

Φροντιστήριο Φυσικής ΗΥ-112

3ο Φροντιστήριο - Κινήσεις στο Επίπεδο (Κίνηση σε 2 διαστάσεις, Βολές)

Επιμέλεια:

Σελήσιος Στράτος
selisios@csd.uoc.gr

Ημερομηνία:

16/10/2026

Τυπολόγιο

Αρχή Ανεξαρτησίας των Κινήσεων

Όταν ένα κινητό εκτελεί ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες κινήσεις σε διαφορετικές διευθύνσεις (π.χ. στον άξονα ξ και στον άξονα ψ), η κάθε κίνηση εξελίσσεται **ανεξάρτητα** από την άλλη, σαν η άλλη να μην υπήρχε. Ο χρόνος t είναι η κοινή μεταβλητή που συνδέει τις ανεξάρτητες κινήσεις.

Για το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, της ταχύτητας $\vec{v}$ και της επιτάχυνσης $\vec{a}$ έχουμε:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} \quad , \quad \text{όπου } v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} \quad , \quad \text{όπου } a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Οριζόντια και Πλάγια Βολή

Στη βολή σωμάτων κοντά στην επιφάνεια της Γης (χωρίς αντίσταση αέρα), η επιτάχυνση είναι **μόνο κατακόρυφη** και ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ με φορά προς τα κάτω ($\vec{a} = -g\hat{j}$, άρα $a_x = 0$ και $a_y = -g$).

Αν το σώμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα v_0 υπό γωνία θ_0 ως προς την οριζόντια διεύθυνση από τη θέση (x_0, y_0) :

- **Άξονας x (Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση):**

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = \text{σταθερή}$$
$$x(t) = x_0 + (v_0 \cos \theta_0)t$$

- **Άξονας y (Ελεύθερη Πτώση / Κατακόρυφη Βολή):**

$$v_y(t) = v_0 \sin \theta_0 - gt$$
$$y(t) = y_0 + (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Βασικές Τριγωνομετρικές Σχέσεις σε Ορθογώνιο Τρίγωνο

Για μια γωνία θ σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ορίζουμε:

$$\sin \theta = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη Πλευρά}}{\text{Υποτείνουσα}}$$
$$\cos \theta = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη Πλευρά}}{\text{Υποτείνουσα}}$$
$$\tan \theta = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη Πλευρά}}{\text{Προσκείμενη Κάθετη Πλευρά}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Ανάλυση διανύσματος ταχύτητας $\vec{v}$: $v_x = |\vec{v}| \cos \theta$ και $v_y = |\vec{v}| \sin \theta$.

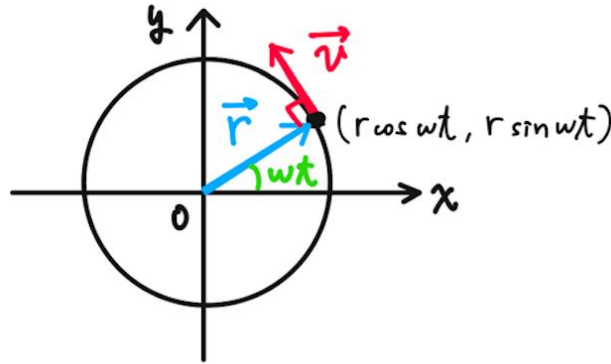
Άσκηση 1

Ένα αυτοκίνητο κινείται σε επίπεδη επιφάνεια και η θέση του περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x(t) = 4 \cos(0.5t)$$

$$y(t) = 4 \sin(0.5t)$$

όπου τα x και y μετρώνται σε μέτρα (m) και το t σε δευτερόλεπτα (s).



