

HY-111

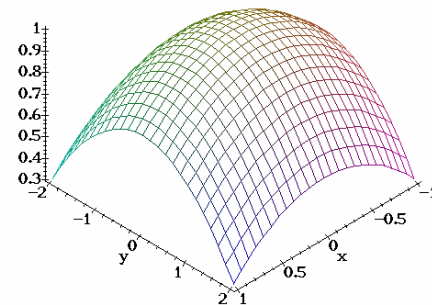
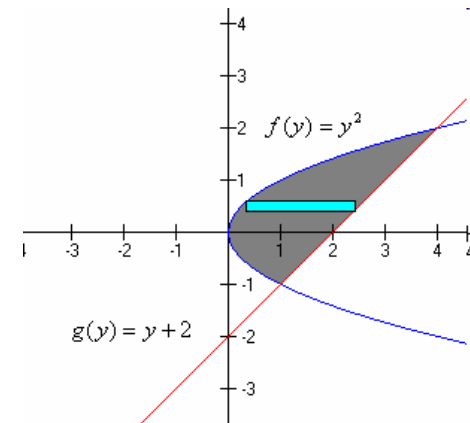
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Ολοκληρώματα



Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων

- Υπολογισμός μήκους
- Υπολογισμός εμβαδού
- Υπολογισμός όγκου
- Χρήση σε Τύπους/Μετρικές
 - Φυσική
 - Πιθανότητες
 - Γραφική
 - Θέματα Αναγνώρισης προτύπων



Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

$$\int f'(x) dx = f(x)$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$$

$$\int a dx = ax$$

$$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}, & n \neq -1 \\ \ln x, & n = -1 \end{cases}$$

$$+c, \quad c \in \mathcal{R}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x|$$

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων στο Matlab

● Ορισμένα Ολοκληρώματα

Πρόβλημα: Υπολόγισε το ολοκλήρωμα

Λύση:
`syms x;`
`int(x*log(1+x),0,1)`

$$\int_0^1 x \log(x + 1) dx$$

1/4



Υπολογισμός ολοκληρωμάτων στο Matlab

● Αόριστα Ολοκληρώματα

Πρόβλημα: Υπολόγισε το ολοκλήρωμα

$$\int (x^n + \sin(n \cdot x) - 1) dx$$

Λύση:

```
syms x
```

```
syms n
```

```
f = x^n + sin(n*x) - 1
```

```
int(f,x)
```

```
ans =
```

```
x^(n+1)/(n+1)-1/n*cos(x*n)-x
```

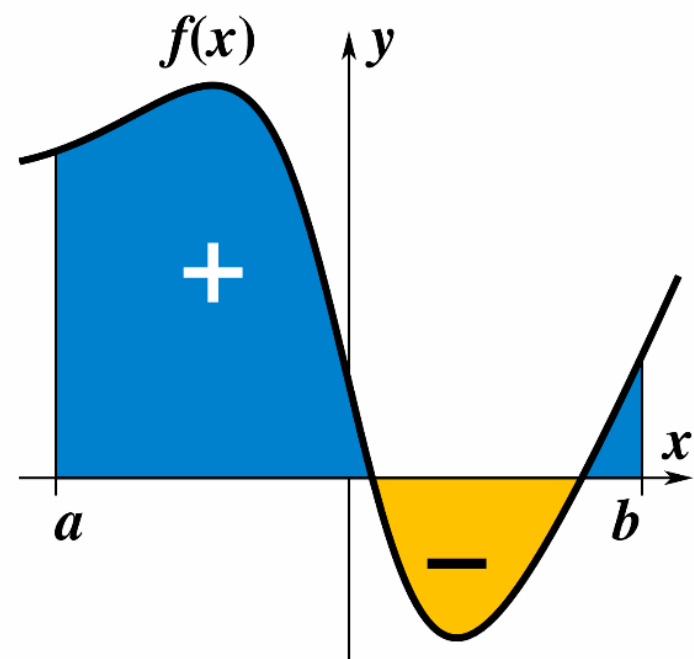
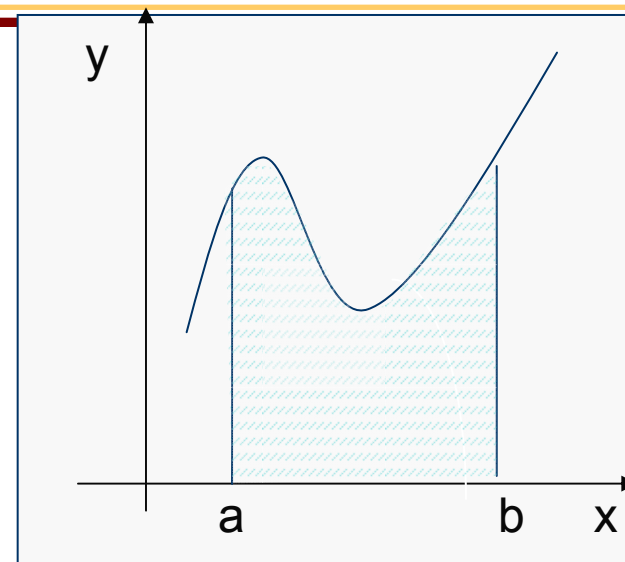


Ολοκληρώματα 1 μεταβλητή

$y = f(x)$ συνάρτηση.

Βρες τον εμβαδόν κάτω από το γράφημα με $a \leq x \leq b$.

$$\int_a^b f(x) dx$$



Ολοκληρώματα 2 μεταβλητών

$z = f(x, y)$ συνάρτηση.

Βρες τον όγκο κάτω από το γράφημα.

Έστω $c(y_0) = \{(x, y_0) \mid a \leq x \leq b\}$.

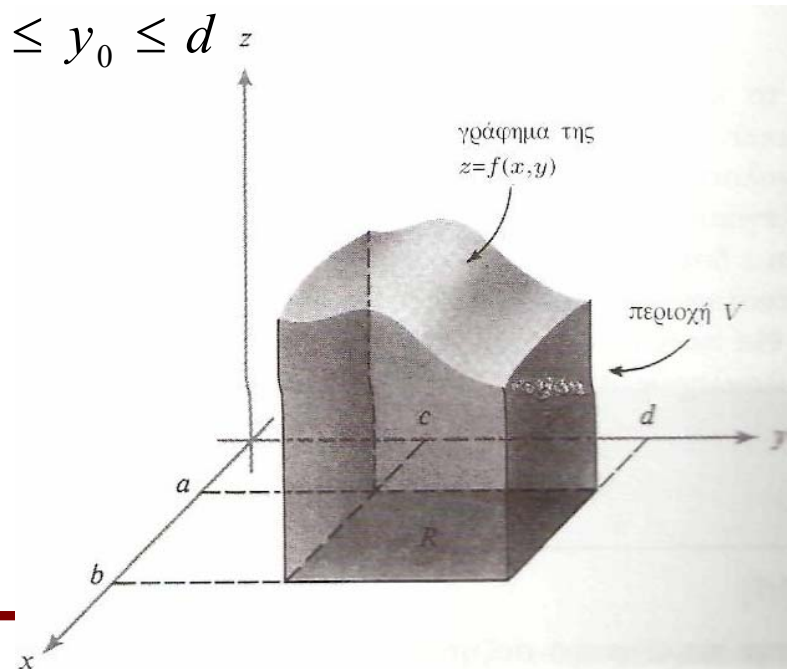
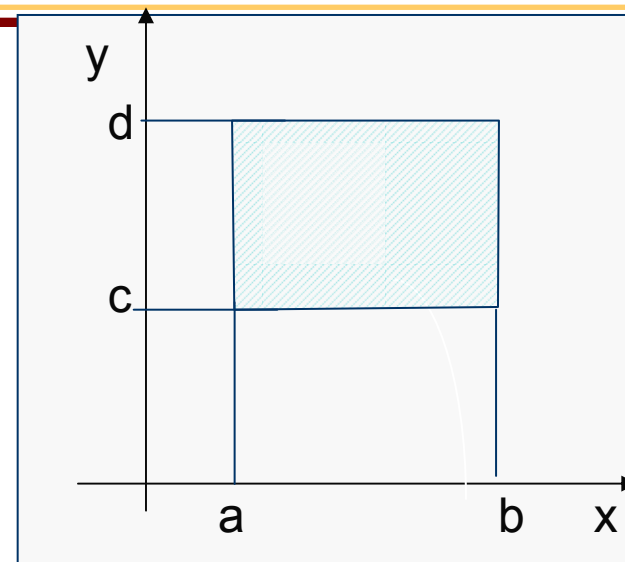
$f(x, y_0) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$A(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

Όγκος στερεού: άθροισμα εμβαδόν $A(y_0), c \leq y_0 \leq d$

$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \text{ αθροίζω με } c \leq y \leq d,$$

$$\int_c^d A(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$



Διπλά ολοκληρώματα

$$f(x,y) = x^2 + y + 1$$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα $0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq 2$.

Έστω $c(y) = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

$A(y)$ = εμβαδόν πάνω από τη $c(y)$

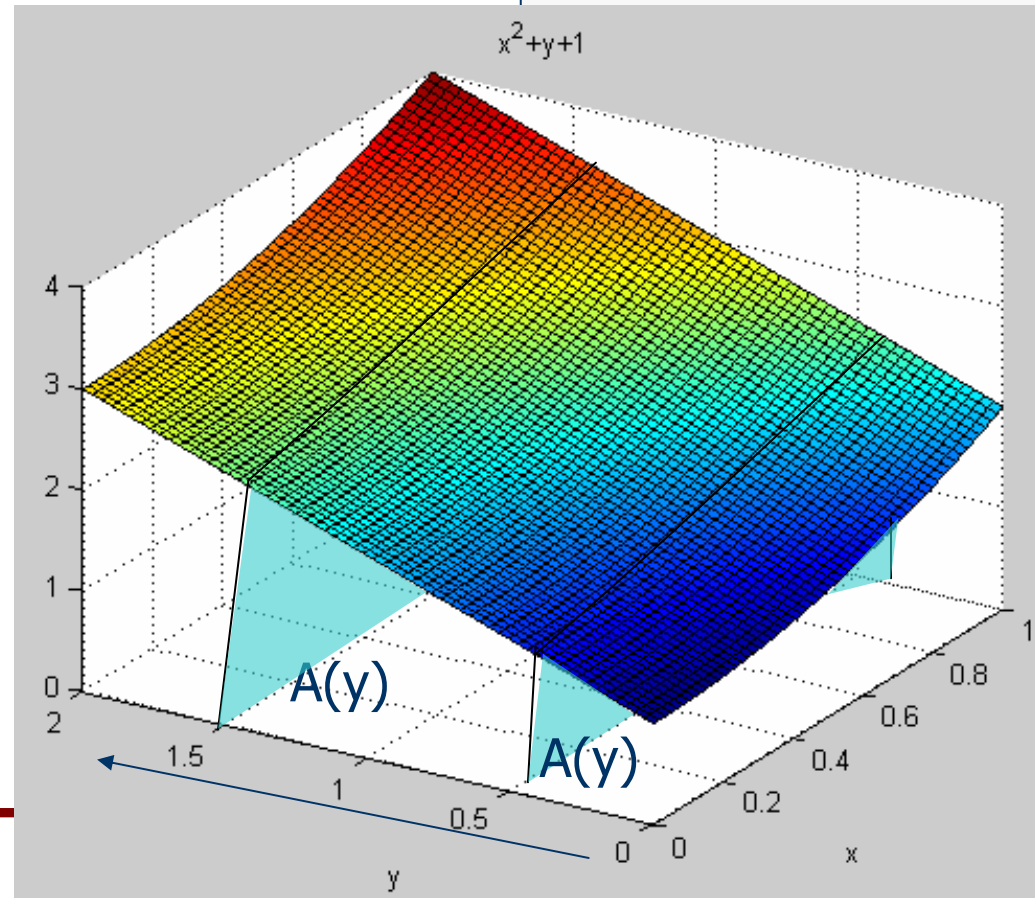
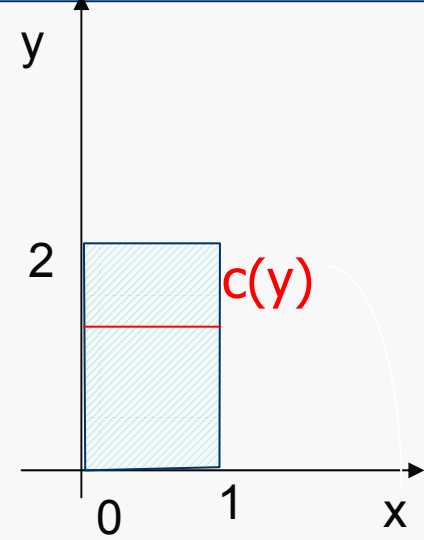
$$= \int_0^1 f(x,y) dx = \int_0^1 (x^2 + y + 1) dx = \frac{4}{3} + y$$

