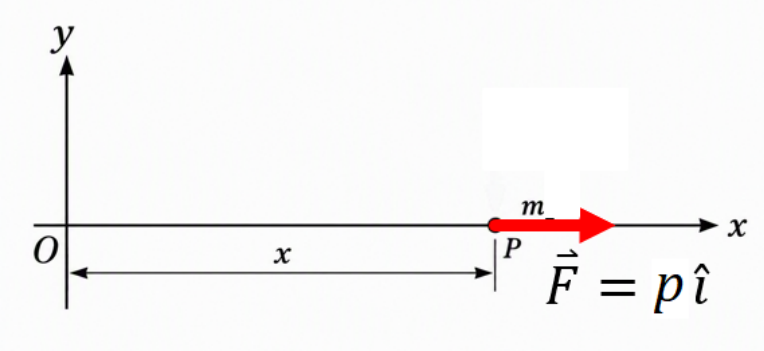
$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{6^2 + 15^2} = \sqrt{36 + 225} = \sqrt{261} \approx 16.15 \text{ N} \tag{9}$$

Άσκηση 2

Ένα σωματίδιο με μάζα m κινείται κατά μήκος του άξονα x, υπό την επίδραση μιας σταθερής δύναμης $\vec{F} = p\hat{i}$ με p θετική σταθερά. Αν η αρχική του ταχύτητα είναι $\vec{u}_0$, και η αρχική του θέση x_0 βρείτε:

(α΄) Το διάνυσμα της ταχύτητάς του.

(β΄) Το διάνυσμα της θέσης του.



Λύση:

(α′) Αφού η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή, από τον 2ο Νόμο του Newton προκύπτει ότι και η επιτάχυνση $\vec{a}$ θα είναι σταθερή:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{p}{m}\hat{i} \tag{10}$$

Εφόσον η επιτάχυνση είναι σταθερή, το σωματίδιο εκτελεί Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση. Το διάνυσμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο t δίνεται από:

$$\vec{v}(t) = \vec{u}_0 + \vec{a}t \tag{11}$$

Δεδομένου ότι το σωματίδιο κινείται στον άξονα x, $\vec{u}_0 = u_0\hat{i}$, άρα:

$$\vec{v}(t) = u_0\hat{i} + \left(\frac{p}{m}\right)t\hat{i} = \left(u_0 + \frac{p}{m}t\right)\hat{i} \tag{12}$$

(β′) Αντίστοιχα, το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ (ή απλώς $x(t)\hat{i}$ λόγω 1Δ κίνησης) για σταθερή επιτάχυνση δίνεται από την εξίσωση της κινηματικής:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{u}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{13}$$

Αντικαθιστώντας $\vec{r}_0 = x_0\hat{i}$ και την επιτάχυνση που βρήκαμε, παίρνουμε:

$$\vec{r}(t) = x_0\hat{i} + u_0 t\hat{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{m}\right)t^2\hat{i} = \left(x_0 + u_0 t + \frac{p}{2m}t^2\right)\hat{i} \tag{14}$$

Άσκηση 3

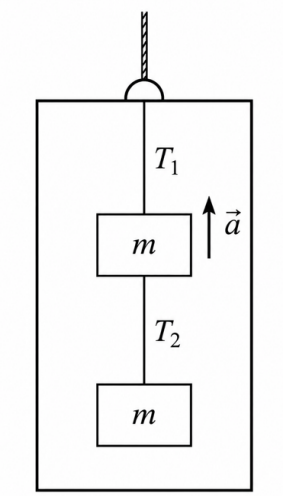
Δύο κύβοι ίδιας μάζας (m) κρέμονται από την οροφή ενός ασανσέρ. Το ασανσέρ έχει επιτάχυνση $(\vec{\alpha})$ προς τα πάνω. Τα νήματα έχουν αμελητέα μάζα.

(α′) Βρείτε τις τάσεις (T_1) και (T_2) στο πάνω και στο κάτω νήμα αντίστοιχα, ως συνάρτηση των (m), (α) και (g).