Ερωτήματα:

1. **Θέση:** Βρείτε το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ και υπολογίστε τη θέση του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή $t = 2s$.
2. **Ταχύτητα:** Προσδιορίστε τις συνιστώσες της ταχύτητας $v_x(t)$ και $v_y(t)$. Υπολογίστε το διάνυσμα της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t = 2s$.
3. **Μέτρο Ταχύτητας:** Βρείτε το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας. Είναι το μέτρο της ταχύτητας σταθερό;
4. **Επιτάχυνση:** Υπολογίστε τις συνιστώσες της επιτάχυνσης $a_x(t)$ και $a_y(t)$.
5. **Κατεύθυνση επιτάχυνσης:** Τη χρονική στιγμή $t = 2s$, προσδιορίστε αν η επιτάχυνση δείχνει προς ή μακριά από την αρχή των αξόνων.
6. **Τροχιά:** Απαλείψτε τον χρόνο t για να βρείτε μια εξίσωση που να συνδέει το x με το y . Τι είδους τροχιά ακολουθεί το αυτοκίνητο;
7. **Πρόκληση:** Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων της ταχύτητας και της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t = 2s$. Τι σας λέει αυτό για τη μεταβολή της ταχύτητας του αυτοκινήτου;

Λύση:

1. Το διάνυσμα θέσης είναι:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = 4 \cos(0.5t)\hat{i} + 4 \sin(0.5t)\hat{j} \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή $t = 2s$, η θέση είναι:

$$\vec{r}(2) = 4 \cos(1)\hat{i} + 4 \sin(1)\hat{j} \quad (m) \quad (2)$$

(Σημείωση: το όρισμα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι σε rad).

2. Οι συνιστώσες της ταχύτητας προκύπτουν παραγωγίζοντας τις συνιστώσες της θέσης ως προς το χρόνο (χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας):

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 4(-\sin(0.5t)) \cdot 0.5 = -2\sin(0.5t) \quad (3)$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 4(\cos(0.5t)) \cdot 0.5 = 2\cos(0.5t) \quad (4)$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας γενικά είναι:

$$\vec{v}(t) = -2\sin(0.5t)\hat{i} + 2\cos(0.5t)\hat{j} \quad (5)$$

Και για $t = 2s$:

$$\vec{v}(2) = -2\sin(1)\hat{i} + 2\cos(1)\hat{j} \quad (\text{m/s}) \quad (6)$$

3. Το μέτρο της ταχύτητας (speed) δίνεται από:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} \quad (7)$$

$$= \sqrt{(-2\sin(0.5t))^2 + (2\cos(0.5t))^2} \quad (8)$$

$$= \sqrt{4\sin^2(0.5t) + 4\cos^2(0.5t)} \quad (9)$$

$$= \sqrt{4(\sin^2(0.5t) + \cos^2(0.5t))} \quad (10)$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, έχουμε:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{4 \cdot 1} = 2 \text{ m/s} \quad (11)$$

Ναι, το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό (ανεξάρτητο του χρόνου).

4. Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης προκύπτουν παραγωγίζοντας τις συνιστώσες της ταχύτητας:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -2(\cos(0.5t)) \cdot 0.5 = -\cos(0.5t) \quad (12)$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = 2(-\sin(0.5t)) \cdot 0.5 = -\sin(0.5t) \quad (13)$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι:

$$\vec{a}(t) = -\cos(0.5t)\hat{i} - \sin(0.5t)\hat{j} \quad (\text{m/s}^2) \quad (14)$$

5. Παρατηρούμε τη σχέση ανάμεσα στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ και στο διάνυσμα επιτάχυνσης $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) = -(\cos(0.5t)\hat{i} + \sin(0.5t)\hat{j}) = -\frac{1}{4}(4\cos(0.5t)\hat{i} + 4\sin(0.5t)\hat{j}) = -\frac{1}{4}\vec{r}(t) \quad (15)$$

Επειδή $\vec{a}(t) = -\frac{1}{4}\vec{r}(t)$, το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι πάντα αντίρροπο του διανύσματος θέσης. Συνεπώς, για κάθε t (και για $t = 2s$), η επιτάχυνση δείχνει **προς την αρχή των αξόνων**.

6. Για να βρούμε την εξίσωση της τροχιάς, λύνουμε τις αρχικές εξισώσεις ως προς τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\cos(0.5t) = \frac{x}{4} \quad (16)$$

$$\sin(0.5t) = \frac{y}{4} \quad (17)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη:

$$\cos^2(0.5t) + \sin^2(0.5t) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 \quad (18)$$

$$1 = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} \quad (19)$$

$$x^2 + y^2 = 16 \quad (20)$$

Το αυτοκίνητο ακολουθεί **κυκλική τροχιά** με κέντρο την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ και ακτίνα $R = 4m$.