Όγκος = άθροισμα των $A(y)$ =

$$= \int_0^2 A(y) dy = \int_0^2 \left(\frac{4}{3} + y\right) dy = \frac{4}{3}y + \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{2^2}{2} - 0 = 2 + \frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 \int_0^1 f(x,y) dx dy$$



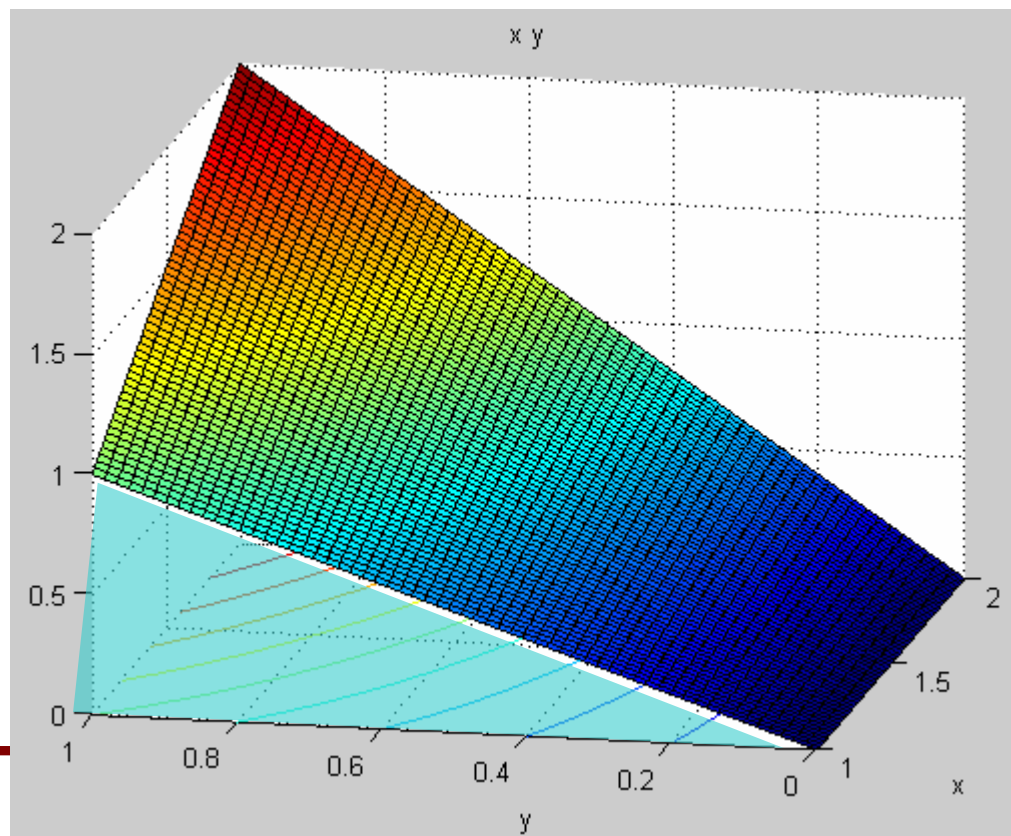
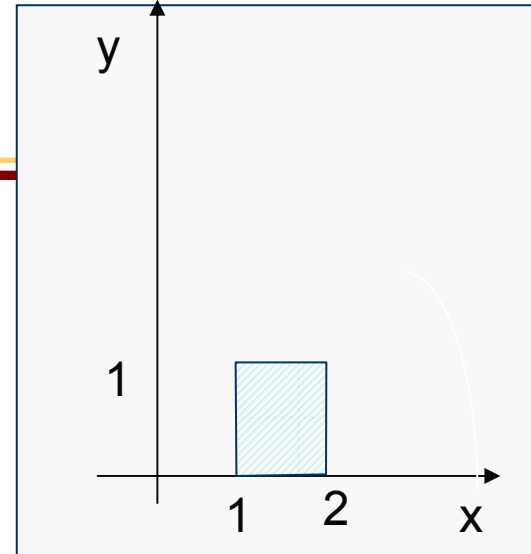
Διπλά ολοκληρώματα

$$f(x,y) = xy$$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα $1 \leq x \leq 2$ και $0 \leq y \leq 1$.

$$\int_0^1 \int_1^2 f(x,y) dx dy$$



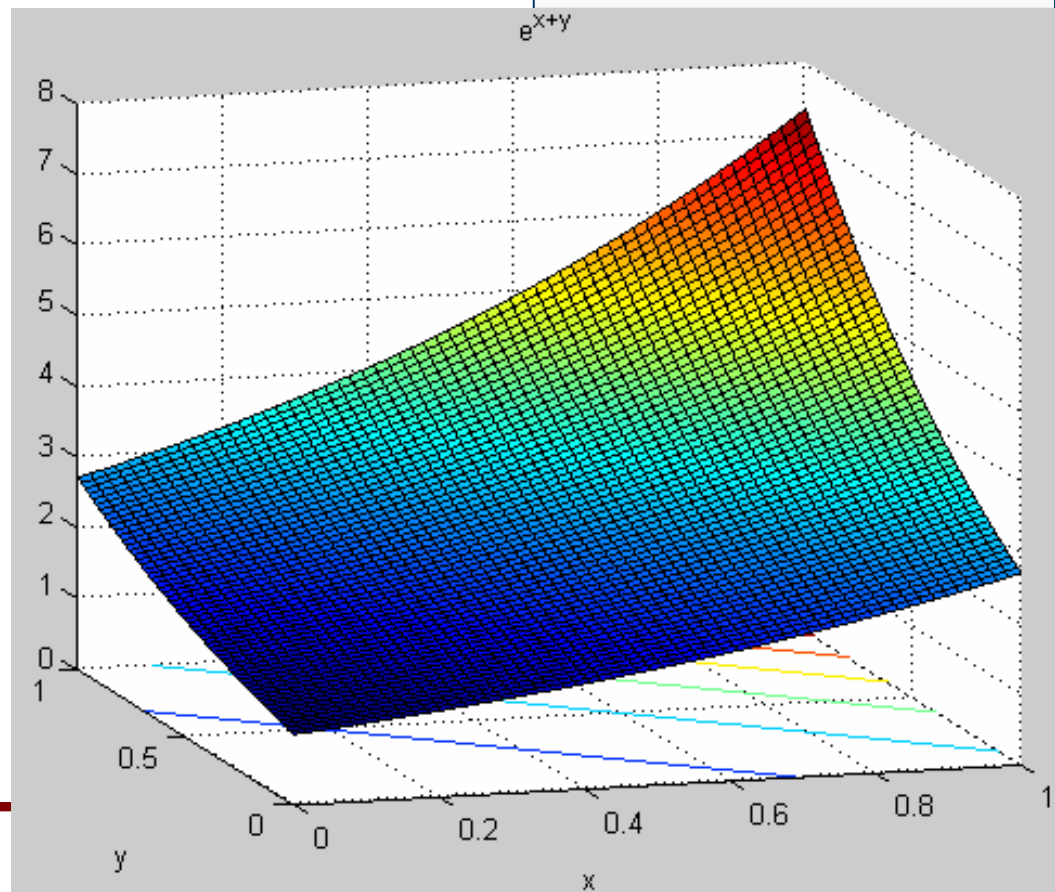
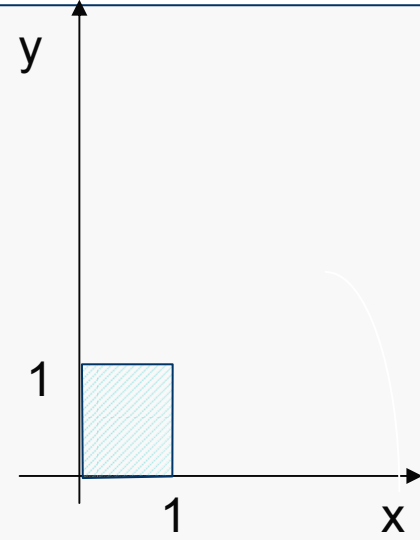
Διπλά ολοκληρώματα

$$f(x,y) = e^{x+y}$$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα $0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq 1$.

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dx dy$$



Διπλά ολοκληρώματα

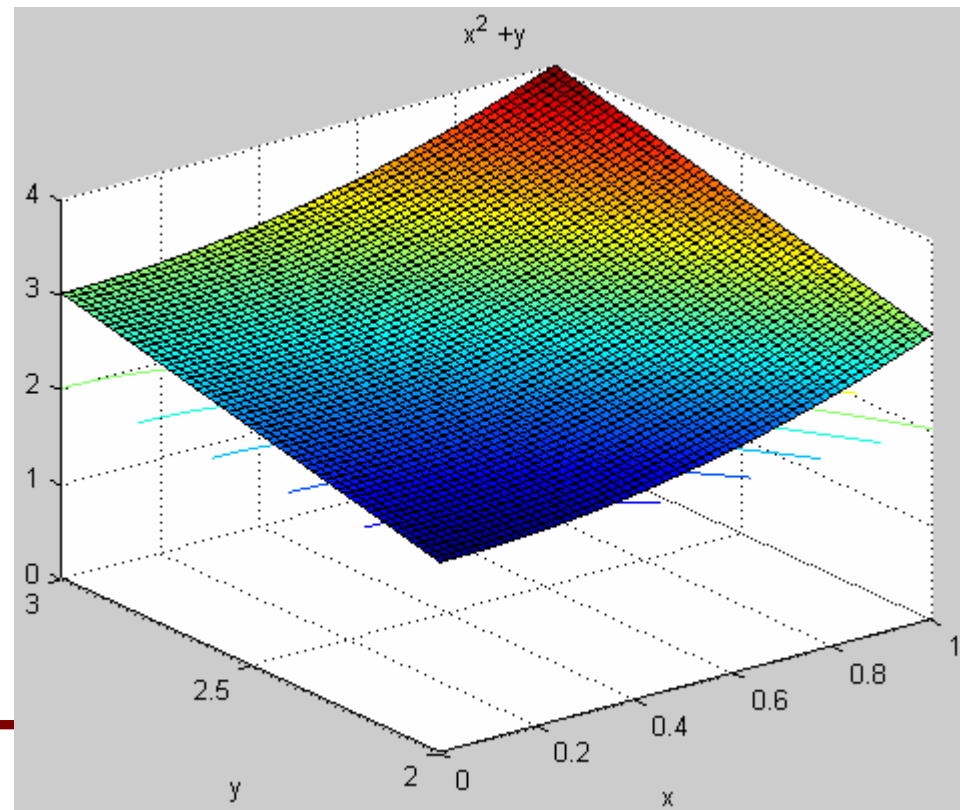
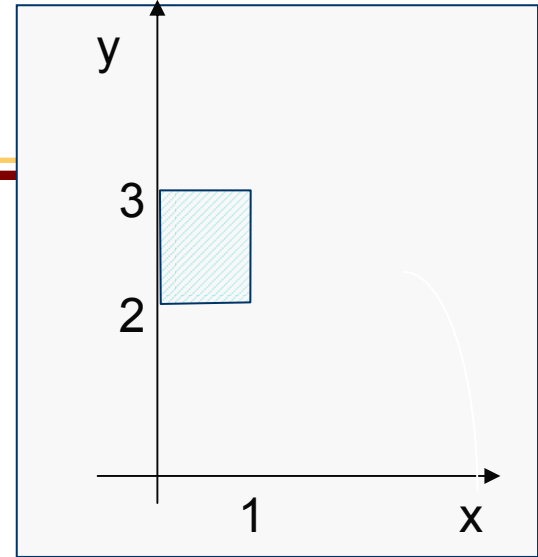
$$f(x,y) = x^2 + y$$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα $0 \leq x \leq 1$ και $2 \leq y \leq 3$.

$$\int_2^3 \int_0^1 f(x,y) dx dy$$

$$\int_0^1 \int_2^3 f(x,y) dy dx$$



HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Διπλά Ολοκληρώματα (1/2)



