Παράδειγμα 2.26:

Μια σφαίρα μάζας $m = 0.1$ kg εκτοξεύεται από ένα τουφέκι με κάννη μήκους 0.6 m. Η δύναμη που ασκείται στη σφαίρα από τα αέρια του όπλου είναι

$$F(x) = 15000 + 10000x - 25000x^2 \tag{2.240}$$

με x να μετριέται σε μέτρα και τη δύναμη $F(x)$ σε Newton. Βρείτε το έργο που παράγεται από τα αέρια στη σφαίρα όσο αυτή ταξιδεύει κατά μήκος της κάννης. Θεωρήστε τη διαδρομή ευθύγραμμη.

Λύση: Θεωρούμε ότι τα αέρια ξεκινούν να παράγουν έργο στη σφαίρα όταν αυτή ξεκινά να κινείται ($x = 0$) εως ότου αυτή βγει από την κάννη ($x = 0.6$). Η κίνηση θεωρείται ευθύγραμμη, άρα η δύναμη και η μετατόπιση είναι συγγραμμικές και το εσωτερικό γινόμενό τους αποτελεί το αλγεβρικό γινόμενο του μέτρου καθεμιάς. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{x} \tag{2.241}$$

$$= \int_0^{0.6} (15000 + 10000x - 25000x^2)dx \tag{2.242}$$

$$= \left(15000x + \frac{10000}{2}x^2 - \frac{25000}{3}x^3\right)\Big|_0^{0.6} \tag{2.243}$$

$$= 9000 + 18000 - 18000 = 9000 \text{ J} \tag{2.244}$$

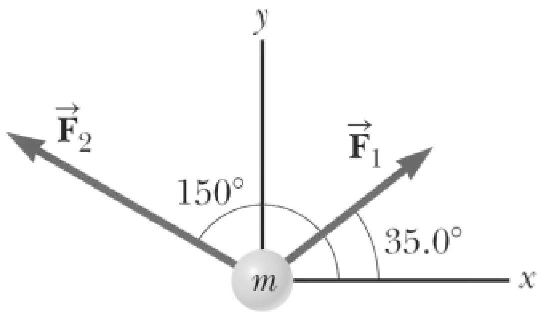
Παράδειγμα 2.28:

Δυο σταθερές δυνάμεις ασκούνται σε ένα σώμα μάζας $m = 5$ kg που κινείται στο xy επίπεδο, όπως στο Σχήμα 2.53. Η δύναμη $\vec{F}_1$ έχει μέτρο 25 N και ασκείται υπό γωνία 35°, και η δύναμη $\vec{F}_2$ έχει μέτρο 42 N και ασκείται υπό γωνία 150°. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σώμα βρίσκεται στο σημείο (0,0) και έχει ταχύτητα $(4\vec{i} + 2.5\vec{j})$ m/s.

i. Εκφράστε τις δυο δυνάμεις με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων.
ii. Βρείτε τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκείται στο σώμα.
iii. Δείξτε ότι η επιτάχυνση του σώματος ισούται με

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = (-3.18\vec{i} + 7.07\vec{j})\ m/s^2 \tag{2.271}$$

iv. Θεωρήστε τη χρονική στιγμή $t = 3$ s. Βρείτε
   (α′) την ταχύτητα του σώματος
   (β′) τη θέση του σώματος
   (γ′) την κινητική του ενέργεια, με τη σχέση $\frac{1}{2}mu_{t=3}^2$
   (δ′) την κινητική του ενέργεια, με τη σχέση $\frac{1}{2}mu_{t=0}^2 + \sum(\vec{F} \cdot \Delta\vec{r})$
   (ε′) Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε από τις απαντήσεις σας στα δυο παραπάνω ερωτήματα;



Σχήμα 2.53: Εφαρμογή ΘΜΚΕΕ και η σχέση του με την κινητική.

