Παράδειγμα 2.4: Θεωρείστε ότι υλικό σημείο μάζας m κάνει κυκλική τροχιά ακτίνας R στο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Τι δύναμη ασκείται στο υλικό σημείο;

Λύση: Ας θεωρήσομε σύστημα συντεταγμένων xy, περιφέρεια κύκλου ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων, καθώς και υλικό σημείο μάζας m που κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω στην περιφέρεια του κύκλου. Την τυχούσα χρονική στιγμή t το υλικό σημείο έχει συντεταγμένες x, y, που ικανοποιούν τη σχέση $x^2 + y^2 = R^2$. Η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου την τυχούσα χρονική στιγμή t είναι

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\,\hat{j} = R\cos\theta\,\hat{i} + R\sin\theta\,\hat{j}\,.$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα $\vec{r}$ με τον άξονα x. Επειδή το υλικό σημείο κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $d\theta/dt = \omega =$ σταθερά, έχομε ότι $\theta = \theta(t) = \omega t$, όπου θεωρήσαμε ότι για $t = 0$ το υλικό σημείο ήταν στον άξονα x στη θέση $x = R$. Έτσι η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου την τυχούσα χρονική στιγμή t είναι

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} = R\cos\omega t\,\hat{i} + R\sin\omega t\,\hat{j}\,.$$

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχομε ότι

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = m\frac{d}{dt}\left[\frac{d(R\cos\omega t\,\hat{i} + R\sin\omega t\,\hat{j})}{dt}\right]$$

$$= m\frac{d}{dt}\left[-R\omega\sin\omega t\,\hat{i} + R\omega\cos\omega t\,\hat{j}\right] = -mR\omega^2\cos\omega t\,\hat{i} - mR\omega^2\sin\omega t\,\hat{j}$$

$$= -m\omega^2(R\cos\omega t\,\hat{i} + R\sin\omega t\,\hat{j}) = -m\omega^2\vec{r}\,.$$

<u>Αποδείξαμε</u> λοιπόν ότι η δύναμη είναι κεντρομόλος και έχει μέτρο $m\omega^2|\vec{r}| = m\omega^2 R$.

Ισορροπία σωματιδίου:

Ένα σώμα υφίσταται την επίδραση των δυνάμεων :

$$\vec{F}_1 = 2\hat{\imath} + a\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

$$\vec{F}_2 = 5\hat{\imath} + c\hat{\jmath} + b\hat{k}$$

$$\vec{F}_3 = b\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 7\hat{k}$$

$$\vec{F}_4 = c\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + a\hat{k}$$

Υπολογίστε τις θετικές σταθερές a,b,c έτσι ώστε το σώμα να ισορροπεί.

Λύση:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$$

Άρα :

$$\Sigma F_x = 0 \iff 2 + 5 + b + c = 0 \Leftrightarrow b + c = -7$$

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow a + c - 5 - 6 = 0 \Leftrightarrow a + c = 11$$

$$\Sigma F_z = 0 \Leftrightarrow -3 + b + 7 + a = 0 \Leftrightarrow b + a = -4$$

Άρα b = -7 -c και α = 11-c από τις δύο πρώτες.

Αντικαθιστώντας τες στην τελευταία βρίσκω το c : (-7-c) + (11-c) = -4 ⇔ -2c = -8 ⇔ $\boldsymbol{c = 4}$

Άρα **b = -11** και **α = 7**

Βρείτε τη σταθερή δύναμη που απαιτείται για να επιταχύνει σώμα μάζας m = 40kg , από την ταχύτητα $\vec{v}_{in} = 4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ m/s στην ταχύτητα : $\vec{v}_f = 8\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ m/s μέσα σε 20sec.

Ποιο είναι το μέτρο αυτής της δύναμης;

Λύση:

Η δύναμη που ασκείται είναι σταθερή και μας λέει ότι επιταχύνεται άρα η κίνηση που θα εκτελέσει το σώμα θα είναι Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση.

