

Φροντιστήριο Φυσικής ΗΥ-112

2ο Φροντιστήριο - Κινηματική (Θέση, Ταχύτητα, Επιτάχυνση)

Επιμέλεια:

Σελήσιος Στράτος
selisios@csd.uoc.gr

Ημερομηνία:
9/10/2026

Τυπολόγιο: Κινηματική σε Μία Διάσταση

Βασικοί Ορισμοί

1. Θέση και Μετατόπιση:

Η θέση ενός σωματιδίου στον άξονα x περιγράφεται από τη συνάρτηση $x(t)$.

Η μετατόπιση (Δx) ορίζεται ως η μεταβολή της θέσης σε ένα χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$$

(Προσοχή: Η μετατόπιση είναι διάνυσμα και μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν, σε αντίθεση με το συνολικό διάστημα που διανύθηκε).

2. Ταχύτητα (Μέση και Στιγμιαία):

Η μέση ταχύτητα u_{avg} (ή v_{avg}) σε ένα χρονικό διάστημα Δt είναι ο λόγος της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα:

$$u_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Η στιγμιαία ταχύτητα $u(t)$ είναι το όριο της μέσης ταχύτητας όταν το $\Delta t \rightarrow 0$. Ισούται με την πρώτη παράγωγο της θέσης ως προς το χρόνο:

$$u(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

3. Επιτάχυνση (Μέση και Στιγμιαία):

Η μέση επιτάχυνση a_{avg} σε ένα χρονικό διάστημα Δt είναι ο λόγος της μεταβολής της ταχύτητας προς το χρονικό διάστημα:

$$a_{\text{avg}} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u(t_2) - u(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Η στιγμιαία επιτάχυνση $a(t)$ είναι η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο (και η δεύτερη παράγωγος της θέσης):

$$a(t) = \frac{du(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Εξισώσεις Ομαλά Μεταβαλλόμενης Κίνησης (Σταθερή Επιτάχυνση a)

Αν η επιτάχυνση a είναι σταθερή, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις (u_0 η αρχική ταχύτητα, x_0 η αρχική θέση τη στιγμή $t = 0$):

$$u(t) = u_0 + at \tag{1}$$

$$x(t) = x_0 + u_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{2}$$

$$u^2 = u_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{3}$$

Άσκηση 1

Η θέση ενός σώματος που κινείται επάνω στον άξονα x δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = 3t - 4t^2 + t^3$$

- (α') Να βρεθεί η θέση του σώματος τις χρονικές στιγμές : $t = 1, 2, 3, 4$ s.
- (β') Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος μεταξύ $t = 0$ s και $t = 4$ s.
- (γ') Ποιά είναι η μέση ταχύτητα του σώματος στο διάστημα από $t = 2$ s ως $t = 4$ s.
- (δ') Σχεδιάστε ποιοτικά τη συνάρτηση $x(t)$ σε ένα γράφημα στο διάστημα $[2, 4]$ και εξηγήστε πως θα μπορούσατε ν' απαντήσετε το προηγούμενο ερώτημα (γ) μέσω του γραφήματος.

Λύση:

- (α') Αντικαθιστούμε τις τιμές του t στη συνάρτηση της θέσης $x(t) = 3t - 4t^2 + t^3$:

- Για $t = 1s$: $x(1) = 3(1) - 4(1)^2 + (1)^3 = 3 - 4 + 1 = 0m$.
- Για $t = 2s$: $x(2) = 3(2) - 4(2)^2 + (2)^3 = 6 - 16 + 8 = -2m$.
- Για $t = 3s$: $x(3) = 3(3) - 4(3)^2 + (3)^3 = 9 - 36 + 27 = 0m$.
- Για $t = 4s$: $x(4) = 3(4) - 4(4)^2 + (4)^3 = 12 - 64 + 64 = 12m$.

- (β') Για $t = 0s$, η θέση είναι $x(0) = 3(0) - 4(0)^2 + (0)^3 = 0m$.

Για $t = 4s$, υπολογίσαμε $x(4) = 12m$.