Διπλά ολοκληρώματα

$$f(x,y) = x^2 + y + 1$$

Βρες τον όγκο

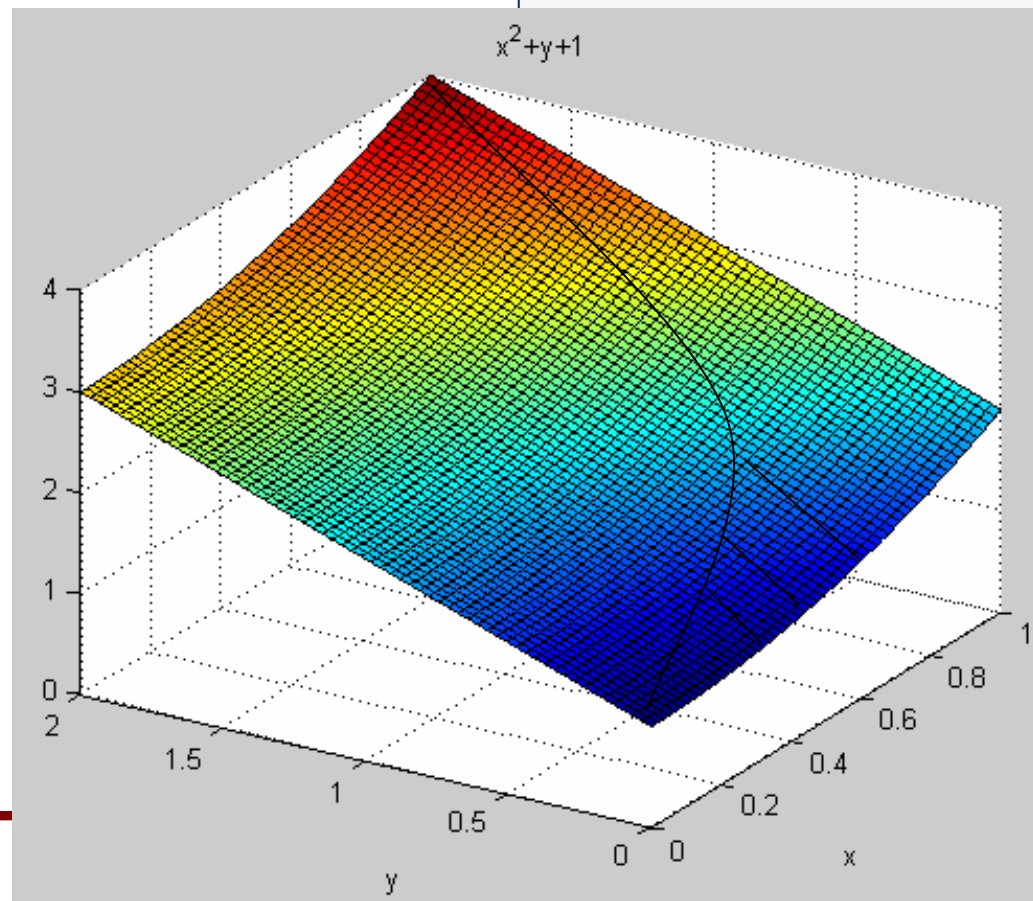
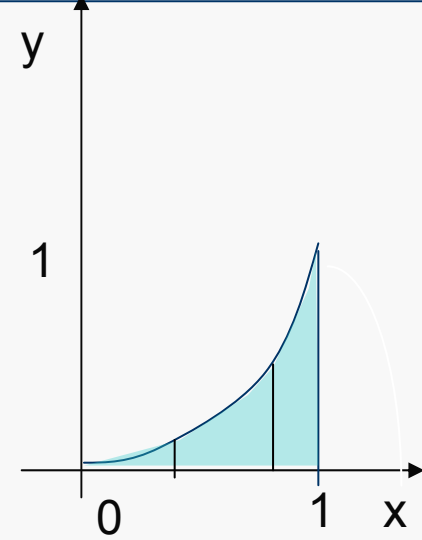
κάτω από το γράφημα .

Α' τρόπος

$$c(x) = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x^2\}, 0 \leq x \leq 1.$$

$$\text{Συνοπτικά } R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$\int_R \int f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y) dy dx$$



Διπλά ολοκληρώματα

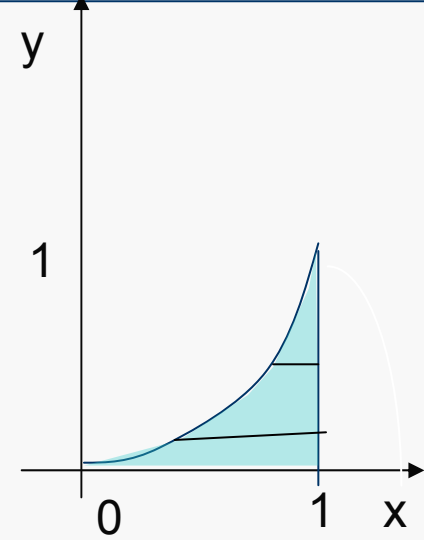
$$f(x,y) = x^2 + y + 1$$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα .

Β' τρόπος

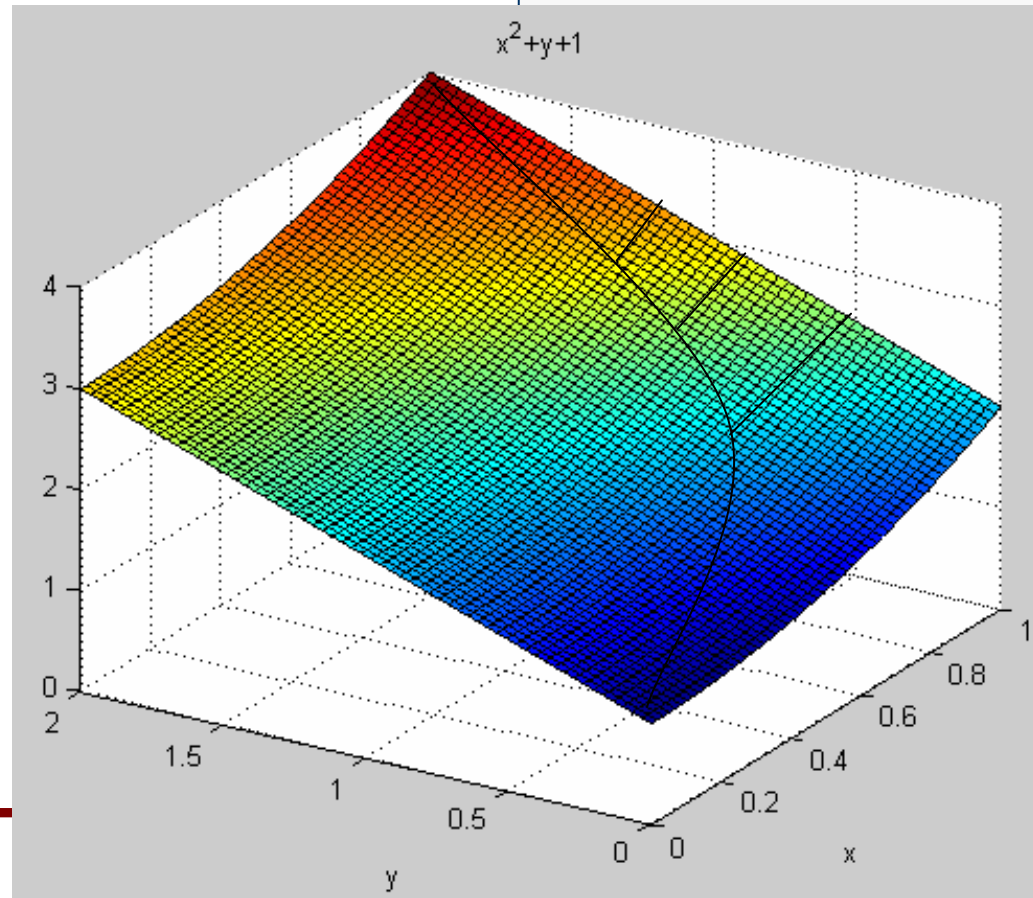
$$c(x) = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x^2\}, 0 \leq x \leq 1.$$



$$\text{Συνοπτικά } R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{y} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$\int_R \int f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y) dx dy$$



Διπλά ολοκληρώματα

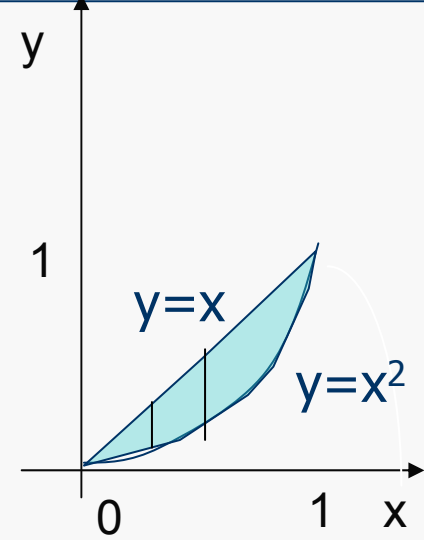
$$f(x,y) = x^2 + y + 1$$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα .

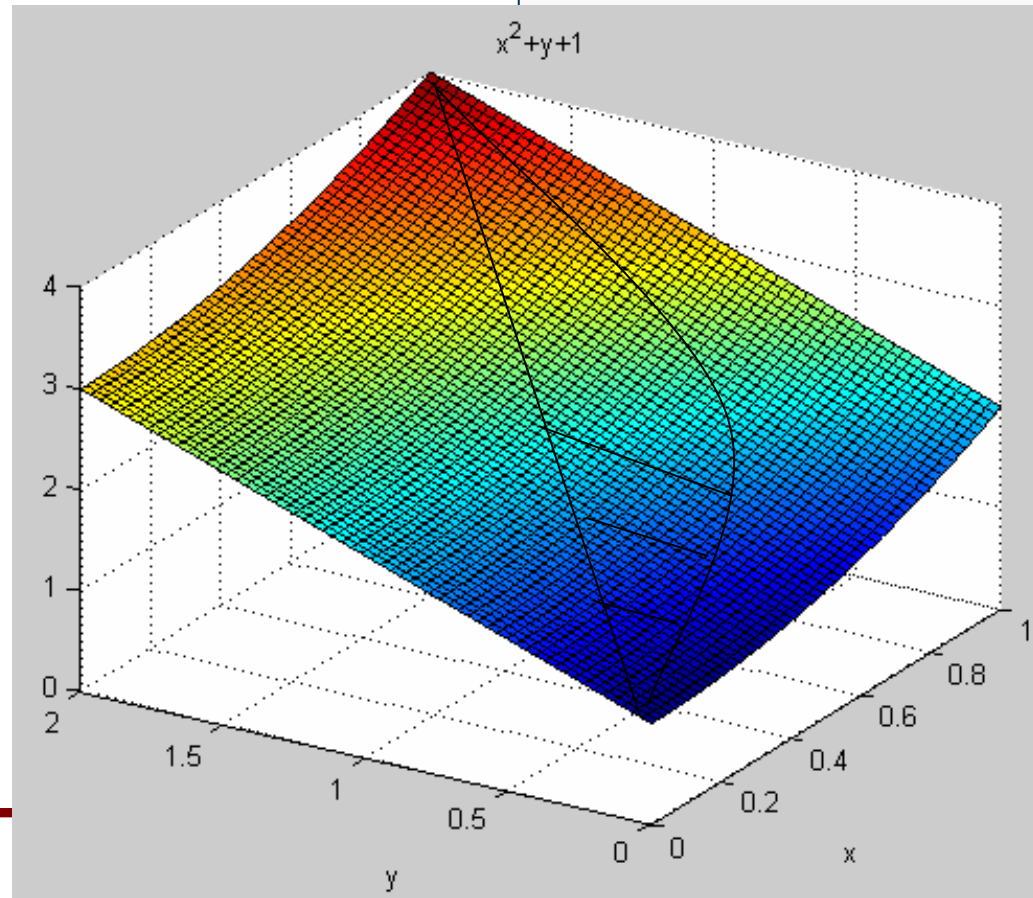
$$c(x) = \{(x,y) \mid x^2 \leq y \leq x\}, 0 \leq x \leq 1.$$

Α' τρόπος



$$\text{Συνοπτικά } R = \left\{ \begin{array}{l} x^2 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} =$$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x,y) dy dx$$



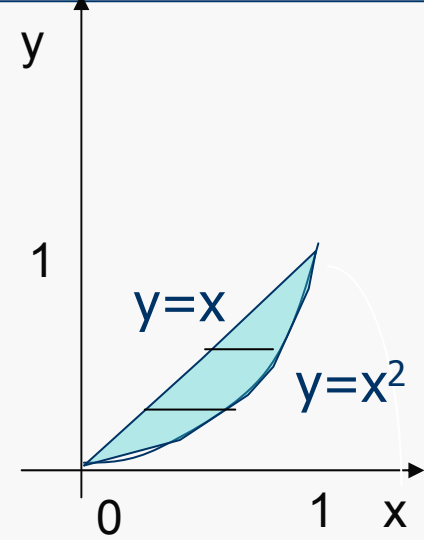
Διπλά ολοκληρώματα

$$f(x,y) = x^2 + y + 1$$

Β' τρόπος

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα που φράσσεται πάνω από το γράφημα της $y=x$ και κάτω από το γράφημα της $y=x^2$.

