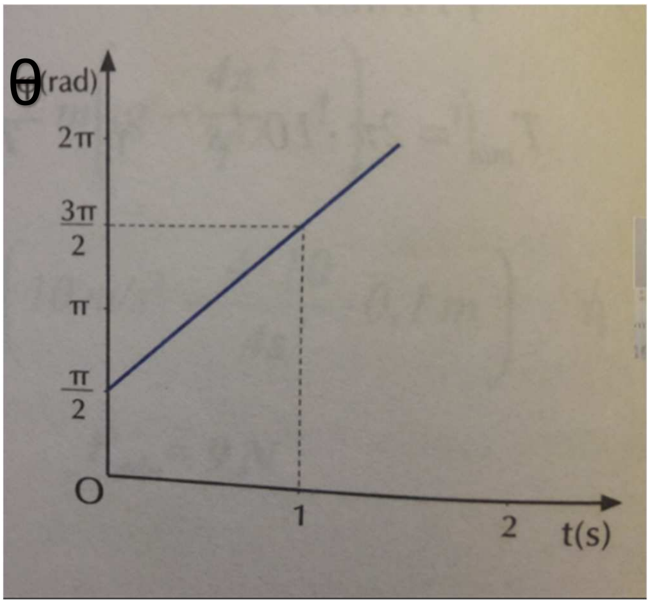
Άσκηση 1

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A = 20cm. Στο διάγραμμα του σχήματος αποδίδεται η μεταβολή της φάσης θ της ταλάντωσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο t.

a) Με τη βοήθεια του διαγράμματος, να προσδιορίσετε την αρχική φάση ϕ_0 και τη γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης.
b) Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης a_{max}, του σώματος.
c) Να γράψετε την εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος.
Δίνεται: $\pi^2 \cong 10$



Άσκηση 2

Το ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο, ενώ στο άλλο άκρο προσδένεται το σώμα μάζας m=2kg, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά x_o=20cm και τη χρονική στιγμή t_o = 0s το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με T=π/5 s.

a) Να υπολογιστεί η σταθερά k του ελατηρίου.
b) Να δικαιολογηθεί αν η ταλάντωση έχει αρχική φάση και αν έχει να βρεθεί.
c) Να γραφεί η εξίσωση ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο
d) Πόσο το έργο της δύναμης επαναφοράς κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου;

Άσκηση 3

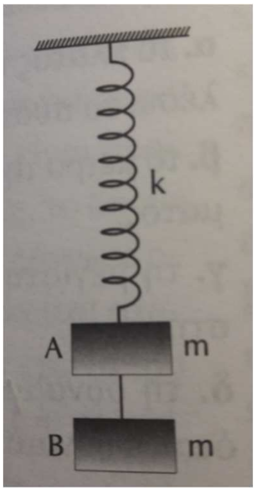
Σώμα μάζας m=2kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Όταν διέρχεται από τις θέσει A1 και A2, με συντεταγμένες x_1=0.3 και x_2=0.4m, το μέτρο της ταχύτητας είναι είναι u1 = 4m/s και u2 = 3m/s, αντίστοιχα.

a) Να υπολογιστεί η γωνιακή συχνότητα ω, της ταλάντωσης.
b) Να υπολογιστεί το πλάτος της ταλάντωσης.
c) Να υπολογιστεί ο λόγος των μέτρων των δυνάμεων επαναφοράς F_1/F_2 στις θέσεις A_1 και A_2,αντίστοιχα.
d) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης επαναφοράς κατά τη μετατόπιση από το A_1 στο A_2.

Άσκηση 4

Ένα σώμα Σ1 μάζας m=0.5kg έχει στερεωθεί στο ελεύθερο άκρο, κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=50N/m. Ένα δεύτερο σώμα Σ2 ίδιας μάζας έχει δεθεί με αβαρές νήμα κάτω από το Σ1. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Τη χρονική στιγμή t=0, κόβεται το νήμα και το σύστημα ελατήριο-Σ1 ξεκινά απλή αρμονική ταλάντωση κατά τον κατακόρυφο άξονα. Να βρεθούν τα παρακάτω:

a) Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης ω.
b) Το πλάτος της ταλάντωσης.
c) Η ολική ενέργεια ταλάντωσης.
d) Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.
Δίνεται g = 10m/s^2