Άρα η μετατόπιση είναι:

$$\Delta x = x(4) - x(0) = 12 - 0 = 12m \quad (4)$$

- (γ') Η μέση ταχύτητα u_{avg} στο διάστημα από $t_1 = 2s$ έως $t_2 = 4s$ είναι:

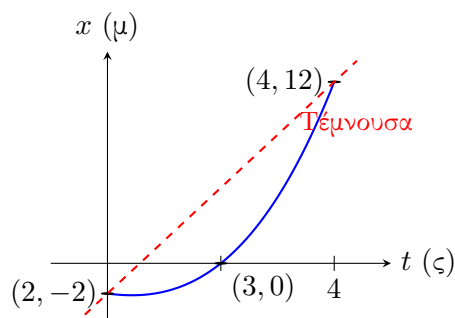
$$u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4) - x(2)}{4 - 2} = \frac{12 - (-2)}{2} = \frac{14}{2} = 7m/s \quad (5)$$

- (δ') Στο γράφημα της θέσης με τον χρόνο, η **μέση ταχύτητα** μεταξύ δύο χρονικών στιγμών απεικονίζεται ως η **κλίση της τέμνουσας ευθείας** που ενώνει τα αντίστοιχα σημεία. Εδώ η τέμνουσα ενώνει το σημείο $(2, -2)$ με το $(4, 12)$.

Υπολογίζοντας την κλίση λ αυτής της ευθείας έχουμε:

$$\lambda = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{12 - (-2)}{4 - 2} = \frac{14}{2} = 7m/s \quad (6)$$

Όπως παρατηρούμε, η κλίση της τέμνουσας ταυτίζεται απόλυτα με τη μέση ταχύτητα που υπολογίσαμε στο ερώτημα (γ).



Άσκηση 2

Για σώμα που κινείται σε μία διάσταση, να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις $x(t)$ και $u(t)$ όταν:

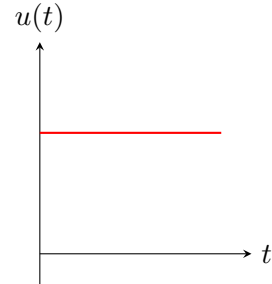
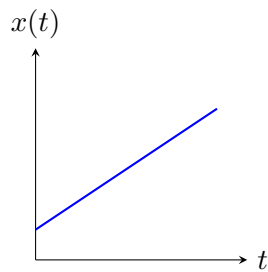
- (α') το σώμα κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου.
- (β') το σώμα κινείται προς τα δεξιά και επιταχύνεται με σταθερό ρυθμό.
- (γ') το σώμα κινείται προς τα δεξιά και επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό.

Λύση:

Θεωρούμε ως «δεξιά» τη θετική φορά του άξονα x , άρα $u > 0$ σε όλες τις περιπτώσεις.

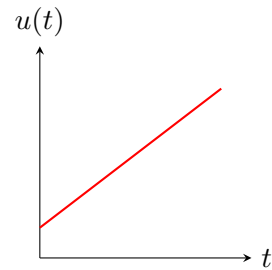
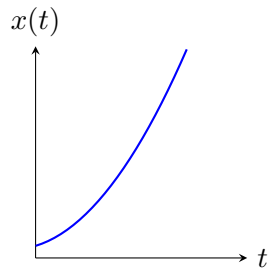
(α') **Σταθερή Ταχύτητα** ($u = \text{σταθερή} > 0, a = 0$):

Η θέση αυξάνεται γραμμικά ($x(t) = x_0 + ut$). Η ταχύτητα είναι μια οριζόντια γραμμή με θετική τιμή.



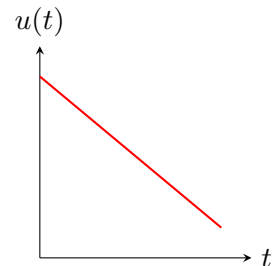
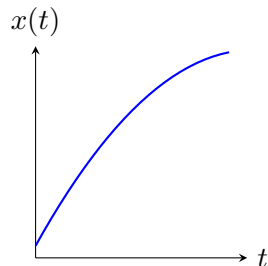
(β') **Σταθερή Επιτάχυνση** ($u > 0, a > 0$):

Το σώμα αυξάνει την ταχύτητά του γραμμικά ($u(t) = u_0 + at$). Η θέση περιγράφεται από παραβολή που στρέφει τα κοίλα άνω ($x(t) = x_0 + u_0t + \frac{1}{2}at^2$).



(γ') **Σταθερή Επιβράδυνση** ($u > 0, a < 0$):

Το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται γραμμικά προς το μηδέν. Η θέση περιγράφεται από παραβολή που στρέφει τα κοίλα κάτω.



Άσκηση 3

Ένα σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Το σώμα κινείται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x και όταν η συντεταγμένη του είναι $3m$, έχει ταχύτητα $12m/s$. Αν $2s$ αργότερα η συντεταγμένη του είναι $-5m$, ποιά είναι η επιτάχυνσή του; (Serway, Κεφ. 2, Ασκ. 20)

Λύση:

Θεωρούμε ως χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 3m$. Τη στιγμή αυτή, η αρχική του ταχύτητα είναι $u_0 = 12m/s$.