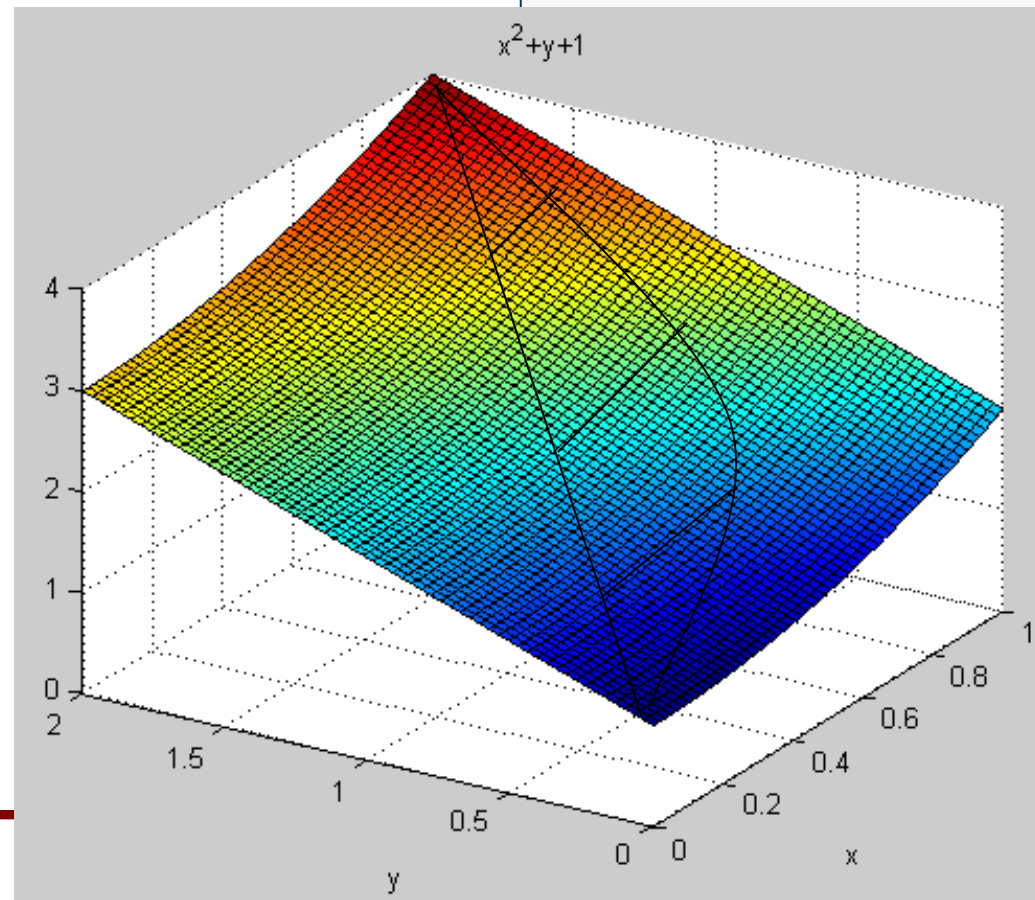


$$c(x) = \{(x,y) \mid x^2 \leq y \leq x\}, 0 \leq x \leq 1.$$

$$\text{Συνοπτικά } R = \left\{ \begin{array}{l} x^2 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} y \leq x \leq \sqrt{y} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y) dx dy$$



Διπλά ολοκληρώματα

$$f(x,y) = x^2 + y + 1$$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα .

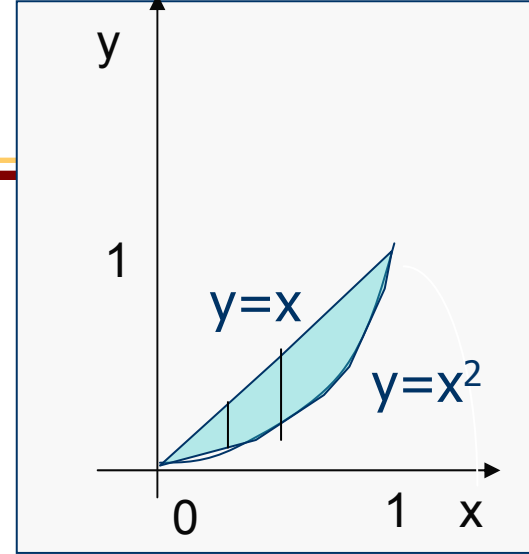
$$c(x) = \{(x,y) \mid x^2 \leq y \leq x\}, 0 \leq x \leq 1.$$

$$A(0,0)$$

$$B(1,0)$$

$$\Gamma(1,1)$$

Γ' τρόπος



$$\text{Συνοπτικά } R = R_1 - R_2 = AB\Gamma - (AB\Gamma - R) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} =$$

$$\int_R \int f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x f(x,y) dy dx - \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y) dy dx =$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y) - \int_0^{x^2} f(x,y) \right) dy dx =$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y) + \int_{x^2}^0 f(x,y) \right) dy dx =$$

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y) dy dx \quad (A' \text{ τρόπος})$$



Διπλά ολοκληρώματα

$$f(x,y) = x^2 + y + 1$$

Βρες τον όγκο

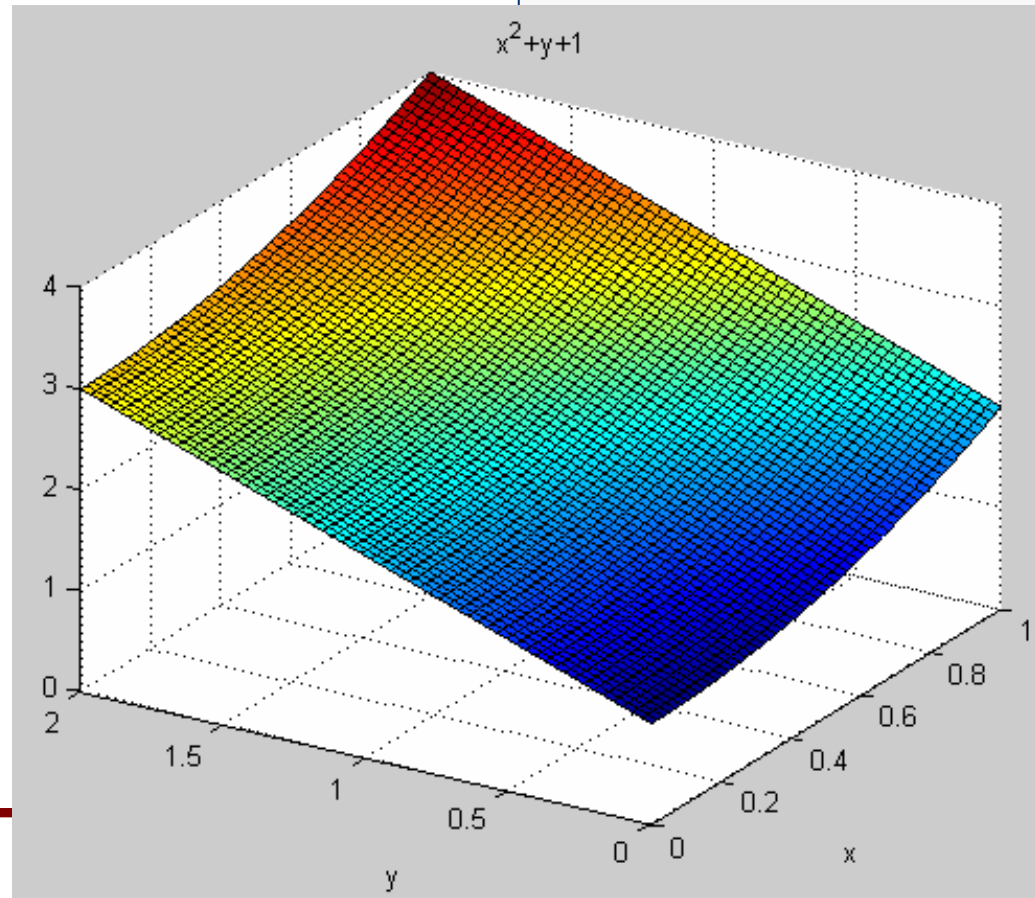
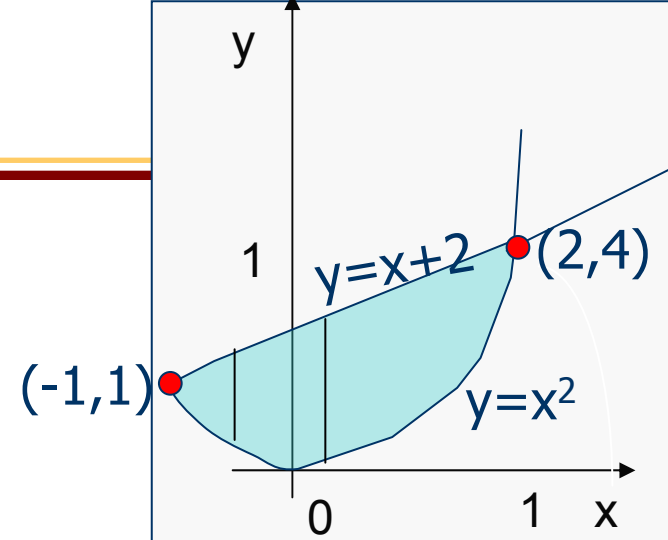
από το γράφημα που φράσσεται πάνω από το γράφημα της $y = x + 2$ και κάτω από το γράφημα της $y = x^2$.

$$c(x) = \{(x,y) \mid x^2 \leq y \leq x + 2\}, -1 \leq x \leq 2.$$

$$\text{Συνοπτικά } R = \left\{ \begin{array}{l} x^2 \leq y \leq x + 2 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{array} \right\} =$$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x,y) dy dx$$

Α' τρόπος



Διπλά ολοκληρώματα

$$f(x,y) = x^2 + y + 1$$

Β' τρόπος

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα που φράσσεται πάνω από το γράφημα της $y=x+2$ και κάτω από το γράφημα της $y=x^2$.

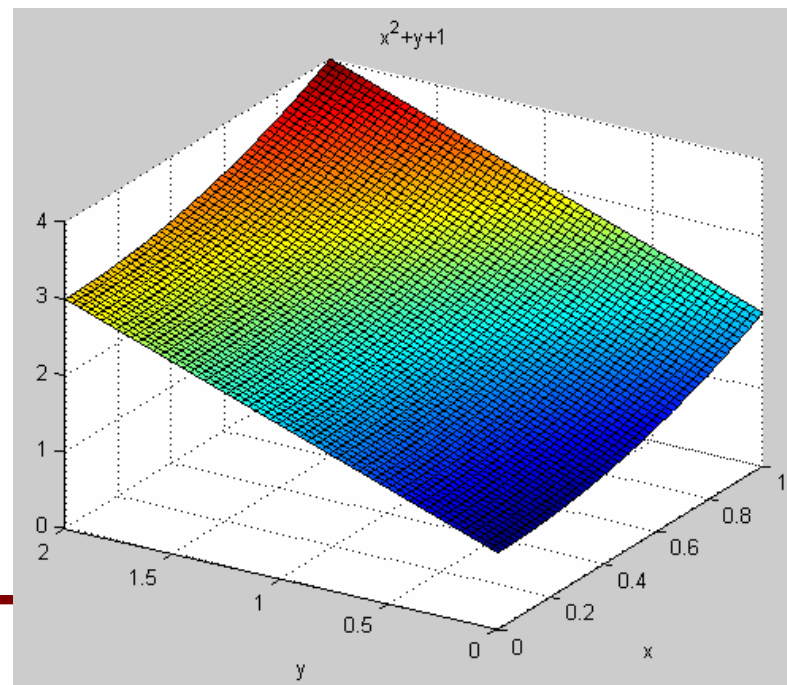
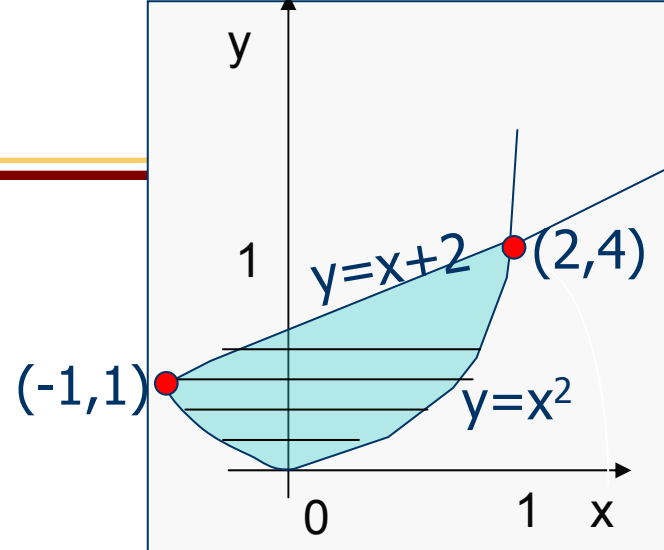
$$c(x) = \{(x,y) \mid x^2 \leq y \leq x+2\}, -1 \leq x \leq 2.$$

