Άσκηση 1

Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος, το οποίο διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, που έχει τη διεύθυνση του άξονα x'x, είναι:

$$\mathrm{y} = 0.04\sin\left[\pi(8x - 200t)\right]$$

όπου το x μετριέται σε m και το t σε s. Να υπολογιστούν:

a) Η συχνότητα f και το μήκος κύματος λ, του κύματος.
b) Η ταχύτητα διάδοσης u του κύματος.
c) Η διαφορά φάσης Δθ μεταξύ δύο σημείων του μέσου, που απέχουν μεταξύ τους Δx=0,5m.
d) Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης u_{max}, των σημείων του ελαστικού μέσου.

Λύση:

Ξέρουμε ότι:

$$\mathrm{y} = A\sin\left[kx - \omega t + \varphi\right]$$

Άρα συγκρίνοντας την εξίσωση με αυτή που μας δίνεται έχουμε:

A= 0.04 m , ω = 200π rad/s , k = 8π m^{-1}

a) $\omega = 2\pi f$ ⇔ **f = 100 Hz**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = \frac{1}{4} m}$$

b) $u = \lambda f \Leftrightarrow u = 25\,\frac{m}{s}$

c) *Για x=0m στην εξίσωση που μας δίνεται έχουμε :*

$$\mathrm{y}(x = 0, t) = 0.04\sin\left[\pi(200t)\right]$$

Άρα η φάση $\theta_1(t) = \pi\, 200t$

Για x=0.5m έχω :

$$\mathrm{y}(x = 0.5, t) = 0.04\sin\left[\pi(4 - 200t)\right]$$

Άρα $\theta_2(t) = \pi(200t-4)$

Άρα $\boldsymbol{\Delta\theta = |\theta_2(t) - \theta_1(t)| = 4\pi\ rad}$

d) $u_y = \frac{dy}{dt} = -0.04\ 200\ \pi\cos\left[\pi(8x - 200t)\right] = -8\pi\cos\left[\pi(8x - 200t)\right]$

Αυτή είναι η εξίσωση που δίνει την ταχύτητα ταλάντωσης για κάθε x του μέσου, σε κάθε χρονική στιγμή t. Εμείς θέλουμε για ένα σημείο, που φυσικά όπως μπορείτε να διαπιστώσετε είναι η ίδια u_{max}. Είναι δηλαδή ίση με το συντελεστή του cos, καθώς η ποσότητα u_y γίνεται μέγιστη όταν το cos είναι μονάδα. *Άρα* $\boldsymbol{u_{max} = 8\pi\ m/s}$

Άσκηση 2

Πηγή κύματος Ο , η οποία βρίσκεται στην αρχή των αξόνων x'x, τη χρονική στιγμή t=0, αρχίζει να εκτελεί αρμονική ταλάντωση με εξίσωση:

$$y(t)=-0.4 \sin(\omega t) \quad (y \text{ σε cm}, t \text{ σε s})$$

Πάνω στο θετικό ημιάξονα Ox βρίσκονται δύο σημεία με x_A = 24 cm και x_B = 36cm, αντίστοιχα. Κατά τη χρονική στιγμή t=0.15s το κύμα φτάνει στο Α και την ίδια στιγμή η φάση της πηγής είναι θ(t=0.15s) = 6π rad.

a) *Να υπολογίσετε το πλάτος, την περίοδο και το μήκος κύματος, του κύματος.*
b) *Να γράψετε την εξίσωση κύματος.*
c) *Ποια σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ βρίσκονται σε αντίθετη φάση με την πηγή Ο των κυμάτων;*

Λύση:

Αμέσως μπορούμε να βρούμε το πλάτος Α που θα είναι ίδιο με το πλάτος που ταλαντώνεται η πηγή Ο. Άρα ***A=0.4cm***

Το άλλο που ξέρουμε για τη φάση της πηγής είναι η τιμή της στα 0.15s, Άρα :

θ(t) = ωt $\theta(t) = \omega t \xRightarrow{t=0.15s} 6\pi = \omega\ 0.15 \Leftrightarrow \omega = 40\pi\ rad/s$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \boldsymbol{T = \frac{1}{20} s}$$