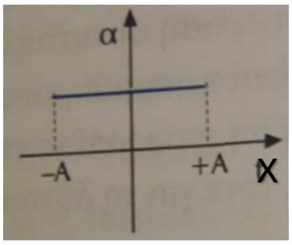
Ερωτήσεις κατανόησης:

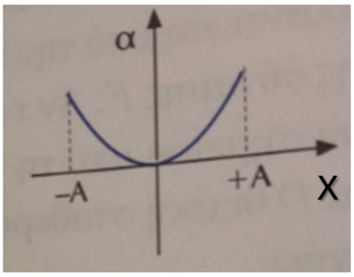
1) Στο άκρο ενός ελατηρίου είναι προσδεμένο ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωσης. Αν το ελατήριο αντικατασταθεί με ένα άλλο τετραπλάσιας σταθεράς, η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος:

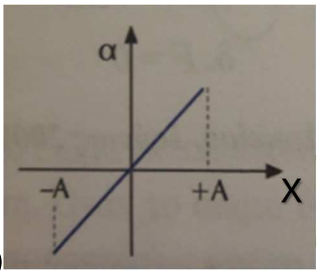
a) Διπλασιάζεται
b) Υποδιπλασιάζεται
c) Τετραπλασιάζεται
d) Παραμένει η ίδια

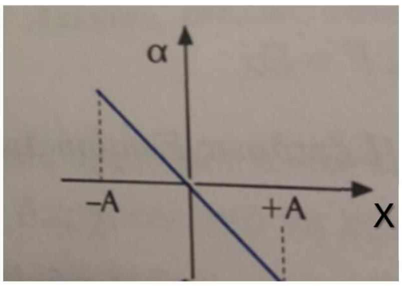
2) Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, προσαρτημένο σε ελατήριο σταθεράς k, σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας:
   a. Η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν.
   b. Η επιτάχυνση του είναι μέγιστη.
   c. Η δύναμη επαναφοράς είναι μηδέν.
   d. Η δυναμική του ενέργεια είναι μέγιστη.

3) Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα παριστάνει τη μεταβολή της επιτάχυνσης α του σώματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x του σώματος , από τη θέση ισορροπίας:

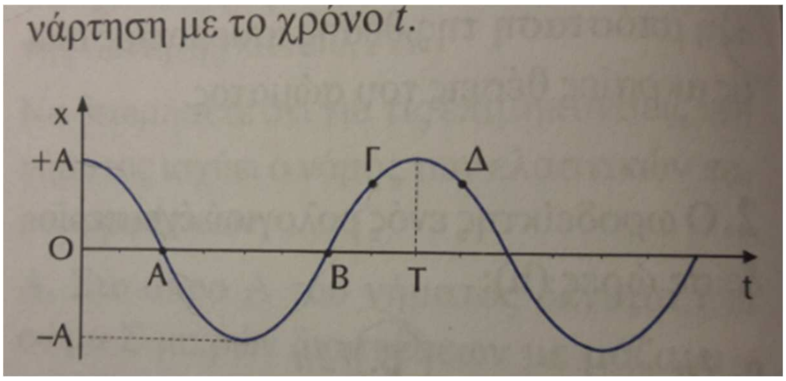
a) 

b) 

c) 

d) 

4) Στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος παριστάνεται γραφικά η μεταβολή της απομάκρυνσης x ενός σώματος, που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, συνάρτηση με το χρόνο t.

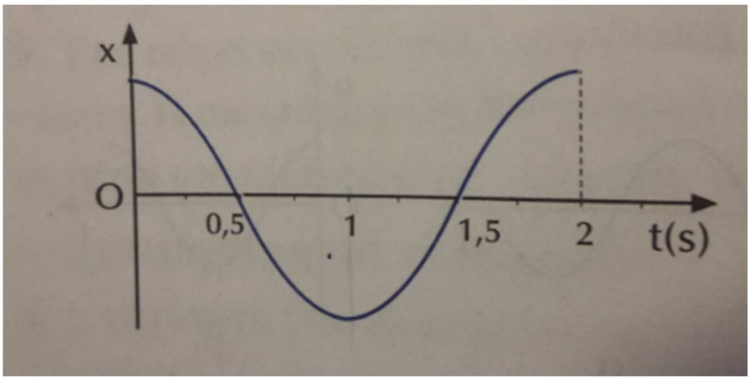


Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος έχουν αντίθετη κατεύθυνση τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί :

a) Στο σημείο Α b) Στο σημείο Γ

c) Στο σημείο Β d) Στο σημείο Δ

5) Το διάγραμμα του σχήματος δείχνει τη μεταβολή της απομάκρυνσης x σε συνάρτηση με το χρόνο t, για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