Μετά από χρόνο $t = 2s$, η νέα του θέση είναι $x = -5m$.

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση θέσης της ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης:

$$x(t) = x_0 + u_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (7)$$

Αντικαθιστούμε τα γνωστά δεδομένα στην εξίσωση:

$$-5 = 3 + 12(2) + \frac{1}{2} a (2)^2$$

$$-5 = 3 + 24 + 2a$$

$$-5 = 27 + 2a$$

$$-32 = 2a$$

$$a = -16 \text{ m/s}^2$$

Άρα η επιτάχυνση του σώματος είναι σταθερή και ίση με $a = -16m/s^2$ (το πρόσημο υποδηλώνει ότι το σώμα επιβραδύνεται έντονα και αναστρέφει την πορεία του).

Άσκηση 4

Ο οδηγός ενός αυτοκινήτου βλέπει ένα δένδρο να κλείνει τον δρόμο και πατάει απότομα φρένο. Το αυτοκίνητο μειώνει σταθερά το μέτρο της ταχύτητάς του με επιτάχυνση -5.6m/s^2 για 4.2s , αφήνοντας ευθύγραμμα σημάρδια φρεναρίσματος συνολικού μήκους 62.4m , μέχρι να φτάσει στο δέντρο. Ποιό είναι το μέτρο της ταχύτητας του αυτοκινήτου όταν προσκρούει στο δέντρο; (*Serway*, Κεφ. 2, Ασκ. 23)

Λύση:

Τα δεδομένα μας είναι:

- Επιτάχυνση: $a = -5.6\text{m/s}^2$
- Χρόνος: $t = 4.2\text{s}$
- Μετατόπιση: $\Delta x = 62.4\text{m}$

Ζητάμε την τελική ταχύτητα u τη στιγμή $t = 4.2\text{s}$.

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση της μετατόπισης ως προς τη μέση ταχύτητα (η οποία ισχύει για σταθερή επιτάχυνση):

$$\Delta x = \frac{u_0 + u}{2} \cdot t \quad (8)$$

Παράλληλα, γνωρίζουμε από την εξίσωση ταχύτητας ότι:

$$u = u_0 + at \Rightarrow u_0 = u - at \quad (9)$$

Αντικαθιστώντας την (9) στην (8) προκύπτει μια άμεση εξίσωση για την τελική ταχύτητα:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{(u - at) + u}{2} \cdot t \\ \Delta x &= ut - \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

Λύνουμε ως προς u :

$$\begin{aligned} 62.4 &= u(4.2) - \frac{1}{2}(-5.6)(4.2)^2 \\ 62.4 &= 4.2u + 2.8(17.64) \\ 62.4 &= 4.2u + 49.392 \\ 13.008 &= 4.2u \\ u &= \frac{13.008}{4.2} \approx 3.1\text{m/s} \end{aligned}$$

Το αυτοκίνητο προσκρούει στο δέντρο με ταχύτητα περίπου 3.1m/s .

Άσκηση 5

1. Με πόση ταχύτητα πρέπει να πετάξουμε μία μπάλα κατακόρυφα ώστε να φτάσει σε μέγιστο ύψος $50m$.
2. Πόσο χρόνο βρίσκεται στον αέρα μέχρι να επιστρέψει στο χέρι μας.
3. Με πόση ταχύτητα πρέπει να πετάξουμε ένα ψυγείο (!) κατακόρυφα προς τα πάνω ώστε να φτάσει σε μέγιστο ύψος $50m$ από το έδαφος. Πόσο διαφέρει η απάντησή σας από το ερώτημα (1).

Δίνεται $g = 9.8m/s^2$. (Serway, Κεφ. 2, Ασκ. 29)

Λύση:

Πρόκειται για ελεύθερη πτώση (κατακόρυφη βολή προς τα πάνω) με επιτάχυνση $a = -g = -9.8m/s^2$ (θεωρώντας τη φορά προς τα πάνω θετική).