Λύση:

i. Οι δυο δυνάμεις γράφονται ως

$$\vec{F}_1 = 25(\cos 35^\circ \vec{i} + \sin 35^\circ \vec{j}) = 20.5\vec{i} + 14.3\vec{j}\ \mathrm{N} \tag{2.272}$$

$$\vec{F}_2 = 42(\cos 150^\circ \vec{i} + \sin 150^\circ \vec{j}) = -36.4\vec{i} + 21.0\vec{j}\ \mathrm{N} \tag{2.273}$$

ii. Θα είναι

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-15.9\vec{i} + 35.3\vec{j})\ \mathrm{N} \tag{2.274}$$

iii. Η επιτάχυνση του σώματος ισούται με

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = (-3.18\vec{i} + 7.07\vec{j})\ \mathrm{m/s^2} \tag{2.275}$$

iv. Τη χρονική στιγμή $t = 3$ s,

(α′) ϑα είναι

$$\vec{u}_f = \vec{u}_i + \vec{a}t = -5.54\vec{i} + 23.7\vec{j}\ \mathrm{m\ /s} \tag{2.276}$$

(β′) ϑα ειναι

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{u}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = -2.30\vec{i} + 39.3\vec{j}\ \mathrm{m} \tag{2.277}$$

(γ′) με τη σχέση $\frac{1}{2}mu_{t=3}^2 \approx 1.48$ kJ

(δ′) με τη σχέση $\frac{1}{2}mu_{t=0}^2 + \sum(\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}) = 55.6 + 1426 \approx 1480$ J, δηλ. 1.48 kJ

(ε′) Το ϑεώρημα κινητικής ενέργειας - έργου είναι συνεπές με το 2ο νόμο του Newton.

Παράδειγμα 2.29:

Όταν ένας οδηγός πατάει το γκάζι σε ένα ακίνητο αυτοκίνητο, το αυτοκίνητο επιταχύνει. Για τα πρώτα λίγα δευτερόλεπτα της κίνησής του, η επιτάχυνσή του αυξάνεται με το χρόνο σύμφωνα με την έκφραση

$$a(t) = 1.16t - 0.21t^2 + 0.24t^3 \tag{2.278}$$

με t το χρόνο σε δευτερόλεπτα και την επιτάχυνση $a(t)$ σε m/s^2. Δείξτε ότι - απουσία τριβών ή άλλης απώλειας ενέργειας - η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου μάζας $m = 1160$ kg κατά το διάστημα $t = 0$ ως $t = 2.5$ s είναι 1.38×10^4 J.

Λύση: Για να βρούμε τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου, γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση αποτελεί παράγωγο της ταχύτητας, άρα θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς t.

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t a(u)du = \int_0^t (1.16u - 0.21u^2 + 0.24u^3)du && (2.279) \\ &= 1.16\frac{u^2}{2} - 0.21\frac{u^3}{3} + 0.24\frac{u^4}{4}\Big|_0^t && (2.280) \\ &= 0.58t^2 - 0.07t^3 + 0.06t^4 && (2.281) \end{aligned}$$

Για $t = 0$, $u_i = 0$. Σε $t = 2.5$ s, θα έχουμε

$$u_f = 0.58 \cdot 2.5^2 - 0.07 \cdot 2.5^3 + 0.06 \cdot 2.5^4 = 4.88 \text{ m/s} \tag{2.282}$$

Άρα η μεταβολή στην κινητική ενέργεια, δεδομένου ότι αρχικά το αυτοκίνητο ήταν ακίνητο, θα είναι

$$\Delta K = K_f - K_i = K_f - 0 = \frac{1}{2}mu_f^2 = 1.38 \times 10^4 \text{ J} \tag{2.283}$$

Παράδειγμα 2.30:

Μια δύναμη ασκείται σε ένα σώμα 3.0 kg ενώ αυτό κινείται με βάση τη σχέση

$$x(t) = 3.0t - 4.0t^2 + 1.0t^3 \tag{2.284}$$

με x σε μέτρα και t σε δευτερόλεπτα. Δείξτε ότι το έργο της δύναμης από $t = 0$ ως $t = 4$ sec είναι $W_F = 528$ J. Θεωρήστε ως σύστημα το σώμα.