Συνοπτικά $R = R_1 + R_2 =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq y \leq 4 \\ y-2 \leq x \leq \sqrt{y} \end{array} \right\} =$$

$$\int_R \int f(x,y) dx dy = \int_{R_1} \int f(x,y) dx dy + \int_{R_2} \int f(x,y) dx dy =$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx dy$$



Διπλά ολοκληρώματα

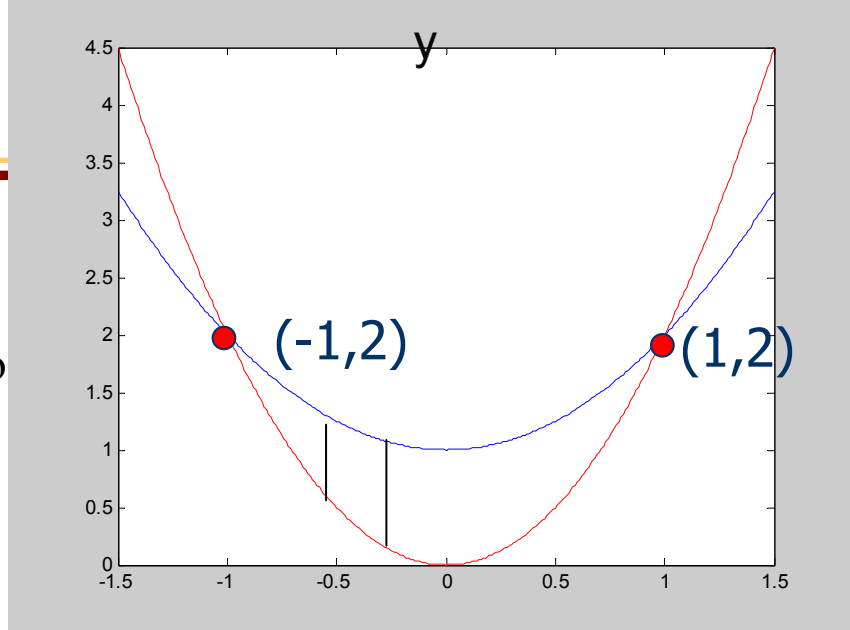
$$f(x,y) = x^2 + y + 1$$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα που φράσσεται πάνω από το γράφημα της $y = 1 + x^2$ και κάτω από το γράφημα της $y = 2x^2$.

Α' τρόπος

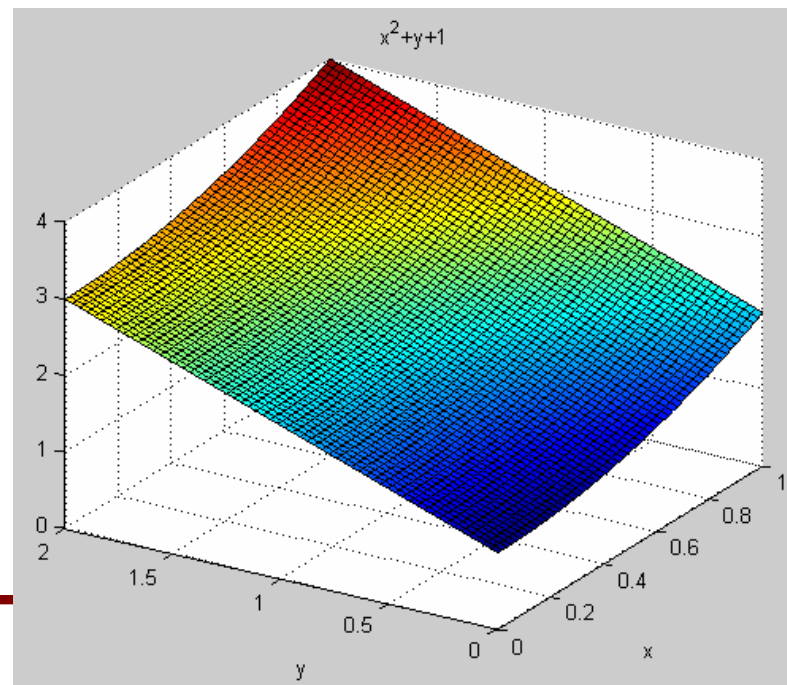
$$c(x) = \{(x,y) \mid 2x^2 \leq y \leq 1+x^2\}, -1 \leq x \leq 1.$$



$$\text{Συνοπτικά } R = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 \leq y \leq 1+x^2 \end{array} \right\}$$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} f(x,y) dy dx$$

Β' τρόπος;



HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Διπλά Ολοκληρώματα (2/2)



Διπλά ολοκληρώματα

Βρες τον όγκο στερεού με βάση στο xy επίπεδο

το χωρίο R που φράσσεται από τις καμπύλες $y=4-x^2$

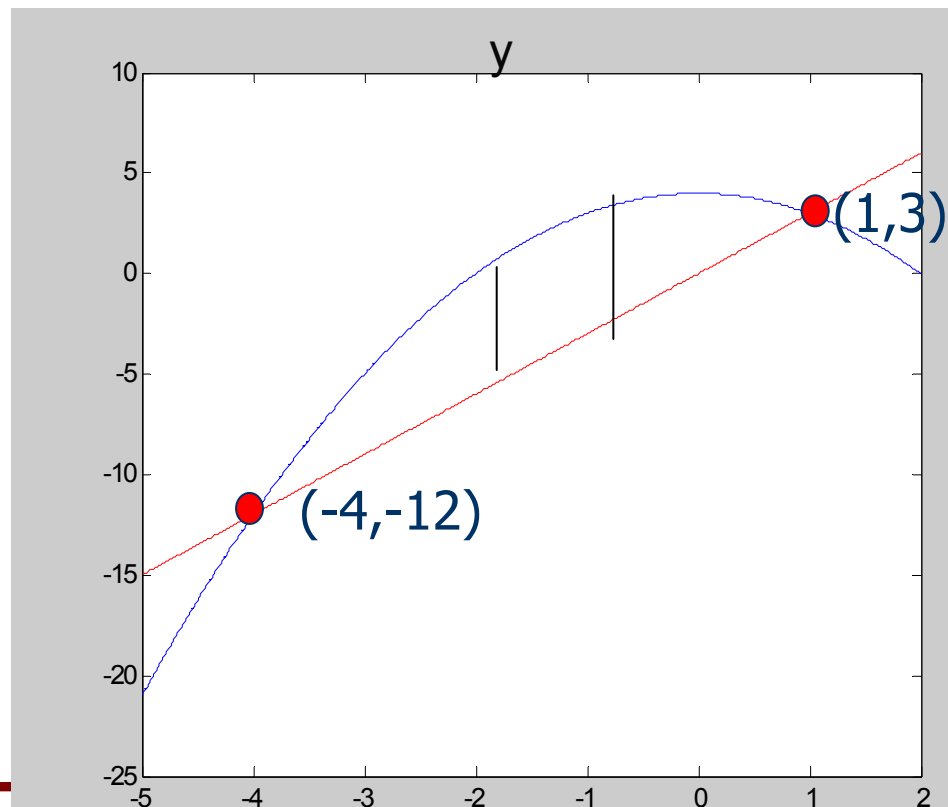
και $y=3x$ και οροφή το γράφημα της $f(x,y) = x + 4$.

$$\text{τομές καμπύλων: } \begin{cases} y=4-x^2 \\ y=3x \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+3x-4=0 \\ y=3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x,y)=(-4,-12) \\ \text{ή} \\ (x,y)=(1,3) \end{cases}$$

$$\text{Συνοπτικά } R = \left\{ \begin{array}{l} -4 \leq x \leq 1 \\ 3x \leq y \leq 4-x^2 \end{array} \right\}$$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_{-4}^1 \int_{3x}^{4-x^2} f(x,y) dy dx$$



Διπλά ολοκληρώματα

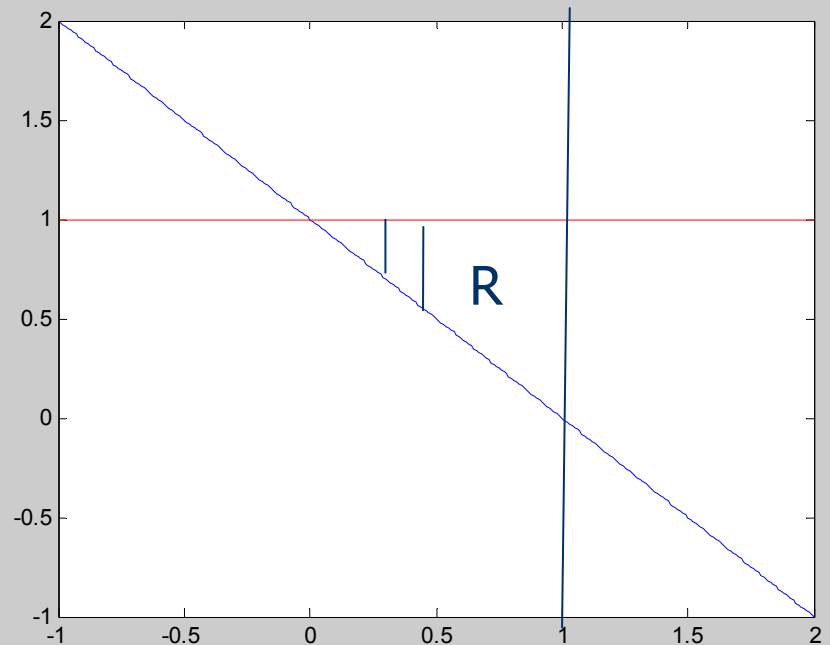
Βρες τον όγκο στερεού με βάση στο xy επίπεδο το χωρίο R που φράσσεται από τις καμπύλες $x=1-y$ και $x=1$ και οροφή το γράφημα της $f(x,y) = x + y + 4$.

$$\text{τομές καμπύλων: } \begin{cases} x=1-y \\ x=1 \end{cases} \rightarrow (x,y)=(1,0)$$

$$\begin{cases} x=1-y \\ y=1 \end{cases} \rightarrow (x,y)=(0,1)$$

$$\text{Συνοπτικά } R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 1-x \leq y \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$\int_R \int f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_{1-x}^1 f(x,y) dy dx$$



Διπλά ολοκληρώματα

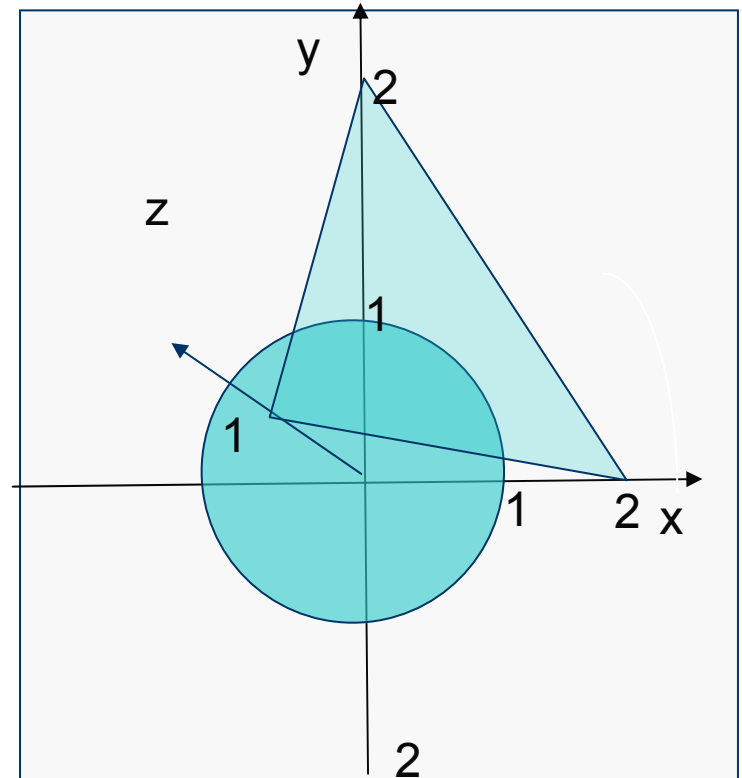
Βρες τον όγκο στερεού που περικλείεται $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ και $x + y + 2z = 2$

$R =$ εσωτερικός χώρος κύκλου $x^2 + y^2 = 1$, και γράφημα συνάρτησης

$$f(x, y) = \frac{2 - x - y}{2}$$

$$\text{Συνοπτικά } R = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\}$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$