1. Στο μέγιστο ύψος $h_{\max} = 50m$, η στιγμιαία ταχύτητα της μπάλας μηδενίζεται ($u = 0$). Χρησιμοποιούμε τη σχέση ανεξάρτητη του χρόνου:

$$\begin{aligned}u^2 &= u_0^2 - 2g\Delta y \\0 &= u_0^2 - 2(9.8)(50) \\u_0^2 &= 980 \\u_0 &= \sqrt{980} \approx 31.3m/s\end{aligned}$$

2. Ο χρόνος ανόδου $t_{\alpha\nu}$ υπολογίζεται από την εξίσωση της ταχύτητας, θέτοντας πάλι $u = 0m/s$:

$$\begin{aligned}u &= u_0 - gt_{\alpha\nu} \\0 &= 31.3 - 9.8 \cdot t_{\alpha\nu} \\t_{\alpha\nu} &= \frac{31.3}{9.8} \approx 3.19s\end{aligned}$$

Επειδή η κίνηση είναι συμμετρική (αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα), ο χρόνος ανόδου ισούται με τον χρόνο καθόδου. Ο συνολικός χρόνος πτήσης είναι:

$$t_{ολ} = 2 \cdot t_{\alpha\nu} = 2 \cdot 3.19 = 6.38s \quad (10)$$

3. Οι εξισώσεις της κινηματικής (όπως δείξαμε παραπάνω) δεν εξαρτώνται από τη μάζα του σώματος. Συνεπώς, για να φτάσει ένα βαρύ αντικείμενο (όπως ένα ψυγείο) στο ίδιο ύψος των $50m$ - αγνοώντας την αντίσταση του αέρα - χρειάζεται να βληθεί με **ακριβώς την ίδια αρχική ταχύτητα**, δηλαδή $u_0 \approx 31.3m/s$. Δεν υπάρχει καμία διαφορά σε σχέση με την ερώτηση (1).

Άσκηση 6

Η θέση ενός σωματιδίου μεταβάλλεται σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$x(t) = e^{-t} \cos(t), \quad t > 0$$

Να υπολογιστούν:

(α') η ταχύτητα $u(t)$

(β') η επιτάχυνση $a(t)$

Λύση:

Αυτή η άσκηση απαιτεί γνώση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα παραγωγίσιμων γινομένου: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

(α') Η ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της θέσης:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (e^{-t} \cos(t)) \\ &= \left(\frac{d}{dt} e^{-t} \right) \cos(t) + e^{-t} \left(\frac{d}{dt} \cos(t) \right) \\ &= (-e^{-t}) \cos(t) + e^{-t} (-\sin(t)) \\ &= -e^{-t} (\cos(t) + \sin(t)) \end{aligned}$$

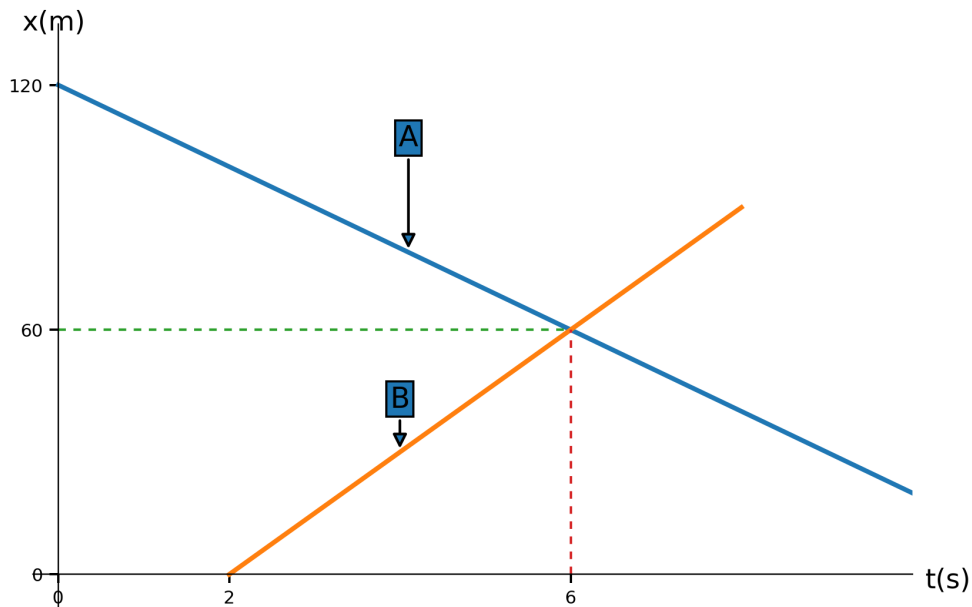
(β') Η επιτάχυνση είναι η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας (ή η δεύτερη παράγωγος της θέσης):