7. Για να βρούμε τη γωνία, ελέγχουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{a}$ τη χρονική στιγμή $t = 2s$:

$$\vec{v}(2) \cdot \vec{a}(2) = (-2\sin(1)\hat{i} + 2\cos(1)\hat{j}) \cdot (-\cos(1)\hat{i} - \sin(1)\hat{j}) \quad (21)$$

$$= (-2\sin(1))(-\cos(1)) + (2\cos(1))(-\sin(1)) \quad (22)$$

$$= 2\sin(1)\cos(1) - 2\sin(1)\cos(1) = 0 \quad (23)$$

Αφού το εσωτερικό γινόμενο είναι 0, τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης είναι **κάθετα** μεταξύ τους (γωνία 90° ή $\pi/2$). Αυτό μας επιβεβαιώνει ότι η επιτάχυνση δεν έχει συνιστώσα πάνω στην ταχύτητα (επιτρόχιος μηδέν), άρα **το μέτρο της ταχύτητας δεν αλλάζει**. Η επιτάχυνση είναι αμιγώς κεντρομόλος και αλλάζει μόνο την κατεύθυνση της κίνησης.

Άσκηση 2

Σχεδιάστε διαγράμματα κίνησης τα οποία δείχνουν την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός βλήματος σε διάφορα σημεία της τροχιάς του υποθέτοντας ότι:

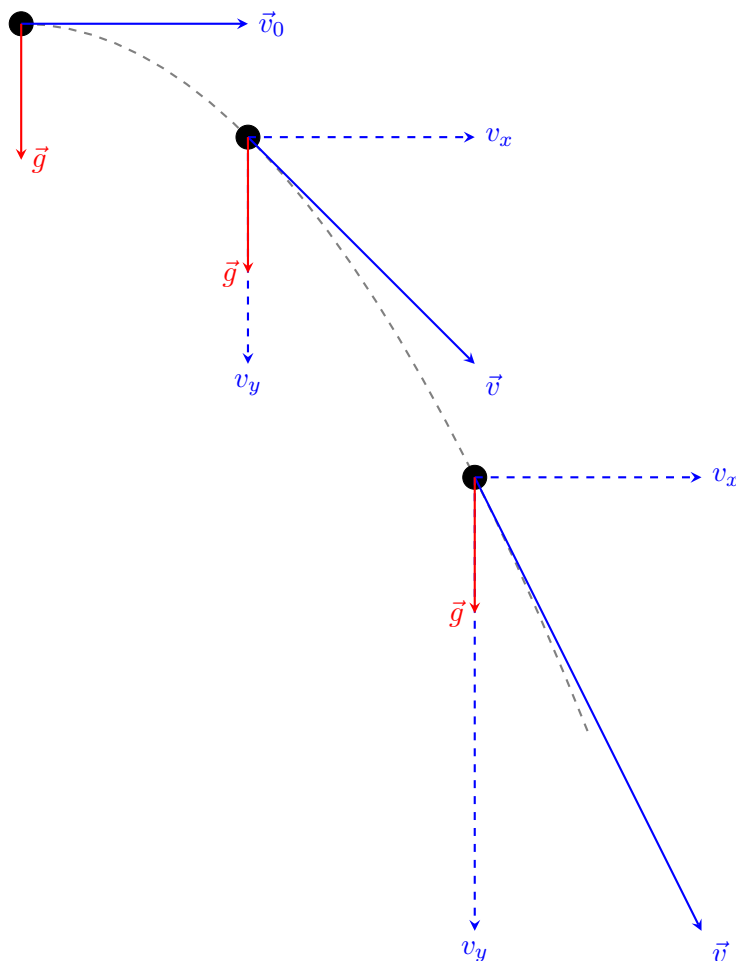
1. Το βλήμα εκτοξεύεται οριζόντια.
2. Το βλήμα εκτοξεύεται υπό γωνία θ .