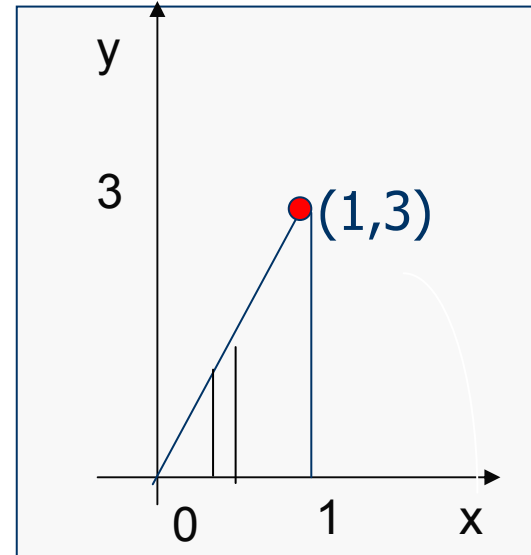
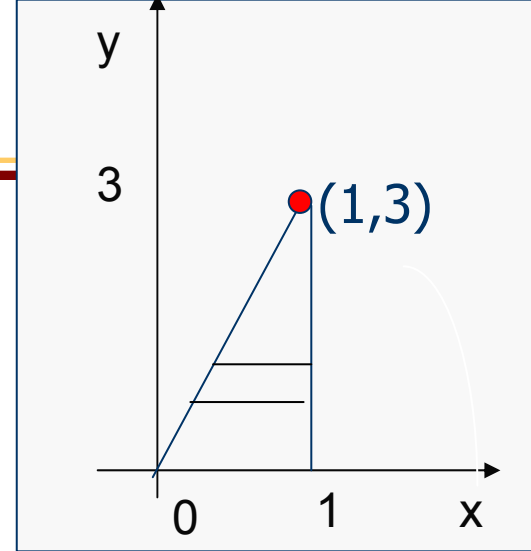
Αλλαγή σειρά ολοκλήρωσης

Βρες τον ολοκλήρωμα:

$$\int_0^3 \int_{y/3}^1 e^{x^2} dx dy$$

$$\text{Συνοπτικά } R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 3 \\ y/3 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 3x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$$

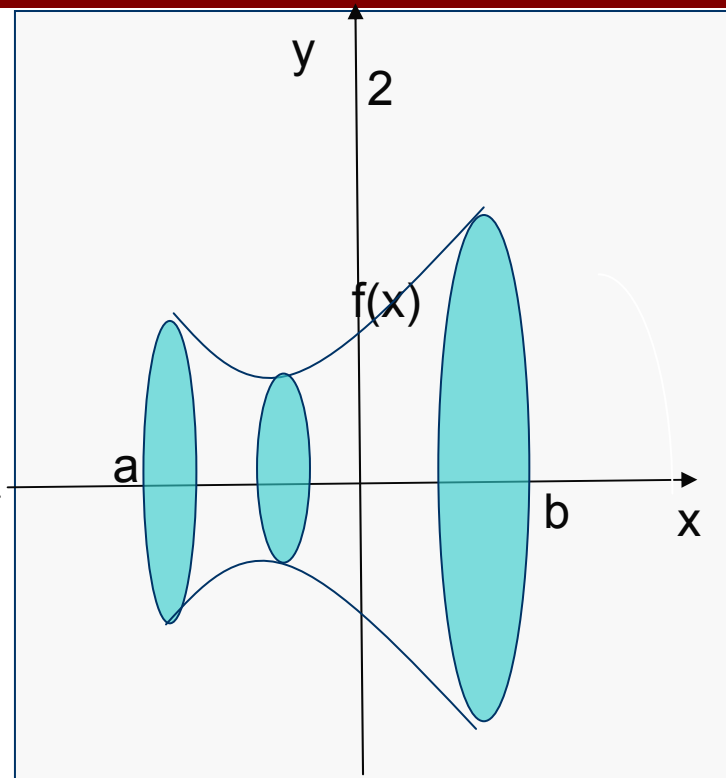
$$\int_0^3 \int_{y/3}^1 e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^{3x} e^{x^2} dy dx =$$



Όγκος στερεού εκ περιστροφής

Τομή του στερεού είναι κύκλος
εμβαδού $\pi f^2(x)$, $a \leq x \leq b$:

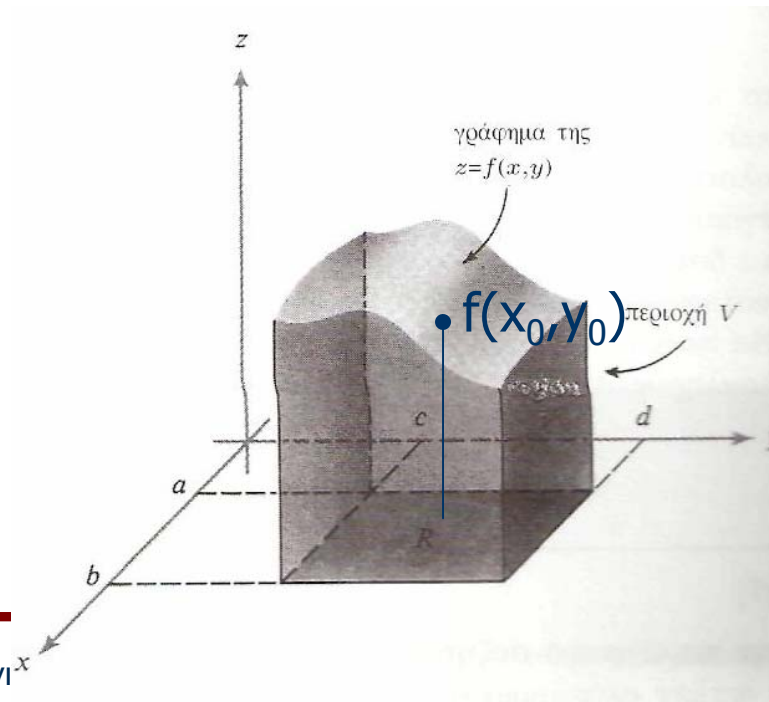
$$\text{όγκος} = \text{άθροισμα των εμβαδών} = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$



Θεώρημα μέσης τιμής για διπλά ολοκληρώματα

$$\int_S f(x) dx = f(x_0) \cdot L(S), \quad x \in S, \quad L(S) = \text{μήκος του } R$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) \cdot A(R), \quad (x_0, y_0) \in R, \quad A(R) = \text{εμβαδόν του } R$$



HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Τριπλά Ολοκληρώματα



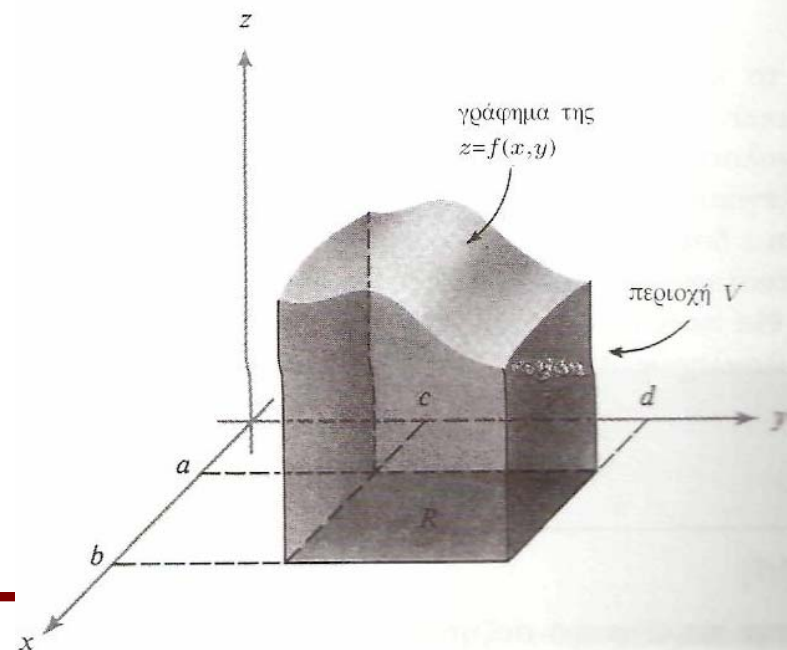
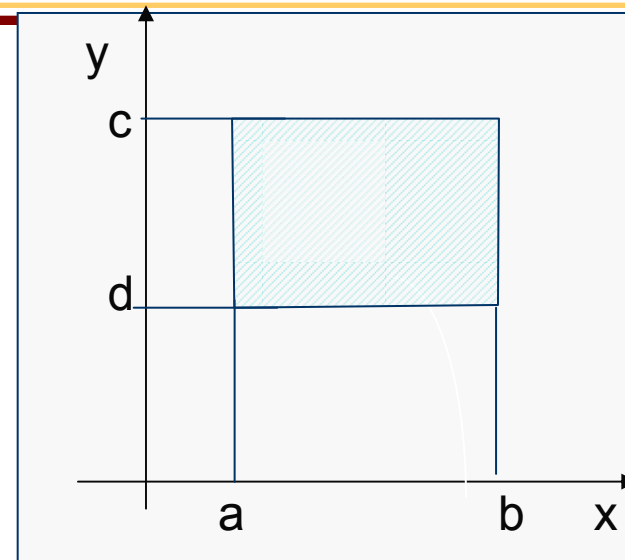
Διπλά Ολοκληρώματα

$z = f(x, y)$ συνάρτηση.

Βρες τον όγκο κάτω από το γράφημα εμβαδόν
κάτω από το γράφημα.

$$R = \left\{ \begin{array}{l} c \leq y \leq d \\ a \leq x \leq b \end{array} \right\}$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

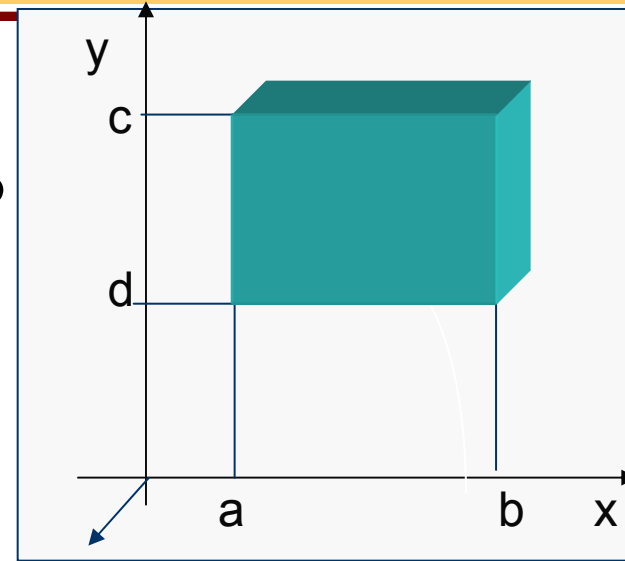


Τριπλά Ολοκληρώματα

$f(x,y,z)$ συνάρτηση.

$R=[a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

$$R = \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \\ e \leq z \leq f \end{array} \right\}$$



$$\int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z) dx \right) dy \right) dz$$

$$\text{π.χ.} \int_1^3 \left(\int_0^2 \left(\int_0^1 (x + 2y + z) dx \right) dy \right) dz =$$

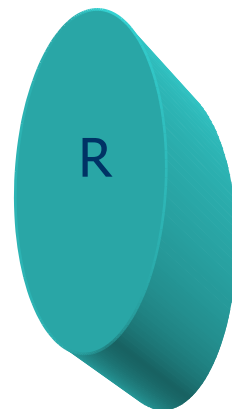


Τριπλά Ολοκληρώματα

$f(x,y,z)$ συνάρτηση, $R \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Αν $f(x,y,z) = 1$,

$$\iiint_R 1 dx dy dz = \text{Όγκος στερεού } R$$



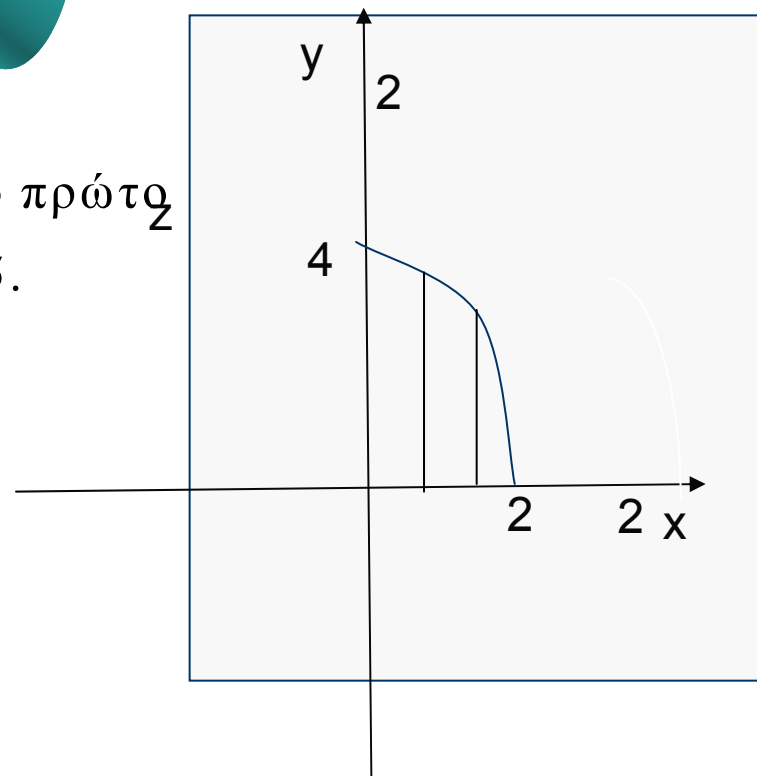
π.χ. Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται από $y=4-x^2$ και $z=5$.