Άρα :

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{in} + \vec{a}t$$

Έστω η χρονική στιγμή t_f=20sec είναι η χρονική στιγμή όπου αποκτάει την $\vec{v}_f$ και έστω ότι η χρονική στιγμή όπου είχε την $\vec{v}_{in}$ είναι μηδέν. Τότε θα ισχύει :

$$8\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5\hat{k} = (4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 3\hat{k}) + (\alpha_x\hat{\imath} + \alpha_y\hat{\jmath} + \alpha_z\hat{k})20$$

Οπότε μπορούμε να μελετήσουμε τον κάθε άξονα χωριστά :

$$\text{Άξονας } x: \quad 8 = 4 + \alpha_x 20 \Leftrightarrow \alpha_x = 1/5$$

$$\text{Άξονας } y: \quad 3 = -5 + \alpha_y 20 \Leftrightarrow \alpha_y = 2/5$$

$$\text{Άξονας } z: \quad -5 = 3 + \alpha_z 20 \Leftrightarrow \alpha_z = -2/5$$

Άρα από το 2ο Ν.Νεύτωνα:

$$\text{Άξονας } x: \quad F_x = m\alpha_x = 40\ {}^{1}/_{5} = 8N$$

$$\text{Άξονας } y: \quad F_y = m\alpha_y = 40\ {}^{2}/_{5} = 16N$$

$$\text{Άξονας } z: \quad F_z = m\alpha_z = 40\ {}^{(-2)}/_{5} = -16N$$

Άρα : $\vec{F} = 8\hat{\imath} + 16\hat{\jmath} - 16\hat{k}$ *N*

Και το μέτρο : $\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{(8)^2 + (16)^2 + (-16)^2} =$ *24 N*

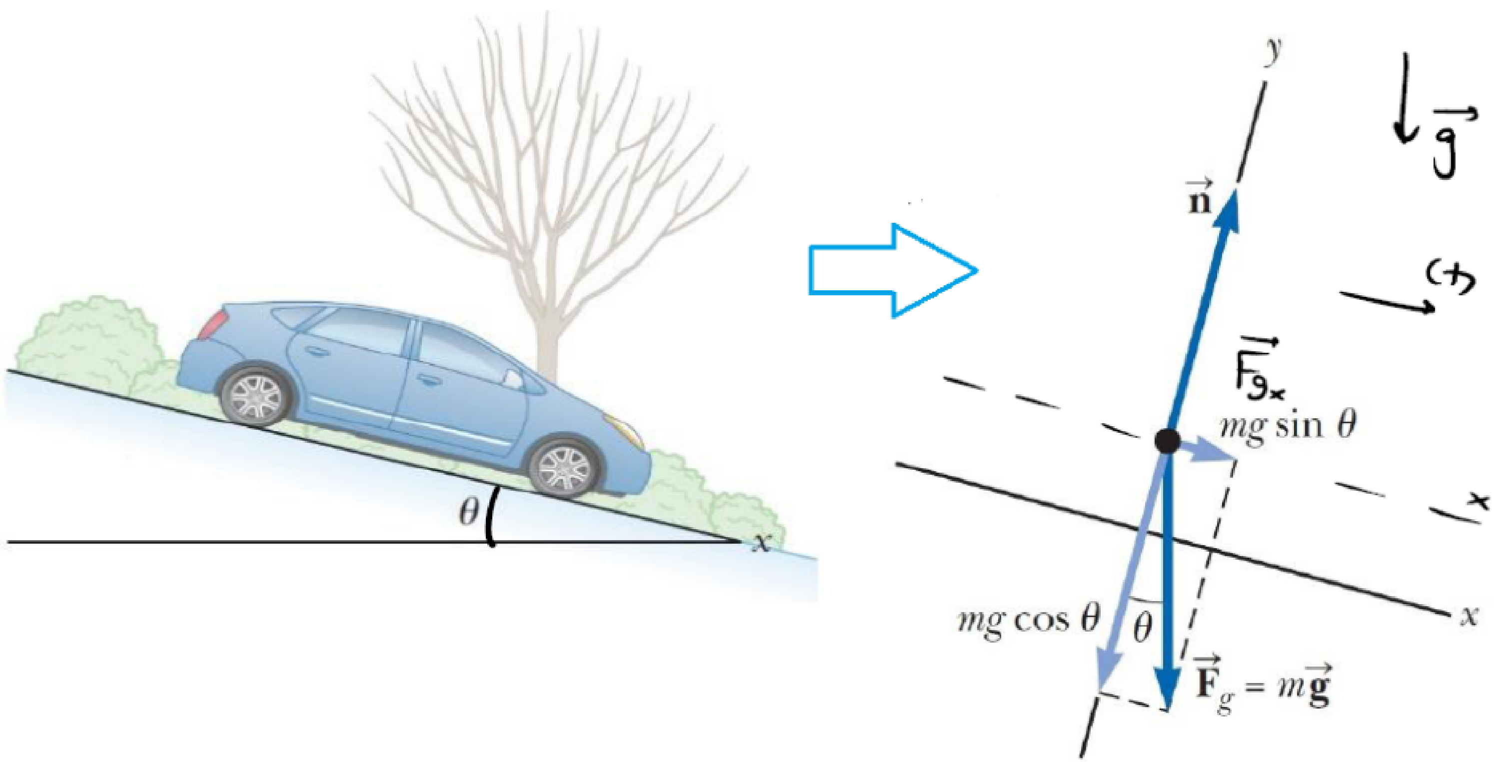
Παράδειγμα 2.18:

Ένα αυτοκίνητο μάζας m αφήνεται να κινηθεί χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ.

(α') Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

(β') Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου που απέχει απόσταση d από το τέρμα του, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα και πόση ταχύτητα θα έχει όταν φτάσει εκεί;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.33. Μπορούμε να κάνουμε το διάγραμμα δυνάμεων του προβλήματος, όπως το



Σχήμα 2.33: Αυτοκίνητο σε κεκλιμένο.

βλέπετε στο Σχήμα 2.33. Στο αυτοκίνητο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: η δύναμη του βάρους, $\vec{F}_g$, και η δύναμη του δαπέδου επάνω στο αυτοκίνητο, n. Η τελευταία είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο που βρίσκεται το σώμα (αυτοκίνητο). Για να αναλύσουμε το πρόβλημα, είναι βολικό να δουλέψουμε κατά άξονες. Επιλέγουμε ως οριζόντιο άξονα τον άξονα παράλληλο στο κεκλιμένο, και ως κατακόρυφο άξονα έναν άξονα κάθετο στον προηγούμενο. Η δύναμη $\vec{n}$ είναι ήδη παράλληλη με τον κατακόρυφο άξονα ενώ η δύναμη του βάρους $\vec{F}_g$ όχι, οπότε θα την αναλύσουμε κατά άξονες σε $\vec{F}_{gx}$ και $\vec{F}_{gy}$.

(α΄) Η κίνηση πραγματοποιείται στον $x-$άξονα. Μόνο μια δύναμη ασκείται κατά μήκος του $x-$άξονα, η $\vec{F}_{gx}$. Από την τριγωνομετρία του σχήματος έχουμε

$$\vec{F}_{gx} = F_g \sin(\theta)\vec{i} \Longrightarrow F_{gx} = mg\sin(\theta) \tag{2.176}$$

Το αυτοκίνητο επιταχύνεται στον άξονα x, οπότε ισχύει

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Longleftrightarrow \vec{F}_{gx} = m\vec{a}_x \Longrightarrow F_{gx} = ma_x \Longrightarrow mg\sin(\theta) = ma_x \Longrightarrow a_x = g\sin(\theta) \tag{2.177}$$

Προφανώς δεν υπάρχει κίνηση στον κατακόρυφο άξονα, οπότε $\vec{a}_y = 0$. Συνολικά λοιπόν

$$\vec{a} = g\sin(\theta)\vec{i} \tag{2.178}$$

(β′) Το πρόβλημα ζητάει χρόνο t, οπότε επιβάλλεται να θυμηθούμε τις εξισώσεις της κινητικής! Στον άξονα x, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε ισχύει

$$x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{2.179}$$

$$d = 0 + 0t + \frac{1}{2}g\sin(\theta)t^2 \tag{2.180}$$

$$t^2 = \frac{2d}{g\sin(\theta)} \tag{2.181}$$

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g\sin(\theta)}} \tag{2.182}$$