Χαρακτηρίστε ως ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ τις ακόλουθες προτάσεις:

a) Το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο, όταν t=1s.
b) Η μετατόπιση είναι μέγιστη, όταν t=2s.
c) Η δύναμη επαναφοράς είναι μηδέν, όταν t=0.5s
d) Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο, όταν t=2s.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις :

1) Ξέρουμε ότι : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\kappa\alpha\iota\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Άρα $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Η εκφώνηση λέει ότι τετραπλασιάζουμε τη σταθερά k άρα

$k_{μετά} = 4\ k_{πριν}$

Άρα : $\frac{T_{πριν}}{T_{μετα}} = \frac{\sqrt{\frac{m}{k_{πριν}}}}{\sqrt{\frac{m}{k_{μετά}}}} = \frac{\sqrt{4k_{μετά}}}{\sqrt{k_{πριν}}} = 2$

Άρα : $T_{μετα} = \frac{1}{2} T_{πριν}$, **<u>Σωστή απάντηση το b.</u>**

2) a) Στη θέση ισορροπίας η ταχύτητα είναι μέγιστη, άρα σαφώς $K = K_{max}$
   a) Αφού είναι στη θέση ισορροπίας σημαίνει ότι ΣF = 0 ⇔ma = 0 ⇔ a = 0
   b) $F_{επ} = -kx$, και είμαστε στη θέση ισορροπίας όπου x= 0. Σαφώς $F_{επ} = 0$
   c) $U = 0.5\ k\ x^2$. $U = U_{max}$ μόνο όταν $x = x_{max}$.

<u>Άρα σωστή μόνο η c</u>

3) Ξέρουμε : $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

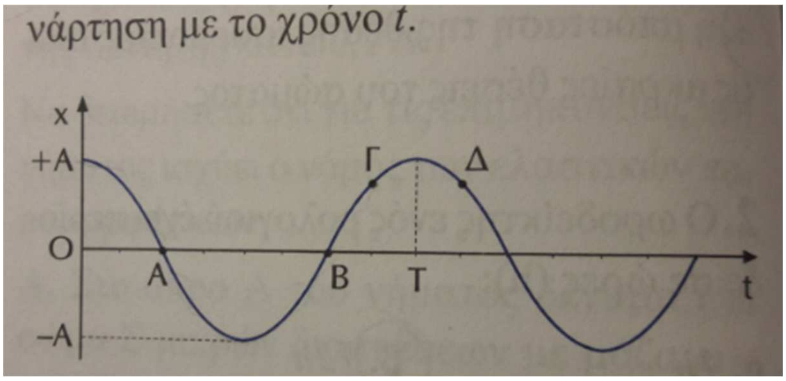
$$u(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\alpha(t) = \frac{du}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

a(t) = $-A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2\ (A\cos(\omega t + \varphi_0)) = -\omega^2\ x(t)$

Βλέπου δηλαδή ότι η σχέση του a(t) Και του x(t) είναι γραμμική με κλίση : $-\omega^2$
Σαφώς θα μεταβάλλονται γραμμικά τα δύο μεγέθη απλά όταν το ένα θα είναι θετικό το άλλο θα είναι αρνητικό! ***<u>Άρα το διάγραμμα d) είναι το σωστό!</u>***

4)



Στο σημείο Α το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας και κατευθύνεται προς τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης προς την αρνητική φορά του άξονα. Επειδή βρίσκεται στη θέση ισορροπίας η ταχύτητα είναι μέγιστη με αρνητική φορά και η επιτάχυνση μηδέν.