Η ταχύτητα διάδοσης όπως έχουμε πει, είναι σταθερή και εξαρτάται από το μέσο διάδοσης και μόνο. Αφού είναι σταθερή θα ισχύει:

$$u = \frac{x}{t}$$

Και γνωρίζουμε επίσης ότι η απόσταση που διένυσε το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου είναι όσο το μήκος κύματος :

$$u = \frac{\lambda}{T}$$

Οπότε αφού μας λέει η εκφώνηση ότι για t=0.15s η διαταραχή έχει φτάσει στο x_A=24cm

$$u = \frac{24}{0.15} = 160\frac{cm}{s}$$

$$u = \frac{\lambda}{T} \Leftrightarrow \lambda = u\,T \ \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 8cm}$$

b) $y = A \sin(kx - \omega t + \phi) \Leftrightarrow\ y = A\sin[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\Big)]$

$y = 0.4\, sin[2\pi \left(\frac{x}{8} - 20t) + \varphi\right)]$, *(t σε s, y σε cm)*

Μπορούμε τώρα να βρούμε το φ, αν βάλουμε τις συντεταγμένες της πηγής που ξέρουμε την κίνηση της. Για x=0m η εξίσωση κύματος είναι η εξίσωση της ταλάντωσης της πηγής.

$$y = 0.4\, sin[-2\pi(20t) + \varphi)]$$

Και ξέρουμε εξ' αρχής ότι η πηγή δεν έχει αρχική φάση. Άρα φ = 0 rad.

$\boldsymbol{y = 0.4\, sin[2\pi \left(20t - \frac{x}{8}\right)]}$ ***, (t σε s, y σε cm)***

c) *Πότε δύο σημεία βρίσκονται σε ίδια φάση;*

Σκεφτείτε το εξής ότι όταν έχω είτε το ημίτονο, είτε το συνημίτονο, άμα κάνω έναν πλήρη κύκλο από το σημείο που βρίσκομαι δε θα έχω επιστρέψει στο ίδιο σημείο.

Με άλλα λόγια :

$$\cos(\varphi) = \cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi + \xi\ 2\pi), \qquad όπου\ \xi = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

$$\sin(\varphi) = \sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi + \xi\ 2\pi), \qquad όπου\ \xi = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Άρα για δύο σημεία θέλω η φάση τους να διαφέρει κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

Δηλαδή : $kx_1 = kx_2 + \xi 2\pi$ *Άρα :* $x_2 - x_1 = \xi 2\pi/k$ *ή* $\underline{x_2 - x_1 = \xi\ \lambda\ ,\ όπου\ \xi = 1,2,3}$

Εφαρμόζουμε τώρα τον ίδιο συλλογισμό και για τα σημεία με αντίθετη φάση. Δηλαδή όταν το ένα σημείο βρίσκεται σε μέγιστο, το άλλο να βρίσκεται σε ελάχιστο. Τι συμβαίνει στους τριγωνομετρικούς αριθμούς όταν γυρίσουν μισό κύκλο αυτή τη φορά;

$\cos(\varphi\ \pm \pi)$ = *cos(φ) , καθώς το cos είναι άρτια συνάρτηση*

sin(φ $\pm\pi) = -\sin(\varphi)$*, και το sin περιττή*

Στην περίπτωση μας που το κύμα είναι ημίτονο, βλέπουμε ότι όταν το ένα σημείο θέλουμε να είναι στη θέση +Α και το άλλο στην -Α, θα πρέπει να έχουν διαφορά φάσης π.

Δηλαδή : $kx_1 = kx_2 + b\,\pi$ *, όπου b = 1,3,5.....*

Άρα : $x_2 - x_1 = b\,\pi/k$ *ή* $\underline{x_2 - x_1 = b\ \lambda/2\ ,\ όπου\ b = 1,3,5,7 \ldots}$

Που όπως βλέπουμε πήρα μόνο τις περιττές λύσεις, διαφορετικά θα είχα και τα σημεία με την ίδια φάση.