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [-e^{-t} (\cos(t) + \sin(t))] \\ &= \left(\frac{d}{dt} (-e^{-t}) \right) (\cos(t) + \sin(t)) + (-e^{-t}) \left(\frac{d}{dt} (\cos(t) + \sin(t)) \right) \\ &= (e^{-t}) (\cos(t) + \sin(t)) - e^{-t} (-\sin(t) + \cos(t)) \\ &= e^{-t} [(\cos(t) + \sin(t)) - (-\sin(t) + \cos(t))] \\ &= e^{-t} (\cos(t) + \sin(t) + \sin(t) - \cos(t)) \\ &= e^{-t} (2 \sin(t)) \\ &= 2e^{-t} \sin(t) \end{aligned}$$

Άσκηση 7

Στο σχήμα δίνεται το διάγραμμα θέσης - χρόνου για την κίνηση δύο κινητών Α και Β.

- (α') Να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή στην οποία τα δύο κινητά συναντιούνται, καθώς και η θέση τους εκείνη τη στιγμή.
- (β') Να υπολογιστούν οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο κινητών.
- (γ') Να κατασκευαστούν οι εξισώσεις κίνησης των δύο κινητών.
- (δ') Να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή στην οποία τα κινητά απέχουν για πρώτη φορά μεταξύ τους $d_1 = 40m$.



Σχήμα 1: Διάγραμμα θέσης - χρόνου για τα κινητά Α και Β.

Λύση:

- (α') Μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε, λόγω της διαφορετικής κλίσης των ευθειών, ότι το κινητό Α κινείται προς την αρνητική φορά του άξονα x , ενώ το Β προς τη θετική φορά. Παρατηρούμε επίσης ότι, λόγω του ότι πρόκειται για ευθείες, οι κινήσεις και των δύο σωμάτων είναι Ευθύγραμμες Ομαλές Κινήσεις (Ε.Ο.Κ.). Το σημείο που συναντιούνται οι δύο ευθείες (από την ανάγνωση του διαγράμματος) είναι στη θέση $x = 60m$ τη χρονική στιγμή $t = 6s$.

- (β') Από το διάγραμμα έχουμε για τα δύο κινητά:

- Για το κινητό Α: Διέρχεται από τα σημεία $x_A(t = 0) = 120m$ και $x_A(t = 6) = 60m$.

$$u_A = \frac{x_A(6) - x_A(0)}{6 - 0} = \frac{60 - 120}{6} = -10m/s \quad (11)$$

- Για το κινητό Β: Διέρχεται από τα σημεία $x_B(t = 2) = 0m$ και $x_B(t = 6) = 60m$.

$$u_B = \frac{x_B(6) - x_B(2)}{6 - 2} = \frac{60 - 0}{4} = 15m/s \quad (12)$$

(γ') Η γενική εξίσωση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης είναι $x(t) = x_0 + ut$.

- Για το κινητό **A**: Αφού $x_A(0) = 120m$, η αρχική του θέση είναι $x_{0A} = 120m$.

$$x_A(t) = 120 - 10t \quad (\Sigma I) \quad (13)$$

- Για το κινητό **B**: Γνωρίζουμε ότι $x_B(2) = 0$, άρα $0 = x_{0B} + 15(2) \Rightarrow x_{0B} = -30m$.

$$x_B(t) = -30 + 15t \quad (\Sigma I) \quad (14)$$

(δ') Η απόσταση d μεταξύ των κινητών δίνεται από την απόλυτη τιμή της διαφοράς των θέσεών τους: $d = |x_A - x_B|$. Θέλουμε να βρούμε τη χρονική στιγμή που απέχουν $d_1 = 40m$. Επομένως:

$$|(120 - 10t) - (-30 + 15t)| = 40 \Rightarrow |150 - 25t| = 40 \quad (15)$$

Αυτή η απόλυτη τιμή μας δίνει δύο πιθανές περιπτώσεις:

- 1η περίπτωση (πριν συναντηθούν, όταν το **A** προπορεύεται του **B**):

$$\begin{aligned} 150 - 25t &= 40 \\ 25t &= 110 \\ t &= 4.4s \end{aligned}$$

- 2η περίπτωση (μετά τη συνάντησή τους, όταν το **B** προπορεύεται του **A**):

$$\begin{aligned} 150 - 25t &= -40 \\ 25t &= 190 \\ t &= 7.6s \end{aligned}$$

Επειδή ζητείται η χρονική στιγμή που τα κινητά απέχουν μεταξύ τους $40m$ για πρώτη φορά, η σωστή απάντηση είναι η μικρότερη χρονική στιγμή:

$$t = 4.4s \quad (16)$$