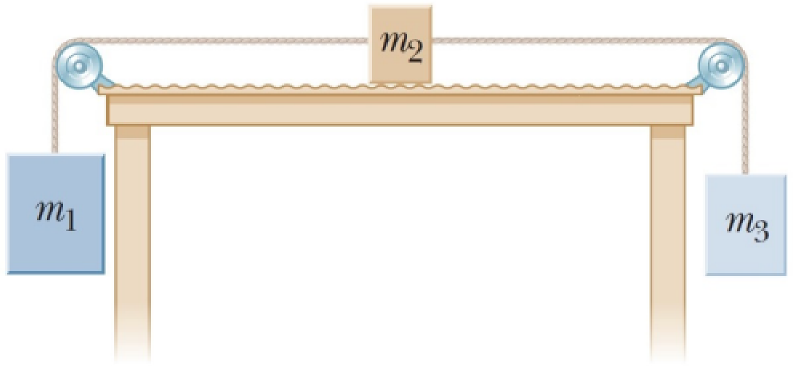
Για την ταχύτητα στο τέρμα του κεκλιμένου θα έχουμε

$$u_f = u_i + a_x t = 0 + g\sin(\theta)t = g\sin(\theta)\sqrt{\frac{2d}{g\sin(\theta)}} = \sqrt{2dg\sin(\theta)} \tag{2.183}$$

Παράδειγμα 2.20:

Τρια σώματα είναι συνδεδεμένα με αβαρές και μη ελαστικό σχοινί επάνω σε ένα τραπέζι, όπως στο Σχήμα 2.35. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα μάζας m_2 και στο τραπέζι είναι 0.35. Τα σώματα έχουν μάζες $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 1$ kg, και $m_3 = 2$ kg, ενώ οι τροχαλίες είναι αβαρείς και χωρίς τριβές.

(α΄) Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα.
(β΄) Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης κάθε σώματος.
(γ΄) Βρείτε τις τάσεις T_{12}, T_{32} των σχοινιών στα δυο σώματα που κρέμονται.



Σχήμα 2.35: Τρια σώματα δεμένα με σχοινί.

Λύση: Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα όπως στο Σχήμα 2.36.

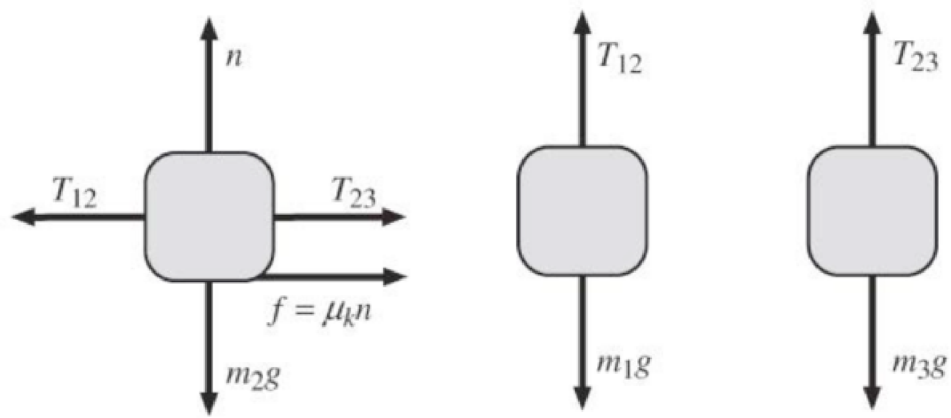
(α΄) Δείτε το Σχήμα 2.36.

(β΄) Ας συμβολίσουμε με a το μέτρο της επιτάχυνσης $-a\vec{j}$ του σώματος m_1, της επιτάχυνσης $-a\vec{i}$ του σώματος m_2, και της επιτάχυνσης $+a\vec{j}$ του m_3. Επίσης, έστω $\vec{T}_{12}$ την τάση του αριστερού νήματος, και $\vec{T}_{23}$ την τάση του δεξιού νήματος. Για το σώμα m_1, έχουμε επιτάχυνση στον y−άξονα, οπότε είναι

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \tag{2.189}$$

$$\vec{T}_{12} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a} \tag{2.190}$$

$$T_{12} - m_1 g = -m_1 a \tag{2.191}$$



Για το σώμα m_2, αφού κινείται επιταχυνόμενα στον x−άξονα, είναι

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \tag{2.192}$$
$$\vec{T}_{12} + \vec{f}_k + \vec{T}_{23} = m_2\vec{a}_x \tag{2.193}$$
$$-T_{12} + f_k + T_{23} = -m_2 a \tag{2.194}$$
$$-T_{12} + \mu_k n + T_{23} = -m_2 a \tag{2.195}$$