A' Τρόπος

$$f(x,y) = 5$$

$$c(x_0) = \{(x_0, y) \mid 0 \leq y \leq 4-x^2\}, 0 \leq x_0 \leq 2$$

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 4-x^2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{array} \right\} \quad \text{όγκος} = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} 5 dy dx$$



Τριπλά Ολοκληρώματα

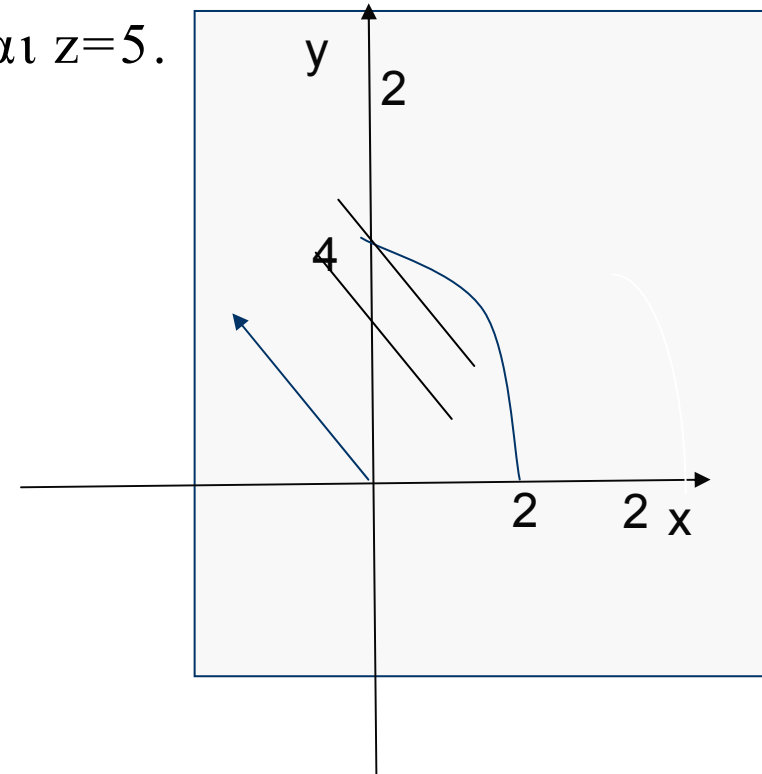
π.χ. Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται από $y=4-x^2$ και $z=5$.

B' Τρόπος

D στερεό, $c(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0, z) \mid 0 \leq z \leq 5\}$

, $(x_0, y_0) \in R$

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 4-x^2 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 5 \end{array} \right\} \quad \text{όγκος} = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^5 1 dz dy dx$$



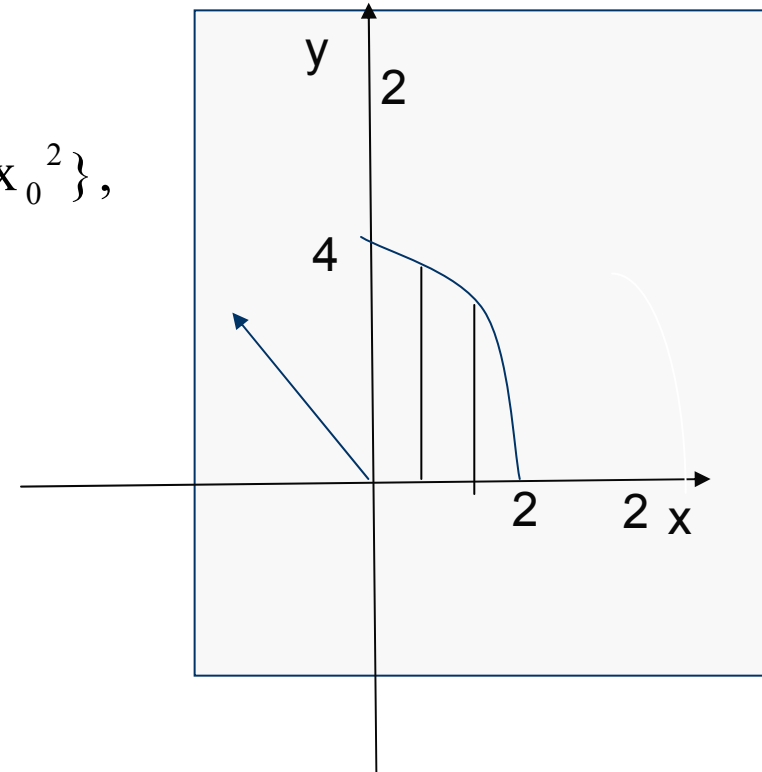
Τριπλά Ολοκληρώματα

π.χ. Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται από $y=4-x^2$ και $z=5$.

Γ' Τρόπος

D στερεό, $c(x_0, z_0) = \{(x_0, y, z_0) \mid 0 \leq y \leq 4 - x_0^2\}$,
 $0 \leq x_0 \leq 2, 0 \leq z_0 \leq 5$

$$\text{όγκος} = \int_0^5 \int_0^2 \int_0^{4-x^2} 1 dy dx dz$$



Τριπλά Ολοκληρώματα

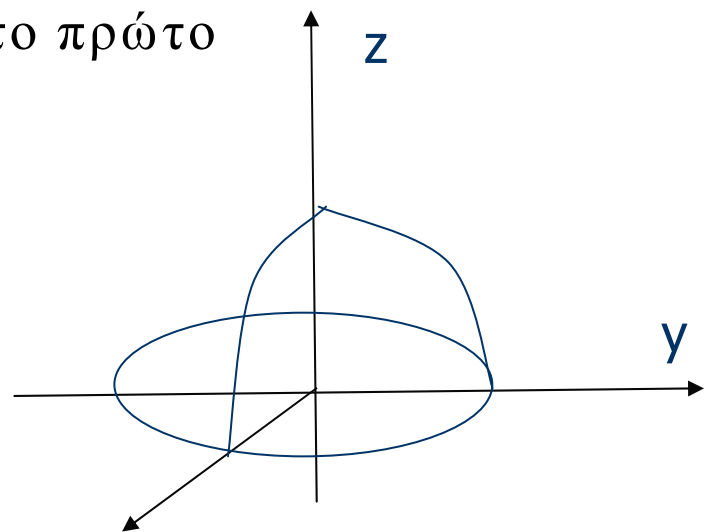
π.χ. Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται από $z=1-x^2-y^2$.

Τομές

$$xy \text{ επίπεδο: } (z=0) \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$xz \text{ επίπεδο: } (y=0) \rightarrow z = 1 - x^2$$

$$yz \text{ επίπεδο: } (x=0) \rightarrow z = 1 - y^2$$

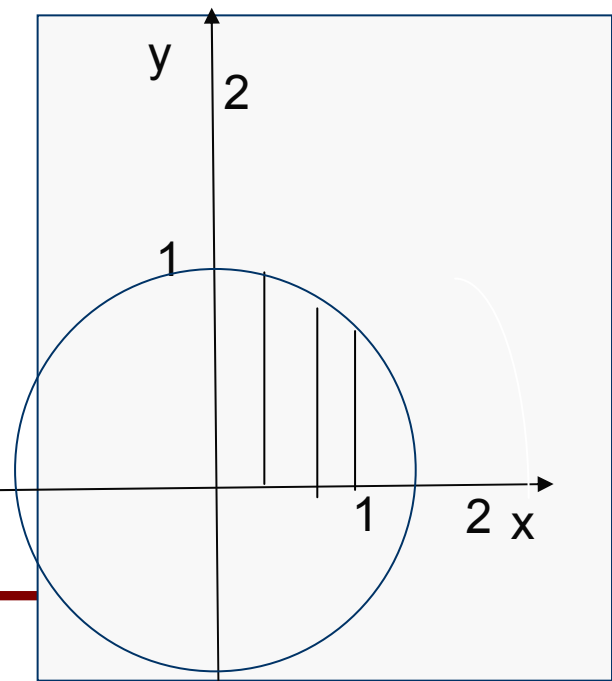


A' Τρόπος (Διπλό ολοκλήρωμα)

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

$$c(x_0) = \{(x_0, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x_0^2}\}, 0 \leq x_0 \leq 1$$

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \quad \text{όγκος} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx$$



Τριπλά Ολοκληρώματα

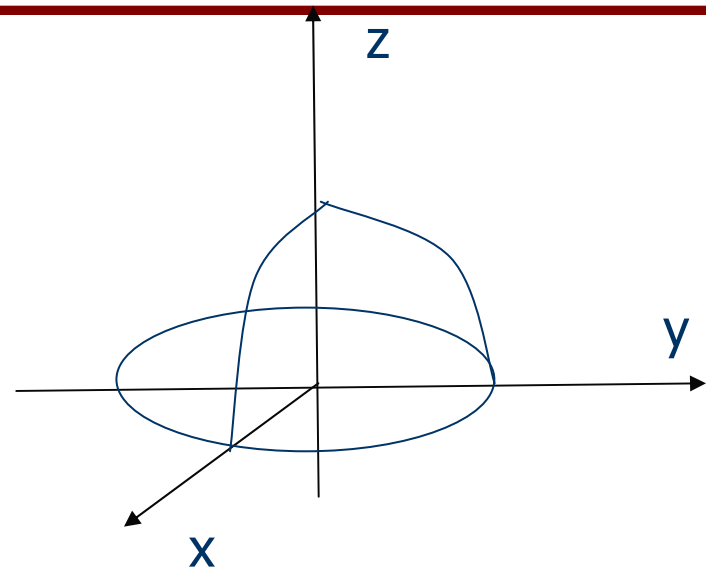
π.χ. Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται από $z=1-x^2-y^2$.

Τομές

$$xy \text{ επίπεδο: } (z=0) \rightarrow x^2+y^2 = 1$$

$$xz \text{ επίπεδο: } (y=0) \rightarrow z = 1 - x^2$$

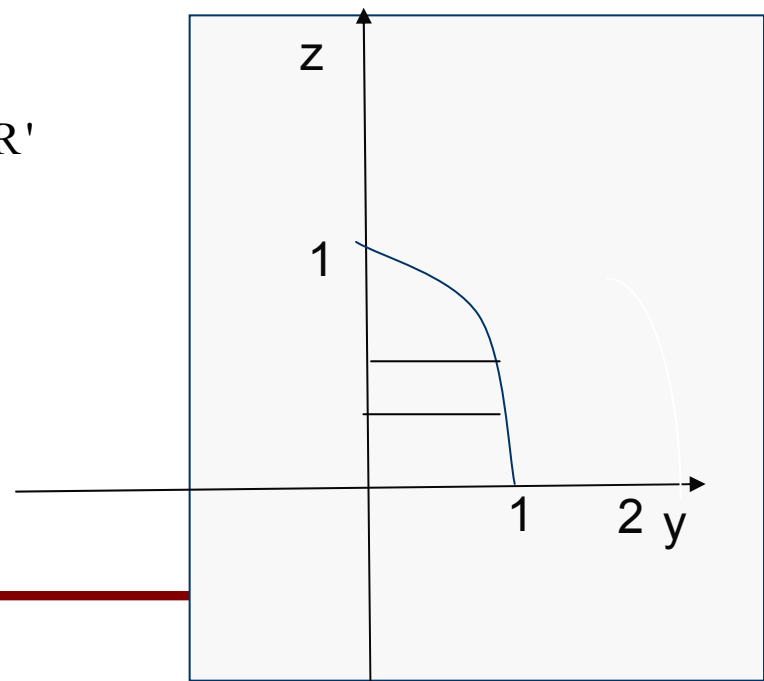
$$yz \text{ επίπεδο: } (x=0) \rightarrow z = 1 - y^2$$



B' Τρόπος (Τριπλό ολοκλήρωμα)

$$c(y_0, z_0) = \{(x, y_0, z_0) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{1 - z_0 - y_0^2}\}, (y_0, z_0) \in R'$$

$$R' = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y_0 \leq 1 \\ 0 \leq z_0 \leq 1 - y_0^2 \end{array} \right\} \quad \text{όγκος} = \int_0^1 \int_0^{1-y^2} \int_0^{\sqrt{1-z-y^2}} 1 \, dx \, dz \, dy$$