(β′) Συγκρίνετε τις δύο τάσεις και προσδιορίστε ποιο νήμα θα σπάσει πρώτο, αν η επιτάχυνση (α) αυξηθεί αρκετά.

(γ′) Ποιες θα είναι οι τάσεις αν το συρματόσκοινο που συγκρατεί το ασανσέρ σπάσει;

(Serway, άσκ. 32, σελ. 201)



Λύση:

(α′) Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Newton ($\sum F = m\alpha$) για κάθε κύβο ξεχωριστά. Η κίνηση είναι κατακόρυφη σε νοητό άξονα $y'y$. Θεωρούμε τη φορά προς τα πάνω (φορά της επιτάχυνσης) ως θετική.

Για τον κάτω κύβο (μάζας m): Δέχεται την τάση T_2 προς τα πάνω και το βάρος του mg προς τα κάτω.

$$\sum \vec{F}_{\text{κατω κϋβου}} = m\vec{\alpha} \Longleftrightarrow \vec{T}_2 + \vec{F}_g = m\vec{\alpha} \tag{15}$$

και πετώντας τα διανύσματα και περνώντας σε αλγεβρικές εξισώσεις,

$$T_2 - mg = m\alpha \Longrightarrow T_2 = m(g+\alpha) \tag{16}$$

Για τον πάνω κύβο (μάζας m): Δέχεται την τάση T_1 προς τα πάνω, το βάρος του mg προς τα κάτω, και την τάση T_2 (από το κάτω νήμα) προς τα κάτω.

$$\sum \vec{F}_{\text{πάνω κύβου}} = m\vec{\alpha} \tag{17}$$

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_g = m\vec{\alpha} \tag{18}$$

και όμοια με πριν

$$T_1 - T_2 - mg = m\alpha \tag{19}$$

$$T_1 = T_2 + m(g+\alpha) \tag{20}$$

Αντικαθιστώντας το T_2:

$$T_1 = m(g+\alpha) + m(g+\alpha) = 2m(g+\alpha) \tag{21}$$

(β′) Συγκρίνοντας τις σχέσεις:

$$T_1 = 2m(g+\alpha) \quad \text{και} \quad T_2 = m(g+\alpha)$$

Παρατηρούμε ότι $T_1 = 2T_2$. Συνεπώς, η τάση στο πάνω νήμα είναι **διπλάσια** από την τάση στο κάτω νήμα. Αν η επιτάχυνση α αυξηθεί υπερβολικά, το **πάνω νήμα (T_1) θα σπάσει πρώτο**.

(γ′) Αν το συρματόσκοινο του ασανσέρ σπάσει, το ασανσέρ (και τα σώματα μέσα σε αυτό) θα εκτελέσουν ελεύθερη πτώση. Σε αυτή την περίπτωση, η επιτάχυνση του συστήματος θα είναι $\alpha = -g$ (επιτάχυνση ίση με της βαρύτητας προς τα κάτω). Αντικαθιστώντας $\alpha = -g$ στους τύπους των τάσεων:

$$T_2 = m(g + (-g)) = m(0) = 0$$
$$T_1 = 2m(g + (-g)) = 2m(0) = 0$$

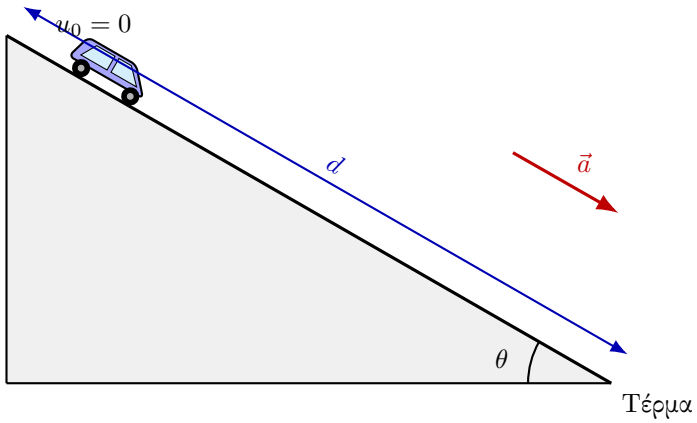
Οι τάσεις και στα δύο νήματα **μηδενίζονται** (κατάσταση έλλειψης βάρους / weightlessness).