και αφού ισορροπεί στον y−άξονα,

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \tag{2.196}$$
$$\vec{n} + m_2\vec{g} = \vec{0} \tag{2.197}$$
$$n - m_2 g = 0 \tag{2.198}$$
$$n = m_2 g \tag{2.199}$$

Με όμοια διαδικασία, για το σώμα m_3 που επιταχύνεται στον κατακόρυφο άξονα, έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = m_3\vec{a}_y \tag{2.200}$$
$$T_{23} - m_3 g = m_3 a \tag{2.201}$$

Έχουμε τρεις εξισώσεις

$$-T_{12} + 39.2 = 4a \tag{2.202}$$
$$T_{12} - 0.35(9.8) - T_{23} = a \tag{2.203}$$
$$T_{23} - 19.6 = 2a \tag{2.204}$$

με κατεύθυνση προς τα κάτω για το m_1, αριστερά για το m_2, επάνω για το m_3.

(γ΄) Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις έχουμε

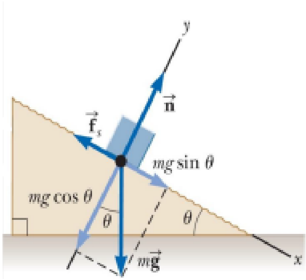
$$T_{12} = 30\ \mathrm{N} \tag{2.206}$$

$$T_{23} = 24.2\ \mathrm{N} \tag{2.207}$$

Παράδειγμα 2.21:

Θεωρούμε ακίνητο σώμα μάζας m τοποθετημένο σε επιφάνεια με τριβές υπό γωνία θ. Αυξάνουμε τη γωνία θ μέχρι το σώμα να ολισθήσει. Δείξτε ότι μπορείτε να βρείτε το συντελεστή μ_s μετρώντας την κρίσιμη γωνία θ_c στην οποία το σώμα μόλις αρχίζει να ολισθαίνει.

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.37. Επιλέγουμε σύστημα αξόνων στο οποίο ο x−άξονας είναι παράλληλος στο



Σχήμα 2.37: Παράδειγμα με τριβές σε κεκλιμένο.

κεκλιμένο επίπεδο. Το σώμα ισορροπεί και στους δυο άξονες. Το διάγραμμα δυνάμεων είναι ήδη σχεδιασμένο στο σχήμα, όπου έχει αναλυθεί κάθε δύναμη στους άξονες μας. Ξέρουμε ότι οριακά ισχύει

$$f_s = \mu_s n \tag{2.208}$$

οπότε πρέπει να εκφράσουμε τη σχέση αυτή με γνωστές μεταβλητές του προβλήματος. Στον x−άξονα, το σώμα ισορροπεί οπότε

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Longleftrightarrow \vec{f}_s + \vec{F}_{gx} = 0 \Longrightarrow -f_s + F_{gx} = 0 \Longrightarrow F_{gx} = f_s = \mu_s n \Longleftrightarrow mg\sin(\theta) = \mu_s n \tag{2.209}$$

Στον y−άξονα, το σώμα ισορροπεί, οπότε

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Longleftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_{gy} = 0 \Longrightarrow n - F_{gy} = 0 \Longrightarrow n = F_{gy} = mg\cos(\theta) \tag{2.210}$$

Από τις δυο σχέσεις που καταλήξαμε, έχουμε

$$\mu_s mg\cos(\theta) = mg\sin(\theta) \Longleftrightarrow \mu_s\cos(\theta) = \sin(\theta) \Longleftrightarrow \mu_s = \tan(\theta) \tag{2.211}$$

με την τελευταία σχέση να ισχύει αφού μπορούμε να διαιρέσουμε με $\cos(\theta)$, γιατί $\theta \in (0, \pi/2)$ όπου το συνημίτονο είναι μη μηδενικό. Καταλήξαμε λοιπόν στη σχέση

$$\mu_s = \tan(\theta) \tag{2.212}$$

Όταν $\theta = \theta_c$, δηλ. το σώμα μόλις ετοιμάζεται να ολισθήσει, μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή στατικής τριβής μ_s.