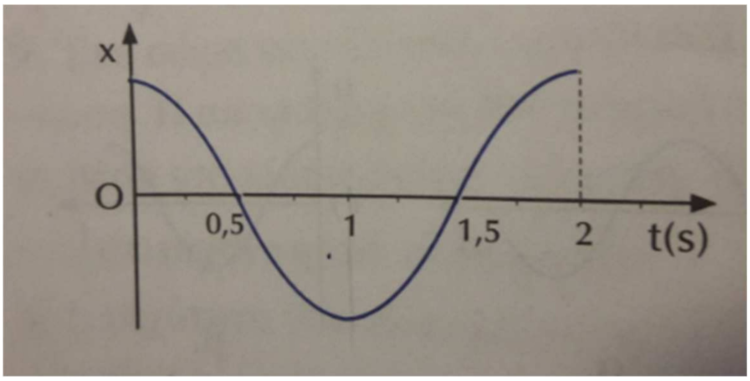
Στο σημείο Β ισχύει το ίδιο με το παραπάνω με τη μόνη διαφορά, ότι αυτή τη φορά κατευθύνεται προς το θετικό ημιάξονα, άρα θα έχει μέγιστη θετική ταχύτητα και επιτάχυνση μηδέν.

Στο σημείο Γ, κατευθύνεται προς τη θετική ακραία θέση. Η δύναμη του ελατηρίου που κοιτάει πάντα προς τη θέση φυσικού μήκους επιβραδύνει το σώμα. Άρα έχουμε επιβράδυνση και άρα οι φορές των μεγεθών της ταχύτητας και της επιτάχυνσης είναι αντίθετες.

Στο σημείο Δ, το σώμα κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας. Η δύναμη επαναφοράς δείχνει πάντα προς τη θέση φυσικού μήκους, είναι ομόρροπη με την κίνηση, άρα έχουμε επιτάχυνση.

Άρα η ταχύτητα και η επιτάχυνση κοιτάνε προς τη θέση ισορροπίας.

<u>Σωστή απάντηση λοιπόν η c</u>



5)

a) *Το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο, όταν t=1s.*
Για t=1s , Το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση. Συνεπώς u=0.
Άρα ***ΛΑΘΟΣ!***

b) *Η μετατόπιση είναι μέγιστη, όταν t=2s.*
Για t=2s, το σώμα βρίσκεται σε θέση μέγιστης απομάκρυνσης.
Σαφώς ναι, η μετατόπιση είναι μέγιστη, άρα ***ΣΩΣΤΟ!***

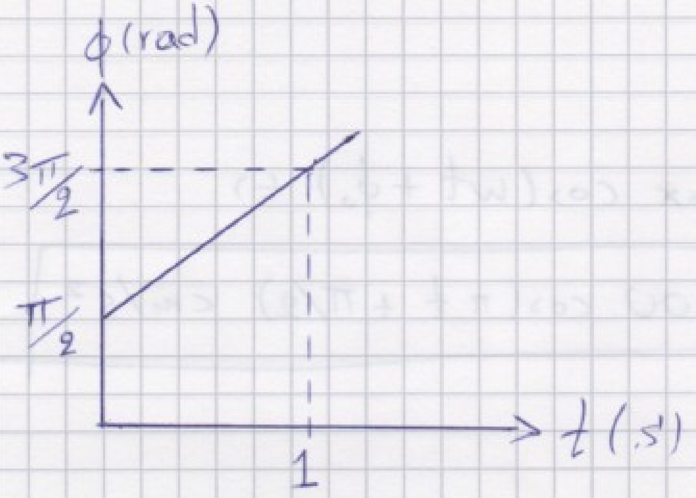
c) *Η δύναμη επαναφοράς είναι μηδέν, όταν t=0.5s*
Το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας, η οποία είναι και θέση φυσικού μήκους για το οριζόντιο ελατήριο. F=-kx για x=0 μας κάνει F=0. ***ΣΩΣΤΟ!***

d) *Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο, όταν t=2s.*

Μπορούμε να το δούμε με διάφορους τρόπους ότι είναι σωστό, όταν βρίσκεται σε κάποια ακραία θέση το σώμα, η επιτάχυνση να έχει το μέγιστο μέτρο, ας χρησιμοποιήσουμε τον τύπο που δείξαμε σε προηγούμενη άσκηση: $a(t) = -\omega^2 x(t)$

Όταν λοιπόν $x = x_{max}$ *τότε και το* $a = a_{max}$ *κατά μέτρο. Συνεπώς* ***ΣΩΣΤΟ!***

Λύσεις των ασκήσεων:



ΑΑΤ

$A = 20\,cm$

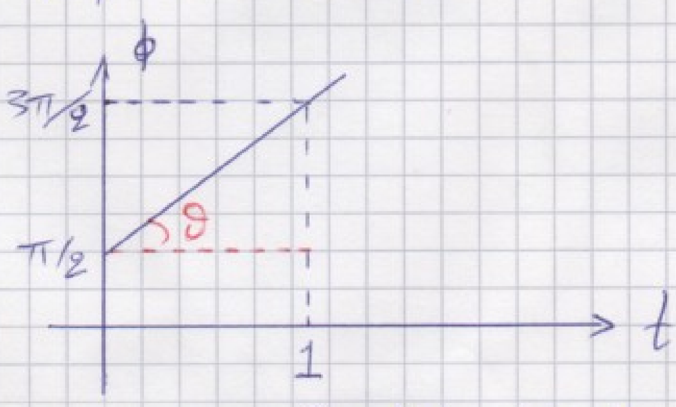
$\pi^2 \approx 10$

α) Εύρεση αρχικής φάσης και γωνιακής συχνότητας:

$\phi = \omega t + \phi_0$: εξίσωση ευθείας με κλίση $= \omega$ και διατομή $= \phi_0$

$t = 0 : \phi(t=0) = \phi_0 \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2} = \phi_0}$

Εύρεση κλίσης:



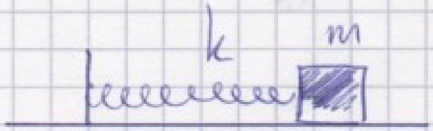
$$\tan\theta = \frac{(3\pi/2) - (\pi/2)}{1} = \pi$$

$\omega = \tan\theta \Rightarrow \boxed{\omega = \pi\ rad/s}$

β) $a_{max} = \omega^2 A \Rightarrow \boxed{a_{max} = 200\ cm/s^2}$

γ) $a = -a_{max} \cos(\omega t + \phi_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{a = -200 \cos(\pi t + \pi/2) \ cm/s^2}$



$m = 2kg$
$x_0 = 20\ cm$
$T = \pi / 5\ s$

α) $w = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m \Leftrightarrow k = 200\ N/m$

β) $t = 0 \rightarrow x(0) = +x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 = 20\cos\phi_0 \rightarrow \cos\phi_0 = 1$

Άρα $\phi_0 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ k = 0, \pm1, \pm2 \dots$

$\cos(\phi + 2k\pi) = \cos(\phi)\cos(2k\pi) - \sin\phi\sin(2k\pi) =$
$= \cos\phi,\ \forall k \mathbb{Z}$

Άρα διαλέγω $k = 0$

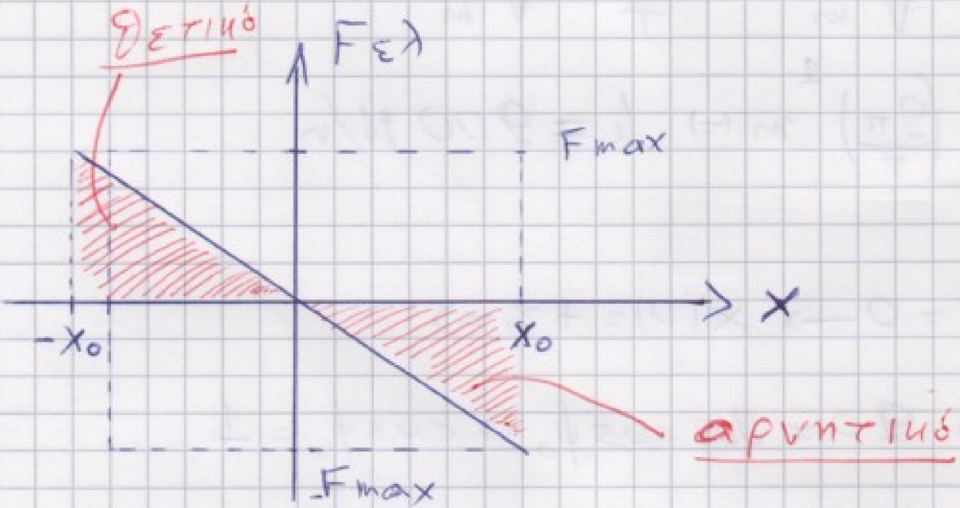
γ) $x(t) = 20\cos(10t)$

$u(t) = \frac{dx}{dt} = -200\sin(10t)\ cm/s$

$a(t) = \frac{du}{dt} = -2000\cos(10t)\ cm/s^2$

δ) για $\Delta t = T$ θα έχει πάει από τη θέση $+x_0$ στην ίδια θέση, καθώς θα έχει επιτελέσει μια πλήρη ταλάντωση: $W = \int_{x_0}^{x_0} \vec{F}_{\varepsilon\lambda}\, d\vec{x} = 0$