Λύση: Γνωρίζουμε από τις εξισώσεις της Κινητικής ότι η στιγμιαία ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x(t)$, δηλ.

$$u(t) = \frac{d}{dt}x(t) = 3.0 - 8.0t + 3.0t^2 \tag{2.285}$$

και αντικαθιστώντας για $t = 0$ και $t = 4$ s, παίρνουμε

$$u(0) = 3.0 \text{ m/s και } u(4) = 19 \text{ m/s} \tag{2.286}$$

Από το ΘΜΚΕ-Ε επάνω στο σύστημα σώμα, έχουμε

$$\Delta K = W_F \Longleftrightarrow W_F = \frac{1}{2}mu(4)^2 - \frac{1}{2}mu(0)^2 = 528 \text{ J} \tag{2.287}$$

- *Έργο σταθερής δύναμης :*

Άσκηση 1

Βρείτε το έργο που παρήγαγε μία δύναμη $\vec{F} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$, κατά την κίνηση ενός αντικειμένου κατά μήκος ενός διανύσματος $\vec{r} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 5\hat{k}$.

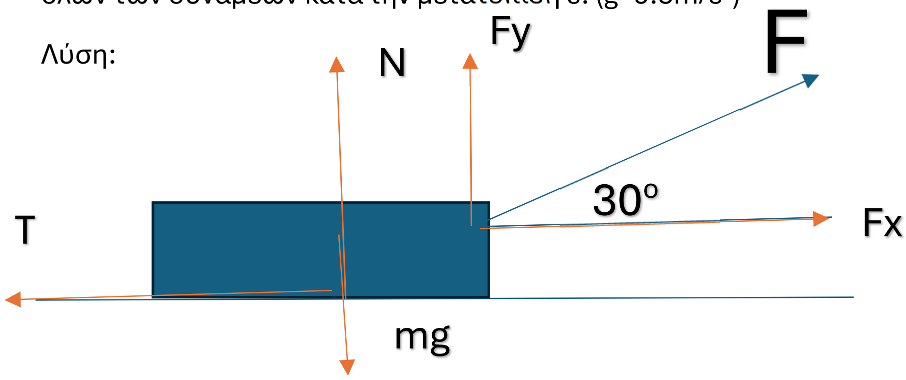
Λύση:

$$W = \vec{F}\,\vec{r} = 2x3 - 2 + 5 = 9$$

Άσκηση 2

Μια δύναμη F που σχηματίζει γωνία 30° με το οριζόντια επίπεδο μετακινεί σώμα μάζας m= 45kg κατά διάστημα s=100m με σταθερή ταχύτητα. Ο συντελεστής τριβής μ=0.1. Υπολογίστε τα έργα όλων των δυνάμεων κατά την μετατόπιση s. ($g=9.8m/s^2$)

Λύση:



Ανάλυση της F σε x και y συνιστώσα:

F_x = F sin(30°) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ F

F_y = F cos(30°)= $\frac{1}{2}$ F

Άξονας x : Η εκφώνηση λέει σταθερή ταχύτητα, άρα :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_x = T \Leftrightarrow F_x = \mu N \quad ,(1)$$

Άξονας y : Ισορροπία, άρα:

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow F_y + N = mg \Leftrightarrow F_y + N = mg \ \Leftrightarrow N = mg - F_y, (2)$$

Από (1) και (2) και από τις σχέσεις F_x και F_y έχω :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}F = \mu(mg - \frac{1}{2}\text{ F}) \Leftrightarrow F\,(\frac{1}{2}\mu + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \mu\, mg \Leftrightarrow F = \frac{\mu\, mg}{(\frac{1}{2}\mu + \frac{\sqrt{3}}{2})}$$

Άρα βάζοντας τιμές <u>F ≈48.14 N</u>

- Έργα των δυνάμεων :