(Serway, άσκ. 2, σελ. 155)

Λύση:

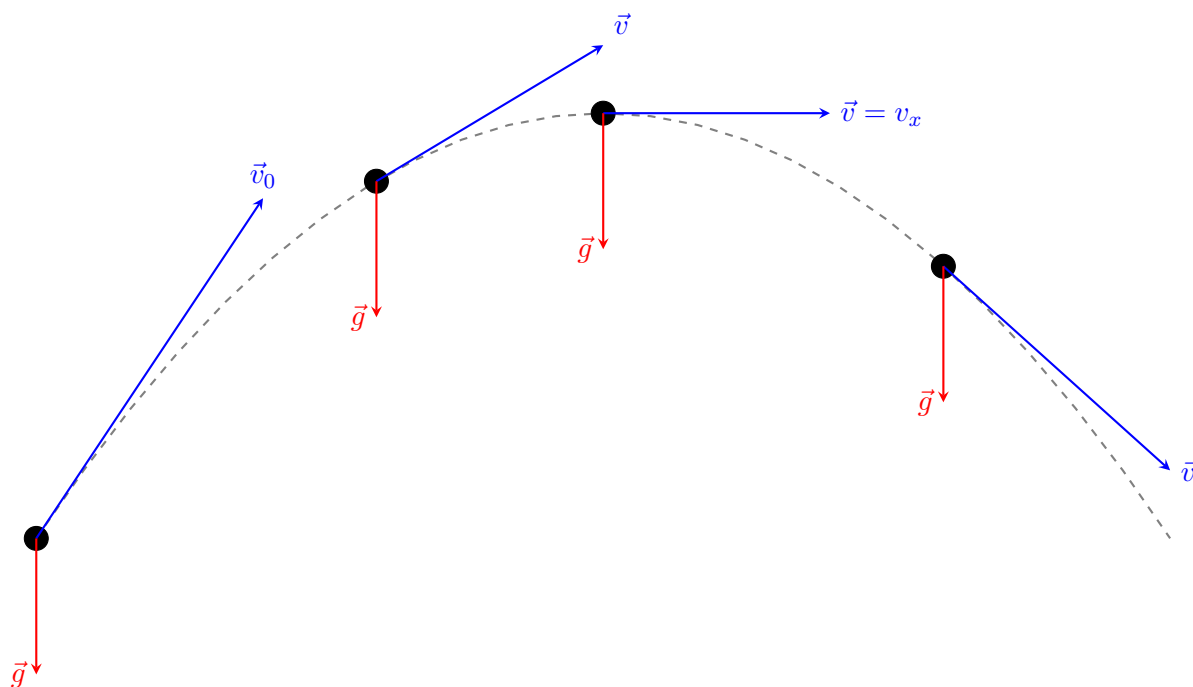
1. Οριζόντια Βολή:

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\vec{g}$ είναι πάντα κατακόρυφο και σταθερό. Το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v}$ είναι πάντα εφαπτόμενο στην τροχιά. Η οριζόντια συνιστώσα v_x παραμένει σταθερή, ενώ η κατακόρυφη v_y αυξάνεται (κατά μέτρο) προς τα κάτω.



2. Πλάγια Βολή υπό γωνία θ :

Στην άνοδο το v_y μειώνεται, στο μέγιστο ύψος μηδενίζεται ($v_y = 0, \vec{v} = v_x \hat{i}$), και στην κάθοδο αυξάνεται προς τα κάτω. Η επιτάχυνση $\vec{g}$ παραμένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια.



Άσκηση 3

Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$\vec{r}(t) = (t^2 + t)\hat{i} + (3t - 2)\hat{j}$$

με τη θέση να μετρείται σε μέτρα και το χρόνο σε δευτερόλεπτα. Να υπολογιστούν τα παρακάτω διανύσματα και τα μέτρα τους, για τη χρονική στιγμή $t = 2s$:

1. Ταχύτητα
2. Επιτάχυνση

Λύση:

1. Η στιγμιαία ταχύτητα είναι η παράγωγος του διανύσματος θέσης ως προς το χρόνο:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 + t)\hat{i} + \frac{d}{dt}(3t - 2)\hat{j} \quad (24)$$

$$\vec{v}(t) = (2t + 1)\hat{i} + 3\hat{j} \quad (\text{m/s}) \quad (25)$$

Για $t = 2s$, το διάνυσμα της ταχύτητας είναι:

$$\vec{v}(2) = (2(2) + 1)\hat{i} + 3\hat{j} = 5\hat{i} + 3\hat{j} \quad (\text{m/s}) \quad (26)$$

Το μέτρο της ταχύτητας είναι:

$$|\vec{v}(2)| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \approx 5.83 \text{ m/s} \quad (27)$$

2. Η στιγμιαία επιτάχυνση είναι η παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(2t + 1)\hat{i} + \frac{d}{dt}(3)\hat{j} \quad (28)$$

$$\vec{a}(t) = 2\hat{i} + 0\hat{j} = 2\hat{i} \quad (\text{m/s}^2) \quad (29)$$

Επειδή η επιτάχυνση είναι σταθερή (ανεξάρτητη του t), για $t = 2s$ παραμένει:

$$\vec{a}(2) = 2\hat{i} \quad (\text{m/s}^2) \quad (30)$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι προφανώς:

$$|\vec{a}(2)| = \sqrt{2^2} = 2 \quad (\text{m/s}^2) \quad (31)$$

Άσκηση 4

Σε ένα μπαρ, ένας πελάτης γλιστράει το άδειο ποτήρι μπύρας του στον πάγκο, ο οποίος έχει ύψος h (σε m). Πριν προλάβει να το πιάσει ο μπάρμαν, το ποτήρι σκάει στο έδαφος σε απόσταση d (σε m) από τη βάση του πάγκου.

1. Με τι ταχύτητα φεύγει το ποτήρι από τον πάγκο;
2. Ποιά είναι η κατεύθυνση της ταχύτητας όταν φτάνει στο έδαφος;

Λύση:

1. Τοποθετούμε τους άξονες επάνω στον πάγκο. Το ποτήρι εκτελεί οριζόντια βολή από τη θέση $(x_0, y_0) = (0, 0)$, όπου εγκαταλείπει τον πάγκο, και τότε θεωρούμε ότι $t = 0$. Η αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ έχει μόνο οριζόντια συνιστώσα (έστω $v_0\vec{i}$). Στον κατακόρυφο άξονα y εκτελεί ελεύθερη πτώση, οπότε η κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω είναι $y = -\frac{1}{2}gt^2$. Όταν φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει/κατέβει ύψος $h < 0$, οπότε βρίσκουμε το χρόνο πτήσης:

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t^2 = -\frac{2h}{g} \Rightarrow t = \sqrt{-\frac{2h}{g}} \quad (32)$$

Στον οριζόντιο άξονα x εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Όταν φτάνει στο έδαφος (χρόνος t) έχει διανύσει απόσταση d . Άρα:

$$x = v_0t \Rightarrow d = v_0\sqrt{-\frac{2h}{g}} \Rightarrow v_0 = \frac{d}{\sqrt{-\frac{2h}{g}}} = d\sqrt{-\frac{g}{2h}} \quad (33)$$

Αυτή είναι η (αρχική) ταχύτητα με την οποία το ποτήρι φεύγει από τον πάγκο.

2. Όταν το ποτήρι φτάνει στο έδαφος (τη χρονική στιγμή $t = \sqrt{-2h/g}$), οι συνιστώσες της ταχύτητάς του είναι:

$$v_x = v_0 = d\sqrt{-\frac{g}{2h}} \quad (34)$$

$$v_y = -gt = -g\sqrt{-\frac{2h}{g}} = -\sqrt{-g^2\frac{2h}{g}} = -\sqrt{-2gh} \quad (35)$$

Η κατεύθυνση δίνεται από τη γωνία θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο, χρησιμοποιώντας την εφαπτομένη:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-\sqrt{-2gh}}{d\sqrt{-\frac{g}{2h}}} = -\frac{\sqrt{-2gh}}{\frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{-2h}}} = -\frac{\sqrt{-2gh} \cdot \sqrt{-2h}}{d\sqrt{g}} = -\frac{2h\sqrt{g}}{d\sqrt{g}} = -\frac{2h}{d} \quad (36)$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η γωνία της ταχύτητας κατευθύνεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα.