Διαφορετικά το βλέπουμε και από τη συμμετρία της γραφικής:



$F_{max} = k x_0 = (\omega^2 m) x_0 = 200 \cdot 20 \cdot 10^{-2} = 40N$

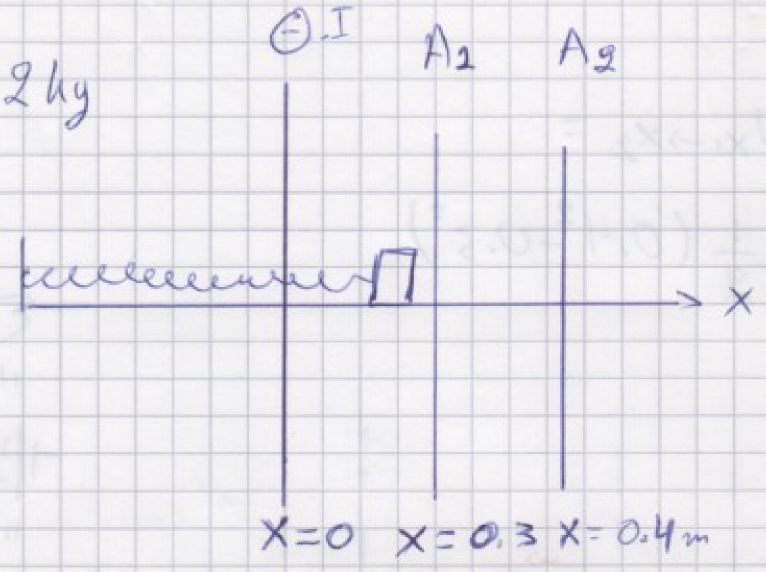
$W_+ = 40 \cdot 0.2\ J$ <u>Σε χρόνο μιας περιόδου</u>

$W_- = -40 \cdot 0.2\ J$

$\boxed{W_{o\lambda} = W_+ + W_- = 0}$

$m = 2kg$

1.37



α) Ολική ενέργεια ταλάντωσης = <u>ΣΤΑΘΕΡΗ</u>

Άρα: $K_{A1} + U_{A1} = K_{A2} + U_{A2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} m u_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 200 N/m$

$w = \sqrt{k/m} \Leftrightarrow \boxed{w = 10 rad/s}$

β) $K_{A1} + U_{A1} = U_{max} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} k x_{max}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{m u_1^2}{k} + x_1^2} \Leftrightarrow$

$\boxed{x_{max} = 0.5 m}$

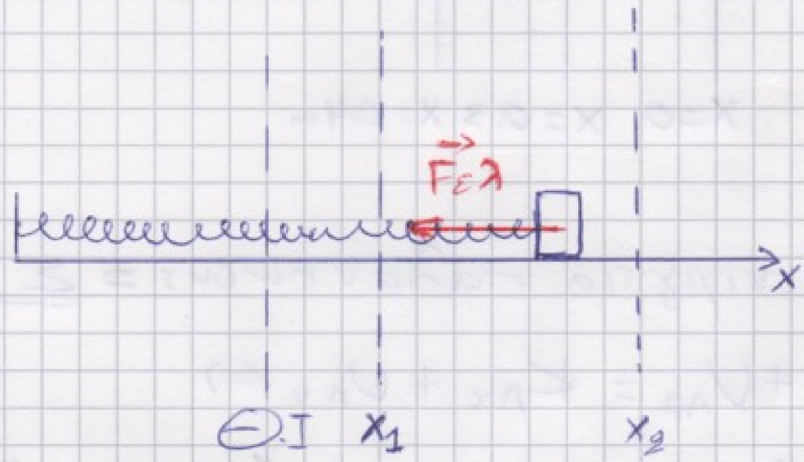
γ) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{k x_1}{k x_2} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$

δ) $W_{x_1 \to x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} d\vec{x} = - \int_{x_1}^{x_2} kx \, dx = - \frac{kx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2}$