Άσκηση 4

Ένα αυτοκίνητο μάζας m αφήνεται να κινηθεί χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ.

(α′) Να βρεθεί η επιτάχυνση $\vec{a}$ του αυτοκινήτου.

(β′) Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου που απέχει απόσταση d από το τέρμα του, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα και πόση ταχύτητα θα έχει όταν φτάσει εκεί;



Λύση:

(α′) Επιλέγουμε σύστημα αξόνων όπου ο άξονας x είναι παράλληλος στο κεκλιμένο επίπεδο (με θετική φορά προς τα κάτω) και ο άξονας y είναι κάθετος σε αυτό. Αναλύουμε το βάρος $\vec{F}_g = m\vec{g}$ στις δύο συνιστώσες του:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_{g_x} + \vec{F}_{g_y} \tag{22}$$
$$= F_{g_x}\vec{i} + F_{g_y}\vec{j} \tag{23}$$

με

$$F_{g_x} = mg\sin\theta \quad \text{(παράλληλη στο κεκλιμένο)} \tag{24}$$
$$F_{g_y} = mg\cos\theta \quad \text{(κάθετη στο κεκλιμένο)} \tag{25}$$

Δεν υπάρχουν τριβές, άρα η μόνη δύναμη κατά τον άξονα της κίνησης ($x'x$) είναι η $\vec{F}_{g_x}$. Υποθέτοντας θετική φορά προς τη φορά της κίνησης (κάτω), εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Newton:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \tag{26}$$
$$\vec{F}_{g_x} = m\vec{a}_x \tag{27}$$
$$F_{g_x} = ma_x \tag{28}$$
$$mg\sin\theta = ma_x \tag{29}$$
$$a = g\sin\theta \tag{30}$$

δηλ.

$$\vec{a} = g\sin\theta\vec{i} \tag{31}$$

(β′) Έστω η διαδρομή $A \to B$, μήκους d. Το αυτοκίνητο εκτελεί Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα ($u_{x_A} = 0$). Η απόσταση που διανύει δίνεται από:

$$x_B = x_A + u_{x_A}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \iff d = 0 + 0t + \frac{1}{2}at^2 \tag{32}$$

Λύνουμε ως προς τον χρόνο t:

$$t^2 = \frac{2d}{a} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}} \tag{33}$$

Η ταχύτητα στο τέρμα του κεκλιμένου επιπέδου θα είναι τότε:

$$u = at = (g\sin\theta)\sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}} = \sqrt{\frac{(g\sin\theta)^2 \cdot 2d}{g\sin\theta}} = \sqrt{2gd\sin\theta} \tag{34}$$

(Εναλλακτικά, η ταχύτητα υπολογίζεται άμεσα από τη σχέση $v^2 = u_0^2 + 2ad \Rightarrow v = \sqrt{2ad}$).

Άσκηση 5

Βρείτε τη σταθερή δύναμη που απαιτείται για να επιταχύνει σώμα μάζας $m = 40kg$, από την ταχύτητα $\vec{v}_{in} = 4\hat{i} - 5\hat{j}$ m/s, στην ταχύτητα $\vec{v}_f = 8\hat{i} + 3\hat{j}$ m/s, μέσα σε 20 s. Ποιό είναι το μέτρο αυτής της δύναμης;

Λύση:
Βρίσκουμε πρώτα τη σταθερή επιτάχυνση του σώματος από τον ορισμό:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_{in}}{\Delta t} \tag{35}$$

$$\vec{a} = \frac{(8\hat{i} + 3\hat{j}) - (4\hat{i} - 5\hat{j})}{20} \tag{36}$$

$$\vec{a} = \frac{(8-4)\hat{i} + (3-(-5))\hat{j}}{20} \tag{37}$$

$$\vec{a} = \frac{4\hat{i} + 8\hat{j}}{20} = \frac{4}{20}\hat{i} + \frac{8}{20}\hat{j} = 0.2\hat{i} + 0.4\hat{j} \quad (m/s^2) \tag{38}$$

Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Newton, η δύναμη είναι:

$$\vec{F} = m\vec{a} = 40 \cdot (0.2\hat{i} + 0.4\hat{j}) \tag{39}$$

$$\vec{F} = 8\hat{i} + 16\hat{j} \quad (N) \tag{40}$$

Το μέτρο αυτής της δύναμης είναι:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = \sqrt{64 + 256} = \sqrt{320} \approx 17.89N \tag{41}$$

Άσκηση 6

Αν ένα αντικείμενο που ξεκινά με ταχύτητα u_0 πάνω σε μια παγωμένη οριζόντια επιφάνεια χρειάζεται χρόνο τ για να ηρεμήσει, δείξτε ότι ο συντελεστής τριβής είναι $\mu = \frac{u_0}{g\tau}$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

(Schaum, άσκ. 3.52, σελ. 80)

Λύση:
Το αντικείμενο εκτελεί Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση μέχρι να σταματήσει (τελική ταχύτητα $v = 0$). Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της ταχύτητας, μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνση (επιβράδυνση) a:

$$v = u_0 + at \Rightarrow 0 = u_0 + a\tau \Rightarrow a = -\frac{u_0}{\tau} \tag{42}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η επιτάχυνση είναι αντίρροπη της κίνησης. Το μέτρο της είναι $|\vec{a}| = \frac{u_0}{\tau}$. Η μοναδική δύναμη που δρα στον οριζόντιο άξονα (άξονας κίνησης) και προκαλεί αυτή την επιβράδυνση είναι η κινητική τριβή $\vec{f}_k$. Η κάθετη δύναμη $\vec{n}$ εξισορροπεί το βάρος ($n = mg$), αφο′ από τον 1ο Νόμο του Newton παίρνουμε:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0} \tag{43}$$

και θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω,

$$n - F_g = 0 \Longleftrightarrow n = F_g \tag{44}$$

και άρα

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg \tag{45}$$

Από τον 2ο Νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης έχουμε:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{46}$$

$$\vec{f_k} = m\vec{a} \tag{47}$$

$$-f_k = m\left(-\frac{u_0}{\tau}\right) \tag{48}$$

$$\mu_k mg = m\frac{u_0}{\tau} \tag{49}$$

Απλοποιώντας τη μάζα m και λύνοντας ως προς μ_k:

$$\mu_k g = \frac{u_0}{\tau} \Rightarrow \mu_k = \frac{u_0}{g\tau} \tag{50}$$

Άσκηση 7

Μια μάζα m ηρεμεί πάνω σ' ένα οριζόντιο κομμάτι ξύλου. Το ξύλο ανασηκώνεται από τη μία πλευρά προς τα πάνω με το ένα άκρο του σταθερό ώσπου η μάζα m αρχίζει να γλιστρά. Αν η γωνία που σχηματίζει το ξύλο με το οριζόντιο επίπεδο είναι θ, δείξτε ότι ο συντελεστής τριβής είναι $\mu_s = \tan(\theta)$.

(Schaum, άσκ. 3.54, σελ. 80)

Λύση:
Τη στιγμή ακριβώς που η μάζα m είναι έτοιμη να γλιστρήσει (οριακή ισορροπία), η στατική τριβή έχει λάβει τη μέγιστη δυνατή τιμή της: $f_s = f_{s,\max} = \mu_s n$ (όπου μ_s ο συντελεστής στατικής τριβής). Στο σύστημα αξόνων με τον x παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και τον y κάθετο σε αυτό, οι δυνάμεις είναι:

- **Άξονας y:** Η κάθετη δύναμη $\vec{n}$ και η συνιστώσα του βάρους $\vec{F}_{g_y} = (mg\cos\theta)\vec{j}$. Εφόσον δεν υπάρχει κίνηση στον άξονα y:
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow n - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow n = mg\cos\theta \tag{51}$$