W_F = $\vec{F}\,\vec{s}$ = 48.14 x 100 x cos(30)= 4913 $\sqrt{3}\frac{1}{2} \approx 4169\ J$

$W_{\square} = \vec{T}\,\vec{s} \; = T\, s \cos(180^0) = \; -\mu N\; x\; 100m = \; -0.1\; (45x9.8 - 0.5x48.14)\; 100 \approx -4169\, J$

$W_N = \vec{N}\,\vec{s} = N\hat{j}\; s\; \hat{\imath} = N\; s\; \cos\,(90^o) = 0$

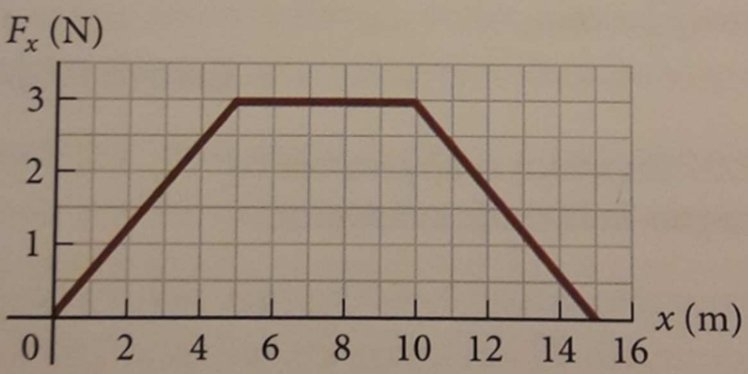
$W_{mg} = m\vec{g}\;\vec{s} = mgs\; \cos\,(270^0) = 0$

Τι παρατηρούμε ;

Θυμηθείτε ότι το $\vec{s} = s\;\hat{\imath}$, ότι δηλαδή το διάνυσμα της μετατόπισης είναι επάνω στον οριζόντια άξονα, άρα οποιαδήποτε δύναμη κάθετη στο διάνυσμα $\hat{\imath}$ θα δώσει εσωτερικό γινόμενο μηδέν.

Γι’ αυτό εξάλλου και στο έργο της δύναμης F, έπαιξε ρόλο μόνο η x- συνιστώσα.

15. Ένα σωματίδιο δέχεται μια δύναμη F_x η οποία μεταβάλλεται με τη θέση όπως φαίνεται στην Εικόνα Π Μ7.15. Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη καθώς μετατοπίζει το σωματίδιο (α) από το σημείο $x = 0$ στο σημείο $x = 5.00$ m, (β) από το $x = 5.00$ m στο $x = 10.0$ m, και (γ) από το $x = 10.0$ m στο $x = 15.0$ m. (δ) Ποιο είναι το συνολικό έργο που παράγει η δύναμη κατά τη μετατόπιση από το σημείο $x = 0$ έως το σημείο $x = 15.0$ m;



Εικόνα Π Μ7.15 Προβλήματα 15 και 34.

Λύση:

Ορισμός έργου μιας δύναμης:

$$W_F = \int_{P_1}^{P_2} F\, dx$$

Το ολοκλήρωμα όμως δεν είναι ένα εμβαδό.

Στην παρούσα άσκηση τα εμβαδά είναι απλά.

Α) $W_{0\to5} = \frac{(βάση)x(ύψος)}{2} = \frac{1}{2}(5)(3) = 7.5\, J$

Β) $W_{5\to10} = (βάση)x(ύψος) = (10-5)x(3) = 15\, J$

Γ) $W_{10\to15} = \frac{(βάση)x(ύψος)}{2} = \frac{1}{2}(15-10)(3) = 7.5\, J$

Δ) $W_{0\to15} = W_{0\to5} + W_{5\to10} + W_{10\to15} = 7.5 + 15 + 7.5 = 30\, J$

Κάντε μια δοκιμή όμως να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με το ολοκλήρωμα να δείτε ότι βγαίνει το ίδιο, είναι μια καλή άσκηση 😊