Άρα: $W_{x_1 \to x_2} =$

$$= -200\,\frac{1}{2}\left(0.4^2 - 0.3^2\right)$$

$$= -7\,J$$



$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -\hat{i}\,F_{\varepsilon\lambda}, \quad x_1 \le x \le x_2$$

$$d\vec{x} = \hat{i}\,dx, \quad x_1 \le x \le x_2$$

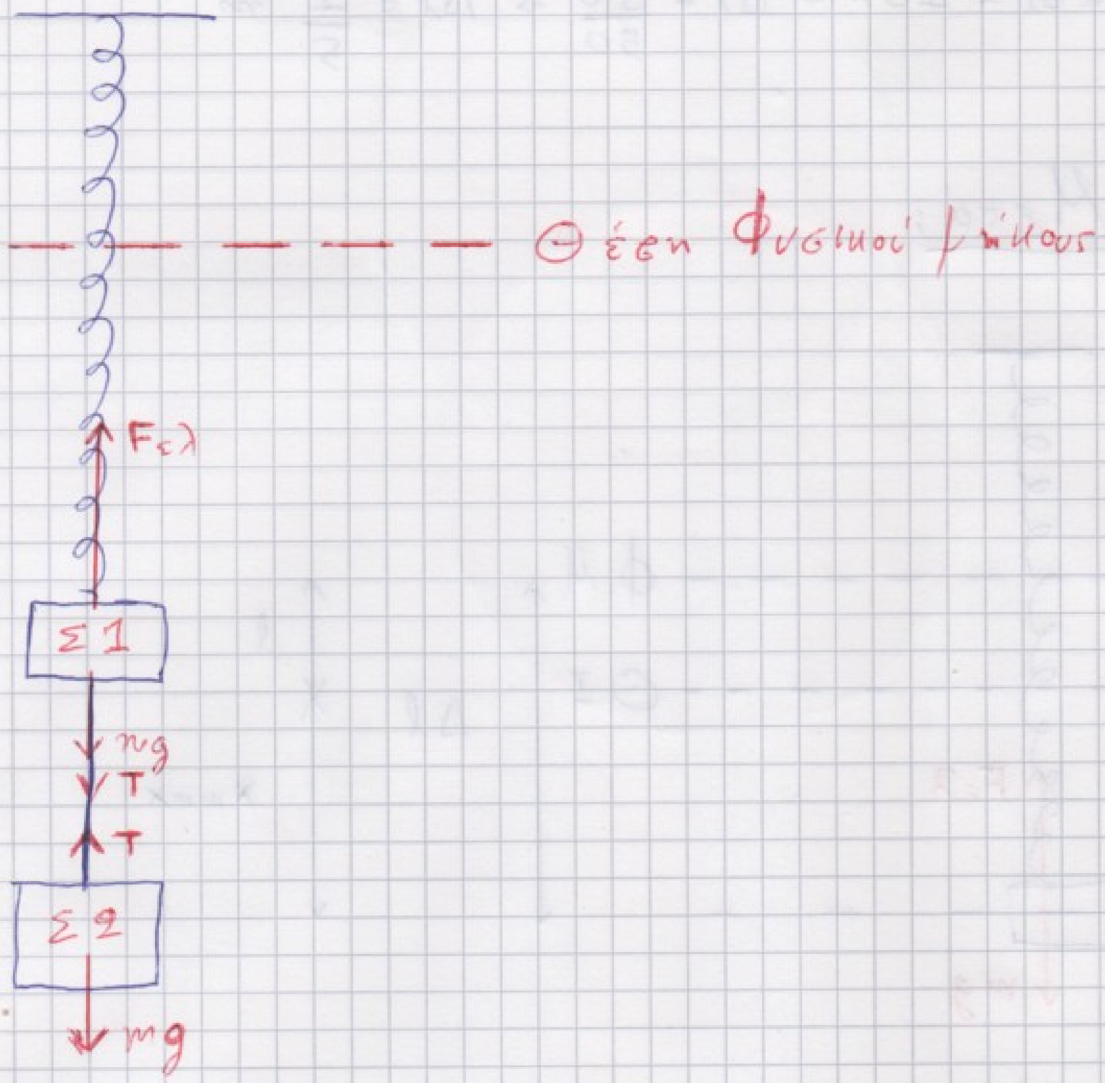
Άρα $\vec{F}_{\varepsilon\lambda} \cdot d\vec{x} = -F_{\varepsilon\lambda}\,dx$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\,\omega^2$$

1.45

Αρχικά



Αρχικά το σύστημα <u>ισορροπεί!</u>

Σ2: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T = mg \Rightarrow T = 5N$