- **Άξονας x:** Η συνιστώσα του βάρους $\vec{F}_{g_x} = (mg\sin\theta)\vec{i}$ τείνει να κατεβάσει το σώμα, ενώ η μέγιστη στατική τριβή $f_{s,\max}$ αντιστέκεται. Στην οριακή ισορροπία ισχύει:
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow mg\sin\theta - f_{s,\max} = 0 \Rightarrow f_{s,\max} = mg\sin\theta \tag{52}$$

Αντικαθιστούμε τον τύπο της μέγιστης στατικής τριβής ($f_{s,\max} = \mu_s n$) στη δεύτερη εξίσωση:

$$\mu_s n = mg\sin\theta \tag{53}$$

$$\mu_s(mg\cos\theta) = mg\sin\theta \tag{54}$$

Απλοποιούμε το mg και διαιρούμε με $\cos\theta$:

$$\mu_s\cos\theta = \sin\theta \Longrightarrow \mu_s = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Longrightarrow \mu_s = \tan\theta \tag{55}$$

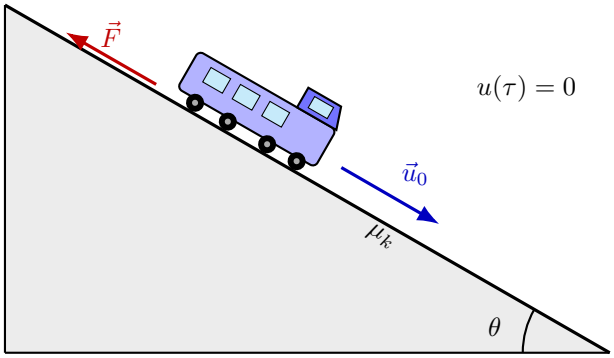
Αυτή η γωνία θ αναφέρεται συχνά και ως *γωνία τριβής*.

Άσκηση 8

Ένα τρένο μάζας m κινείται προς τα κάτω, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ και με συντελεστή τριβής μ_k, με αρχική ταχύτητα u_0. Δείξτε ότι η δύναμη που χρειάζεται για να σταματήσει το τρένο σε χρόνο τ είναι:

$$F = mg(\sin\theta - \mu_k \cos\theta) + \frac{mu_0}{\tau} \tag{56}$$

(Σημείωση: Στο πρωτότυπο κείμενο της άσκησης υπάρχει ένα τυπογραφικό λάθος, καθώς αναγράφεται + αντί για γινόμενο μετά το mg. Εδώ δίνεται η διαστατικά σωστή μορφή).
(Schaum, άσκ. 3.62, σελ. 81)



Λύση:
Επιλέγουμε άξονα x παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο με θετική φορά **προς τα πάνω** (τη φορά της επιτάχυνσης/δύναμης που θα το σταματήσει) και άξονα y κάθετο σε αυτό. Το τρένο κινείται προς τα κάτω, άρα η τριβή ολίσθησης έχει φορά προς τα πάνω (αντίθετη της κίνησης). Η δύναμη πέδησης F (το φρενάρισμα) που ψάχνουμε πρέπει επίσης να έχει φορά προς τα πάνω για να το επιβραδύνει.

- **Άξονας y:** Η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν, άρα:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_{g_y} = \vec{0} \tag{57}$$

και περνώντας σε αλγεβρικές εξισώσεις,

$$n - F_{g_y} = 0 \Longleftrightarrow n - mg\cos\theta = 0 \Longleftrightarrow n = mg\cos\theta \tag{58}$$

Η δύναμη της τριβής είναι $f_k = \mu_k n = \mu_k mg\cos\theta$.