Μπορείτε να λύσετε την άσκηση θεωρώντας ότι η συμβολή των αξόνων βρίσκεται όχι στην άκρη του πάγκου αλλά στο έδαφος, ακριβώς κάτω από την άκρη του πάγκου; Είναι πιο “εύκολες” τώρα οι πράξεις;

Άσκηση 5

Σωματίδιο ξεκινάει από την αρχή των συντεταγμένων με ταχύτητα $5\hat{i}$ m/s τη χρονική στιγμή $t = 0$ s και κινείται στο επίπεδο xy με μεταβαλλόμενη επιτάχυνση $\vec{a} = 6t\hat{j}$ m/s².

1. Προσδιορίστε την ταχύτητα του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.
2. Προσδιορίστε τη θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

(Serway, άσκ. 46, σελ. 160)

Λύση:

Δίνονται:

$$\vec{r}(0) = 0\hat{i} + 0\hat{j}$$

$$\vec{v}(0) = 5\hat{i}$$

$$\vec{a}(t) = 6t\hat{j}$$

1. Επειδή $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα ολοκληρώνοντας την επιτάχυνση:

$$d\vec{v} = \vec{a}dt \quad (37)$$

$$\int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(\tau)d\tau \quad (38)$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \int_0^t (6\tau\hat{j})d\tau \quad (39)$$

$$\vec{v}(t) - 5\hat{i} = \left[\frac{6\tau^2}{2} \right]_0^t \hat{j} \quad (40)$$

$$\vec{v}(t) = 5\hat{i} + 3t^2\hat{j} \quad (\text{m/s}) \quad (41)$$

2. Με παρόμοιο τρόπο, επειδή $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$, ολοκληρώνουμε την ταχύτητα για να βρούμε τη θέση:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \quad (42)$$

$$\int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau \quad (43)$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \int_0^t (5\hat{i} + 3\tau^2\hat{j})d\tau \quad (44)$$

$$\vec{r}(t) - \vec{0} = \left[5\tau\hat{i} + \frac{3\tau^3}{3}\hat{j} \right]_0^t \quad (45)$$

$$\vec{r}(t) = 5t\hat{i} + t^3\hat{j} \quad (\text{m}) \quad (46)$$

Τα παραπάνω μπορούν να βρεθούν ολοκληρώνοντας μόνο τις συνιστώσες, ώστε να αποφύγουμε τη χρήση διανυσμάτων. Ας δούμε πως.

Η επιτάχυνση δρα μόνο στον άξονα y , άρα η ταχύτητα θα είναι σταθερή στον άξονα x :

$$u_x = 5 \text{ m/s} \implies \vec{u}_x = 5\hat{i} \quad (\text{m/s}) \quad (47)$$

ενώ

$$dv_y = a_y dt \quad (48)$$

$$\int_{u_{0y}}^{u_y} dv_y = \int_0^t 6\tau d\tau \quad (49)$$

$$u_y - u_{y0} = \left[\frac{6\tau^2}{2} \right]_0^t \quad (50)$$

$$u_y - 0 = 3t^2 \quad (51)$$

$$u_y = 3t^2 \quad (\text{m/s}) \quad (52)$$

Οπότε συνολικά

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} = 5\vec{i} + 3t^2 \vec{j} \quad (\text{m/s}) \quad (53)$$

Βρείτε εσείς τη θέση του σωματιδίου με τον ίδιο τρόπο, και επιβεβαιώστε την απάντηση ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση (αφού θέση και ταχύτητα αποτελούν ζεύγος παραγώγου-παράγουσας)!

Άσκηση 6

Μια μπάλα του baseball βάλλεται με ρόπαλο από ύψος 1 m πάνω από το έδαφος, με αρχική ταχύτητα 46 m/s και γωνία 20° με το οριζόντιο επίπεδο. Τη στιγμή της κρούσης, μια στιγμιαία ριπή ανέμου φυσά με οριζόντια διεύθυνση και φορά ακριβώς αντίθετη της φοράς της κίνησης της μπάλας, με αποτέλεσμα να προστίθεται στην αρχική ταχύτητα της μπάλας μια συνιστώσα $-2.7\hat{i}$ m/s.

1. Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης της μπάλας του baseball για κάθε χρονική στιγμή.
2. Σε πόσο μέγιστο ύψος φτάνει η μπάλα και πότε συμβαίνει αυτό;
3. Αν η τροχιά της μπάλας δεν ανακοπεί από κάποιον παίκτη, βρείτε την οριζόντια απόσταση που θα διανύσει μέχρι να βρεθεί στο έδαφος, και τον χρόνο που θα διαρκέσει το “ταξίδι” της.

Δίνεται $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. (Tomas, Παράδειγμα 4, σελ. 728)

Λύση:

Αρχικά βρίσκουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας πριν τον άνεμο ($v_0 = 46 \text{ m/s}$, $\theta_0 = 20^\circ$):

$$v'_{0x} = 46 \cos(20^\circ) \approx 46(0.9397) \approx 43.23 \text{ m/s} \quad (54)$$

$$v_{0y} = 46 \sin(20^\circ) \approx 46(0.3420) \approx 15.73 \text{ m/s} \quad (55)$$

Η ριπή του ανέμου προσθέτει **στιγμιαία** τη συνιστώσα $-2.7\hat{i}$, άρα η πραγματική αρχική ταχύτητα v_{0x} είναι:

$$v_{0x} = 43.23 - 2.7 = 40.53 \text{ m/s} \quad (56)$$

Άρα το διάνυσμα της αρχικής ταχύτητας είναι $\vec{v}_0 = 40.53\hat{i} + 15.73\hat{j}$. Το αρχικό ύψος είναι $y_0 = 1 \text{ m}$.

1. Διάνυσμα θέσης:

Οι εξισώσεις κίνησης είναι $x(t) = v_{0x}t$ και $y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$. Αντικαθιστώντας:

$$x(t) = 40.53t \quad (57)$$

$$y(t) = 1 + 15.73t - 4.9t^2 \quad (58)$$

Επομένως το διάνυσμα θέσης είναι:

$$\vec{r}(t) = (40.53t)\hat{i} + (1 + 15.73t - 4.9t^2)\hat{j} \quad (59)$$

2. Μέγιστο ύψος:

Στο μέγιστο ύψος, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας μηδενίζεται ($v_y = 0$).

$$v_y(t) = v_{0y} - gt = 0 \implies 15.73 - 9.8t = 0 \quad (60)$$

$$t = \frac{15.73}{9.8} \approx 1.61 \text{ s} \quad (61)$$

Άρα φτάνει στο μέγιστο ύψος τη χρονική στιγμή $t = 1.61 \text{ s}$. Αντικαθιστούμε στην $y(t)$:

$$y_{\max} = y(1.61) = 1 + 15.73(1.61) - 4.9(1.61)^2 = 1 + 25.32 - 12.70 = 13.62 \text{ m} \quad (62)$$

3. Χρόνος πτήσης και Οριζόντια απόσταση:

Η μπάλα φτάνει στο έδαφος όταν $y(t) = 0$.

$$-4.9t^2 + 15.73t + 1 = 0 \quad (63)$$

Λύνουμε την εξίσωση 2ου βαθμού:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (15.73)^2 - 4(-4.9)(1) = 247.43 + 19.6 = 267.03 \implies \sqrt{\Delta} \approx 16.34 \quad (64)$$

$$t = \frac{-15.73 \pm 16.34}{2(-4.9)} \quad (65)$$

$$= \frac{-15.73 - 16.34}{-9.8} \approx 3.27 \text{ s} \quad (66)$$

(Απορρίπτουμε την αρνητική ρίζα). Ο χρόνος που διαρκεί η βολή είναι $t_{ολ} = 3.27 \text{ s}$. Η οριζόντια απόσταση που θα διανύσει προκύπτει αντικαθιστώντας τον χρόνο αυτόν στην $x(t)$:

$$S = x(3.27) = 40.53 \cdot 3.27 \approx 132.5 \text{ m} \quad (67)$$