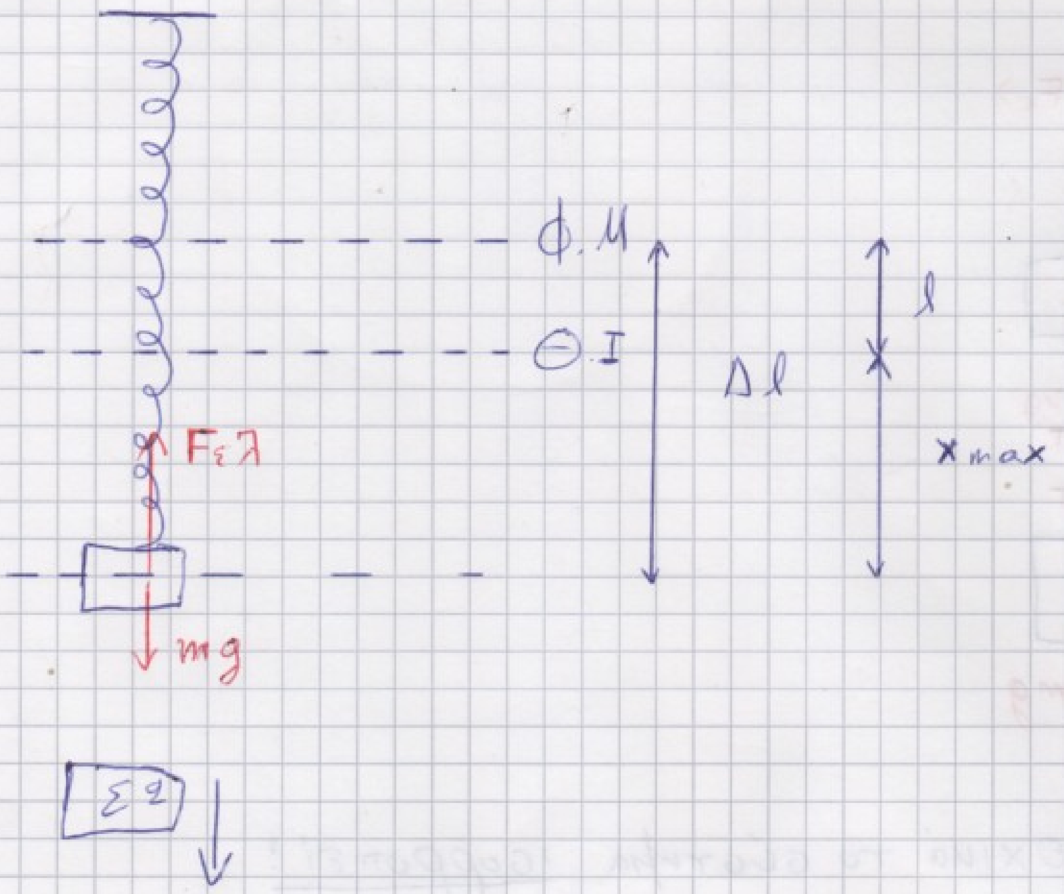
Σ1: $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = mg + T \Rightarrow F_{ελ} = 10N$

Η $F_{ελ}$ μηδενίζει όταν βρίσκεται το ελατήριο στο φυσικό του μήκος.

Άρα αφού $F_{ελ} = k\Delta l$, οπού Δl η απόσταση από το φυσικό μήκος:

$$k\Delta l = 10N \Rightarrow \Delta l = \frac{10}{50} \Rightarrow \Delta l = \frac{1}{5}\ m$$

<u>Μετά:</u>



α) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{0.5}} = 10\,rad/s$

β) $\Delta l = l + x_{max}$

Στη Θ.Ι. θα ισχύει $\Sigma F = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow mg - k(x+l)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow l = \frac{5}{50} \Rightarrow l = \frac{1}{10}\ m$

Άρα: $x_{max} = \Delta l - l \Rightarrow \boxed{x_{max} = 0.1\ m}$

γ) $E = \frac{1}{2} k x_{max}^2 \Rightarrow \boxed{E = 0.25\ J}$

δ) Αφού $x_{max} = l$ άρα καταλαβαίνουμε ότι το σώμα διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους σε μία ταλάντωση.
Άρα $F_{min} = 0$

Η μέγιστη θα είναι όταν βρίσκεται στην κάτω ακραία: $F_{max} = k(x_{max} + l) = \underline{10\,N}$