Μπορούμε να το γράψουμε και : ή $\underline{x_2 - x_1 = (2w+1)\ \lambda/2\ ,\ όπου\ w = 0,1,2,3, \ldots}$

Άρα για να βρούμε το σύνολο των σημείων που είναι μεταξύ x_A *= 27cm και* x_B *=36cm και έχουν αντίθετη φάση με την πηγή Ο.*

Θα πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω :

1) $x_2 - x_1 = x_2$, καθώς το x1 = 0 που είναι η συντεταγμένη της πηγής
2) $x_2 - x_1 = (2w+1)\ \lambda/2$, όπως αποδείξαμε παραπάνω με w =0,1,2…
3) $x_A \le x_2 \le x_B$, καθώς θέλουμε να είναι ενδιάμεσα του x_A και x_B .

Συνδυάζοντάς τα :

$$x_A \le (2w+1)\frac{\lambda}{2} \le x_B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 \le (2w+1)\frac{8}{2} \le 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 \le (2w+1)\frac{8}{2} \le 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 \le (2w+1)\frac{8}{2} \le 36 \Leftrightarrow$$

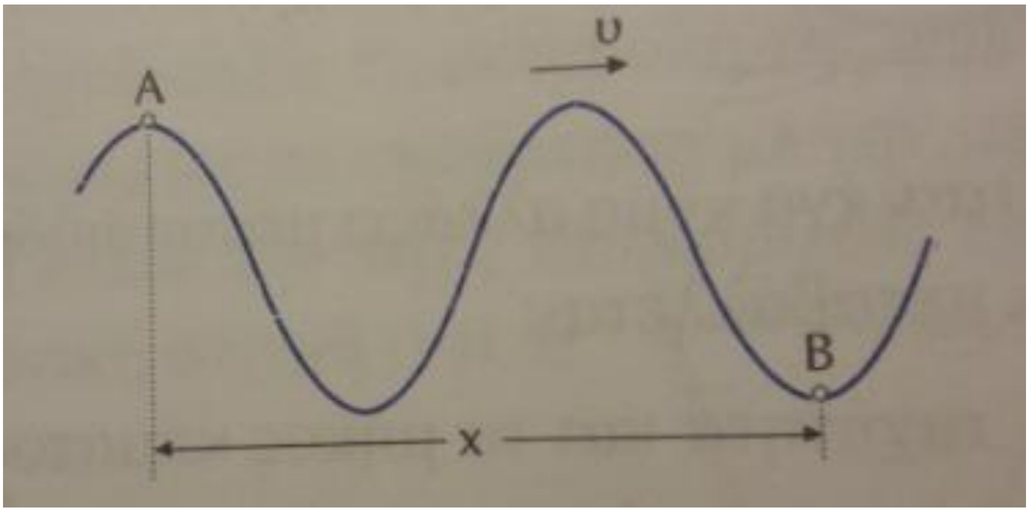
$$\Leftrightarrow 6 \le (2w+1) \le 9$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει για **w = 3** και **w = 4**

Δηλαδή για τα σημεία : **x_{21} = (2x3 +1)x4 =28cm** και **x_{22}= (2x4 + 1)x4 = 36cm**

Ερωτήσεις κατανόησης:

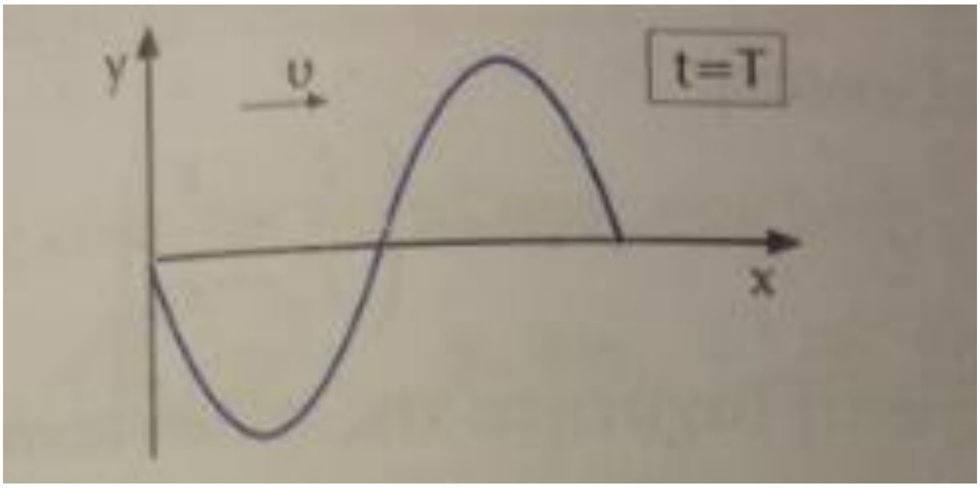
1) Από τα φυσικά μεγέθη που περιλαμβάνονται στην εξίσωση αρμονικού κύματος, αυτό που είναι ανεξάρτητο από όλα τ' άλλα είναι:
   i. Συχνότητα
   ii. Μήκος κύματος
   iii. Ταχύτητα διάδοσης
   iv. Πλάτος
2) Όταν ένα κύμα αλλάζει μέσο διάδοσης, τότε μεταβάλλεται:
   i. Η ταχύτητα και το μήκος κύματος του κύματος
   ii. Η συχνότητα και το μήκος κύματος του κύματος
   iii. Μόνον η ταχύτητα διάδοσης.
   iv. Μόνον το μήκος κύματος του κύματος.
3) Το εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά.



Αν x=12cm, το μήκος κύματος είναι:

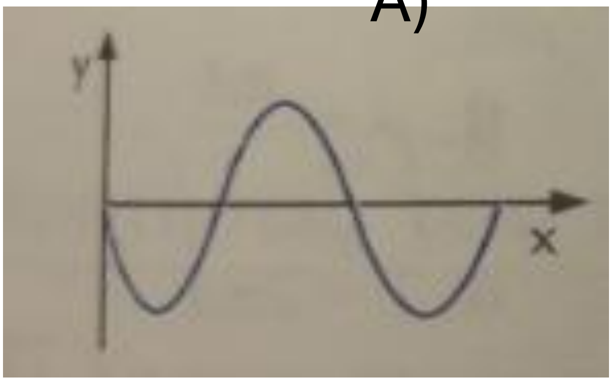
α) $\lambda = 4cm$ β) $\lambda = 8cm$ γ) $\lambda = 6cm$ δ) $\lambda=16cm$

4) Το διάγραμμα του παρακάτω σχήματος παριστάνει το στιγμιότυπο ενός αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t=T, όπου T η περίοδος του κύματος.

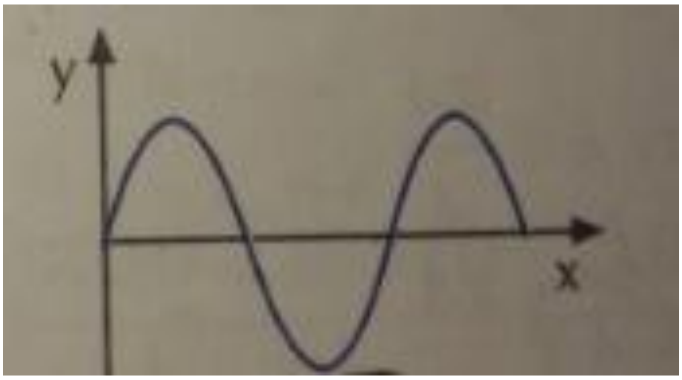


Η μορφή του στιγμιότυπου για t’ = t + T/2 δίνεται από το διάγραμμα:

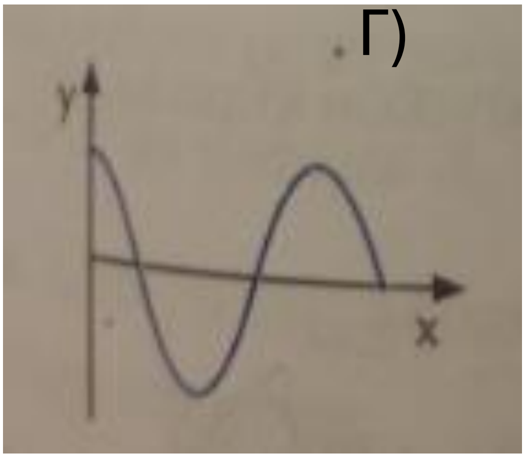
Α)