- **Κινηματική:** Το τρένο πρέπει να σταματήσει (τελική ταχύτητα $v = 0$) σε χρόνο τ. Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε την επιτάχυνση (η οποία έχει φορά προς τα πάνω):

$$v = u_0 - a\tau \Longrightarrow 0 = u_0 - a\tau \Longrightarrow a = \frac{u_0}{\tau} \tag{59}$$

- **Άξονας x:** Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Newton με θετική φορά προς τα πάνω. Οι δυνάμεις είναι η F (θετική), η τριβή f_k (θετική) και η συνιστώσα του βάρους $F_{g_x} = mg\sin\theta$ (αρνητική).

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \tag{60}$$

$$\vec{F} + \vec{f}_k - \vec{F}_{g_x} = m\vec{a}_x \tag{61}$$

$$F + f_k - F_{g_x} = ma_x \tag{62}$$

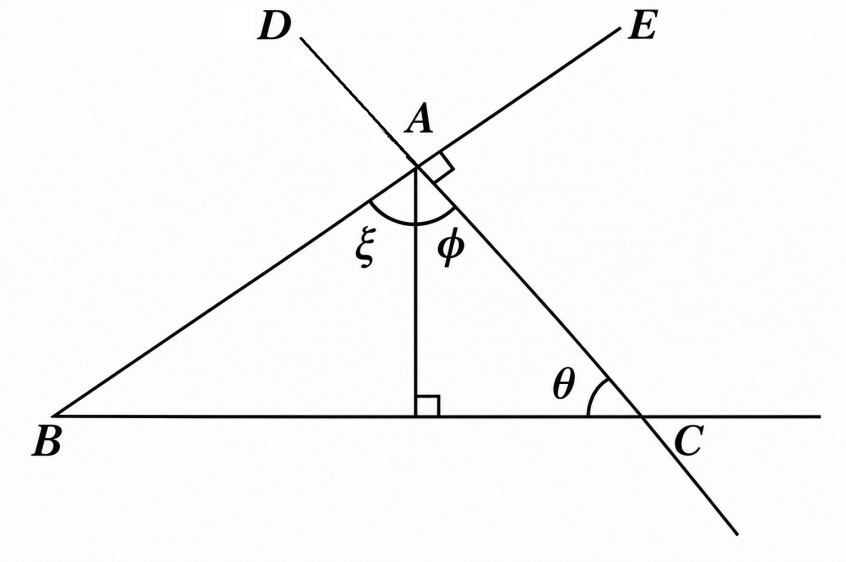
$$F + \mu_k mg\cos\theta - mg\sin\theta = m\left(\frac{u_0}{\tau}\right) \tag{63}$$

$$F = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta + \frac{mu_0}{\tau} \tag{64}$$

$$F = mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) + \frac{mu_0}{\tau} \tag{65}$$

Παράρτημα: Γεωμετρική Απόδειξη Γωνίας στην Ανάλυση Βάρους

Στις ασκήσεις του κεκλιμένου επιπέδου, αναλύουμε το βάρος κάνοντας χρήση της γωνίας θ. Παρακάτω αποδεικνύεται γεωμετρικά γιατί η γωνία ξ μεταξύ του βάρους και του κάθετου άξονα ταυτίζεται με την κλίση θ του επιπέδου.



Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των γωνιών ενός τριγώνου είναι $180°$. Επομένως, στο μικρό ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi + \theta + 90° &= 180° \\ \phi &= 90° - \theta \end{aligned} \qquad \text{(Σχέση 1)}$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι η μεγάλη γωνία πάνω στην ευθεία (πλήρης ευθεία γωνία) ισούται με $180°$. Αθροίζοντας τις γωνίες γύρω από την κορυφή, προκύπτει:

$$90° + \phi + \xi = 180° \qquad \text{(Σχέση 2)}$$

Αντικαθιστούμε τη (Σχέση 1) στη (Σχέση 2) και κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} 90° + (90° - \theta) + \xi &= 180° \\ 180° - \theta + \xi &= 180° \\ -\theta + \xi &= 0 \\ \xi &= \theta \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\xi = \theta$, δικαιολογώντας έτσι τη χρήση της θ κατά την ανάλυση του βάρους σε συνιστώσες (π.χ. $w_y = mg\cos\theta$ και $w_x = mg\sin\theta$).