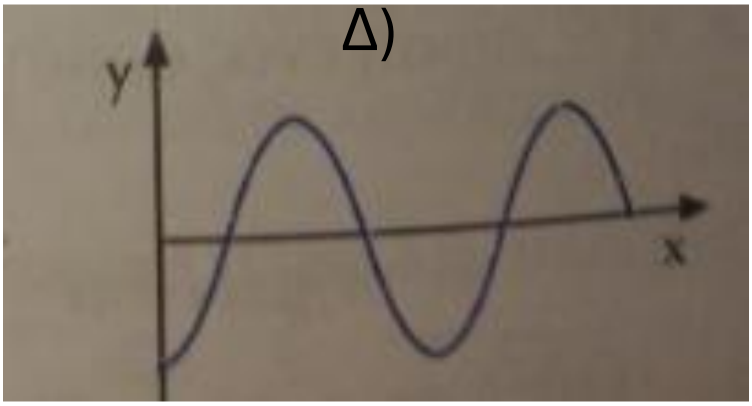
Β)



Γ)



Δ)



5) Το στιγμιότυπο ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται προς το θετικό ημιάξονα περιγράφεται από την εξίσωση:
   a. $\theta(t) = 2\pi\ (\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$
   b. $\mathrm{y} = A\sin\,[2\pi\left(\sigma\tau\alpha\theta. - \frac{x}{\lambda}\right)]$
   c. $\mathrm{y} = A\sin\,[2\pi\left(\frac{t}{T} - \sigma\tau\alpha\theta,\right)]$
   d. $\mathrm{y} = A\sin\,[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda},\right)]$

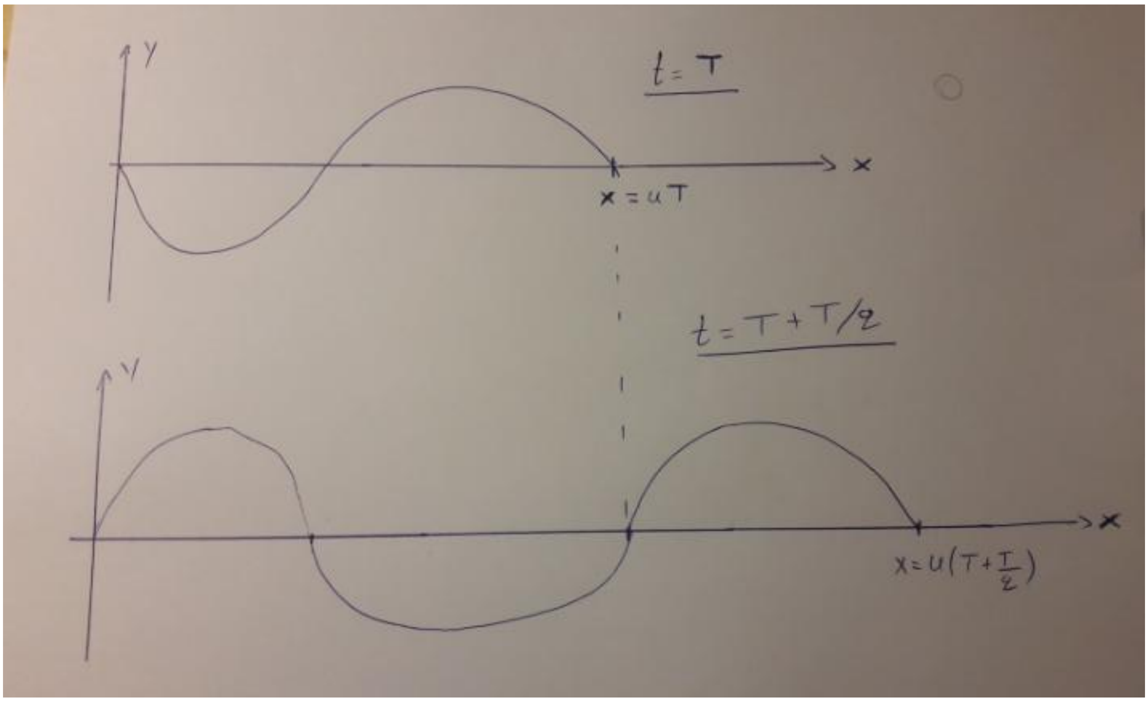
Λύσεις στις ερωτήσεις κατανόησης:

1) Η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου διάδοσης.
   Η συχνότητα εξαρτάται από την πηγή που παράγει τη διαταραχή.
   Λόγω της σχέσης που τα συνδέει u=λf, καταλαβαίνουμε ότι αυτά τα τρία μεγέθη εξαρτώνται άμεσα. Το πλάτος από την άλλη εξαρτάται στο πόση ενέργεια δίνει η πηγή στο σύστημα. Άρα καταλαβαίνουμε ότι είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπά.
   Άρα σωστή απάντηση το <u>**iv**</u>.

2) Όπως είπαμε και παραπάνω, η ταχύτητα εξαρτάται από το μέσο διάδοσης και η συχνότητα από την πηγή. Άρα αφού ισχύει u=λf και αλλάζουμε το μέσο και όχι την πηγή, επειδή η σχέση ισχύει σε κάθε μέσο, προκειμένω να διατηρηθεί η σταθερότητα της συχνότητας, καταλαβαίνουμε ότι και το λ θα αλλάξει, καθώς και το u αφού είπαμε ότι εξαρτάται άμεσα από το μέσο διάδοσης. Άρα σωστή απάντηση το <u>**i**</u>.

3) Το κύμα έχει διαδοθεί απόσταση $x = \lambda + \frac{\lambda}{2}$ άρα λ = 8cm. Σωστή απάντηση το <u>**β)**</u>

4) Η σωστή απάντηση είναι το **Β).** Το κύμα τη χρονική στιγμή t=T. Θα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση x=uT. Τη χρονική στιγμή t= T+T/2 θα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση x=u(T+T/2). Όμως δεν ξεχνάμε ότι το κάθε σημείο του μέσου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Άρα περιμένουμε ότι σε χρόνο T/2 τα σημεία θα βρίσκονται σε αντίθετες απομακρύνσεις απ' ότι σε χρόνο 0 ή T. Σαφώς το κύμα θα προχωρήσει κατά u(T/2), αλλά πρέπει να προσέξουμε τη θέση των σημείων που ταλαντώνονταν ήδη. Δείτε το σχήμα που ακολουθεί:



5) Το στιγμιότυπο αποτελεί "φωτογραφία" του κύματος μία δεδομένη χρονική στιγμή. Δηλαδή μας δίνει πληροφορία για όλο το κύμα τη δεδομένη χρονική στιγμή, για το που έχει φτάσει η διαταραχή και για το ποιες είναι οι απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας του κάθε σημείου του μέσου τη δεδομένη χρονική στιγμή.
Γενικά η εξίσωση που ξέρουμε είναι η εξής:
$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$= *f(x,t)* = *συνάρτηση των x και t*

Στο στιγμιότυπο θέλουμε για μια δεδομένη χρονική στιγμή $t=t_o$, άρα :
$y(x,t_o) = A\sin(kx - \omega t_o) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t_o}{T}\right)\right]$= *f(x)* = *<u>συνάρτηση μόνο x</u>*

Άρα σωστή η ***<u>b)</u>***

Συμβολή κυμάτων

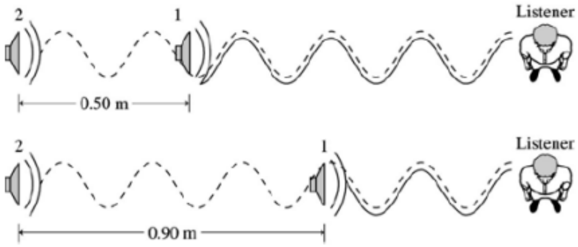
Παράδειγμα 3.31:

Δύο ηχεία εκπέμπουν ηχητικά κύματα κατα μήκος του άξονα $x'x$. Δείτε το Σχήμα 3.45. Ένας ακροατής, που κάθεται μπροστά από τα δύο ηχεία, ακούει την μέγιστη ένταση όταν το ηχείο 2 βρίσκεται στο σημείο $x = 0$ m και το ηχείο ένα $x = 0.5$ m. Όταν το ηχείο 1 μετακινείται αργά προς τα δεξιά, η ένταση του ήχου αρχικά μειώνεται και ύστερα αυξάνεται, φτάνοντας ένα άλλο μέγιστο όταν το ηχείο 1 βρίσκεται στην θέση $x = 0.9$ m.

(α΄) Ποια είναι η συχνότητα του ήχου; Υποθέτουμε ότι $u_{sound} = 340$ m/s.

(β΄) Ποια είναι η διαφορά φάσης ανάμεσα στα δύο ηχεία;

Λύση:
Η ανάμειξη συμβαίνει κατά την διαφορά ανάμεσα στις φάσεις των δυο κυμάτων.



Σχήμα 3.45: Παρατηρητής ηχείων.

(α΄) Η διαφορά φάσης ανάμεσα στα ηχητικά κύματα των δυο ηχείων είναι

$$\Delta\Phi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} + \Delta\phi_0 \tag{3.272}$$

Έχουμε την μέγιστη συχνότητα όταν $\Delta x = 0.5$ m και $\Delta x = 0.9$ m. Επομένως

$$\Delta\Phi = 2\pi\left(\frac{0.5}{\lambda}\right) + \Delta\phi = 2m\pi, \qquad \Delta\Phi = 2\pi\left(\frac{0.9}{\lambda}\right) + \Delta\phi = 2(m+1)\pi \text{ rad} \tag{3.273}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις παίρνουμε

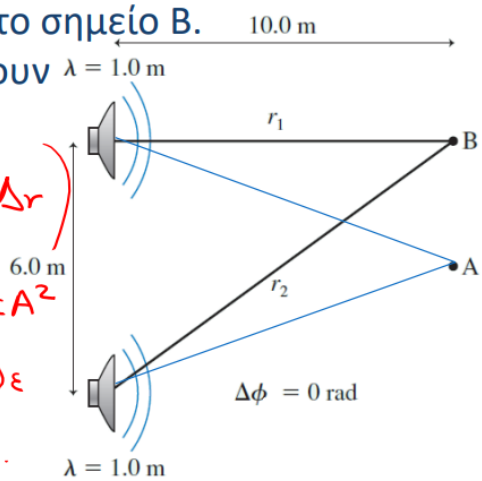
$$2\pi\left(\frac{0.4}{\lambda}\right) = 2\pi \Rightarrow \lambda = 0.4 \Rightarrow f = \frac{u_{sound}}{\lambda} = \frac{340}{0.4} = 850 \text{ Hz} \tag{3.274}$$

(β΄) Από τις εξισώσεις 3.273 βρίσκουμε

$$2\pi\left(\frac{0.5}{0.4}\right) + \Delta\phi = 2m\pi\Big|_{m=1} \text{ rad} \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi - \frac{10\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \tag{3.275}$$

Στην τελευταία εξίσωση βάλαμε m = 1 καθώς συχνά υπολογίζουμε την φάση στο εύρος από −π έως π (ή από 0 έως 2π).

- Δυο ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 6.0 μέτρων και **σε φάση**. Εκπέμπουν μήκος κύματος $\lambda = 1.0$ m. Κάθε ηχείο δημιουργεί ήχο με ένταση I_0. Ένας ακροατής στέκεται στο σημείο A του σχήματος (στη μεσοκάθετο της απόστασης των ηχείων). Ένας δεύτερος ακροατής στέκεται στο σημείο B. Ποιες είναι οι εντάσεις που λαμβάνουν σε όρους I_0?



"σε φάση" $\Longleftrightarrow$ $\underline{\Delta\varphi = 0}$ $\left(\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r\right)$

Κάθε ηχείο προσφέρει ένταση $I_0 = cA^2$

αλλά η αντιληπτή ένταση σε κάθε σημείο A, B θα είναι διαφορετική.