Τριπλά Ολοκληρώματα

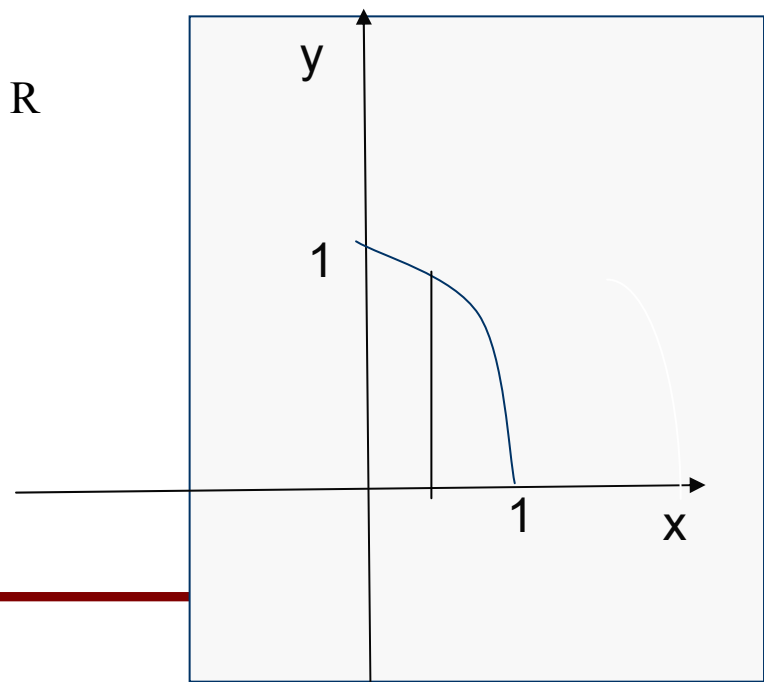
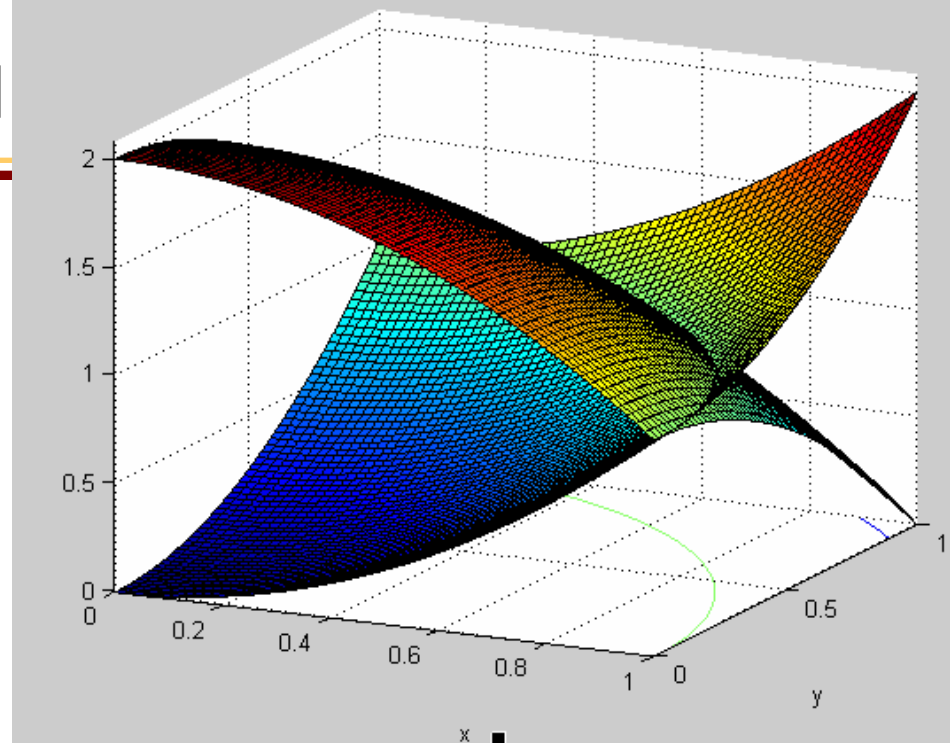
π.χ. Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται από $z=2-x^2-y^2$ και $z=x^2+y^2$.

Τομές

$$2-x^2-y^2 = x^2+y^2 \rightarrow x^2+y^2 = 1, z = 1$$

$$c(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0, z) \mid x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2\}, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} \quad \text{όγκος} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} 1 \, dz \, dy \, dx$$



Τριπλά Ολοκληρώματα

π.χ. Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πάνω ημιχώρο και περικλείεται από $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και $x + z = 1$.

Τομές

xy επίπεδο: $x^2 + y^2 = 1$,

xz επίπεδο: $x^2 + z^2 = 1$,

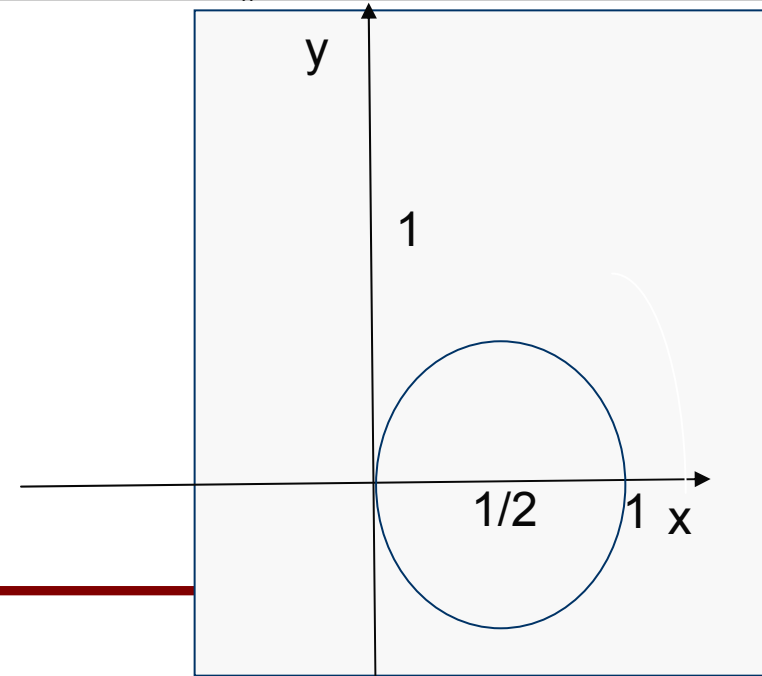
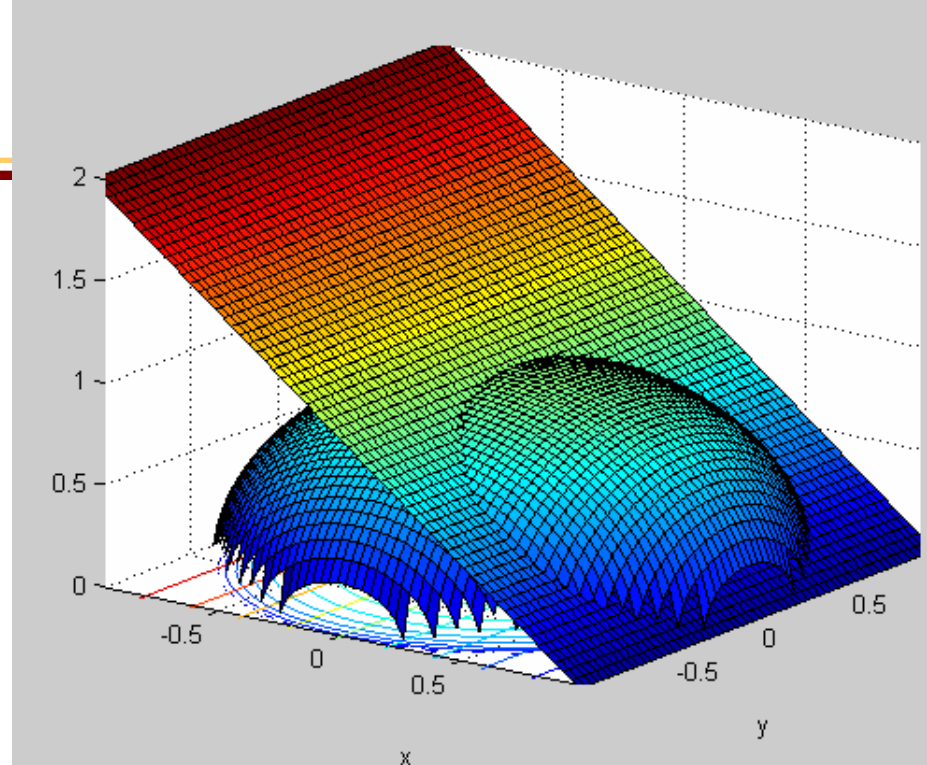
yz επίπεδο: $x^2 + z^2 = 1$,

τομή με $x+z=1$ επίπεδο: $x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 1 \rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$

$c(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0, z) \mid 1-x_0 \leq z \leq \sqrt{1-x_0^2-y_0^2}\}, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (x - \frac{1}{2})^2} \leq y \leq \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (x - \frac{1}{2})^2} \end{array} \right\}$$

$$\text{όγκος} = \int_0^1 \int_{-\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (x - \frac{1}{2})^2}}^{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (x - \frac{1}{2})^2}} \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx$$



HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Συστήματα συντεταγμένων



Πολικές συντεταγμένες

Καθορίζω το $P(x,y)$ από 2 στοιχεία (r,θ)

θ : γωνία OP με ox άξονα

r : απόσταση του P από το $O(0,0)$

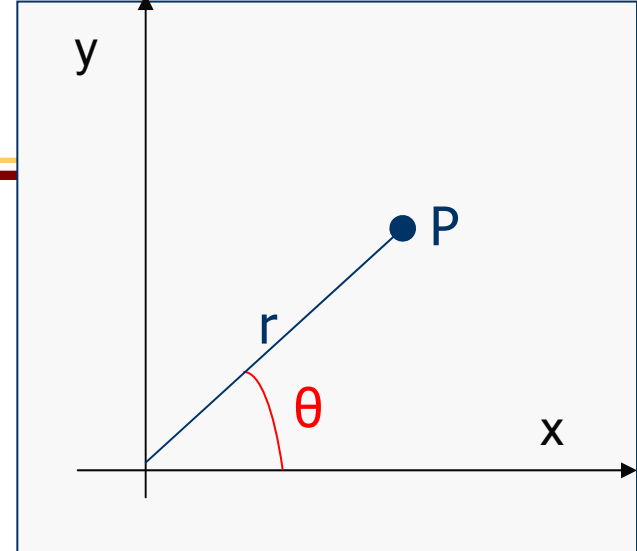
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(y / x)$$

Το $(1,1)$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες
είναι το $(\sqrt{2}, \pi/4)$ σε πολικές



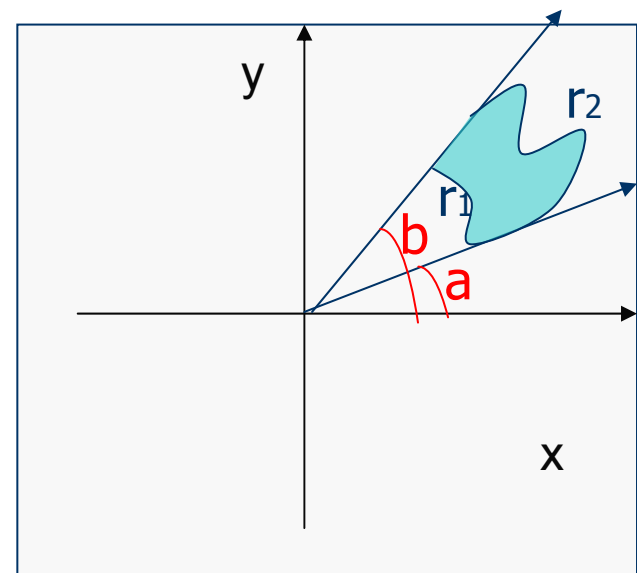
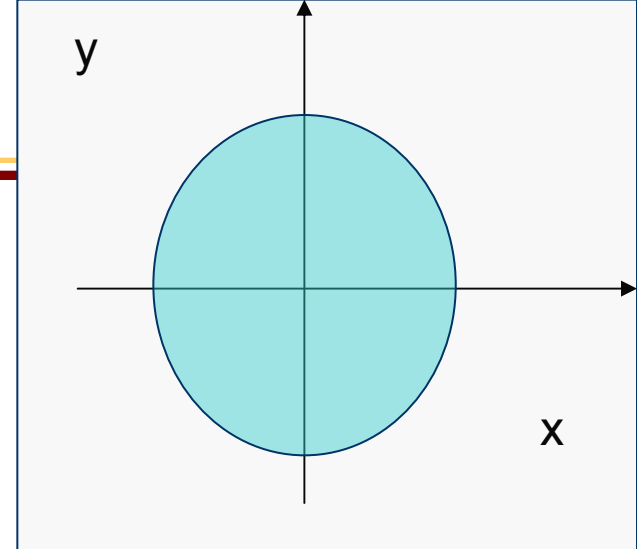
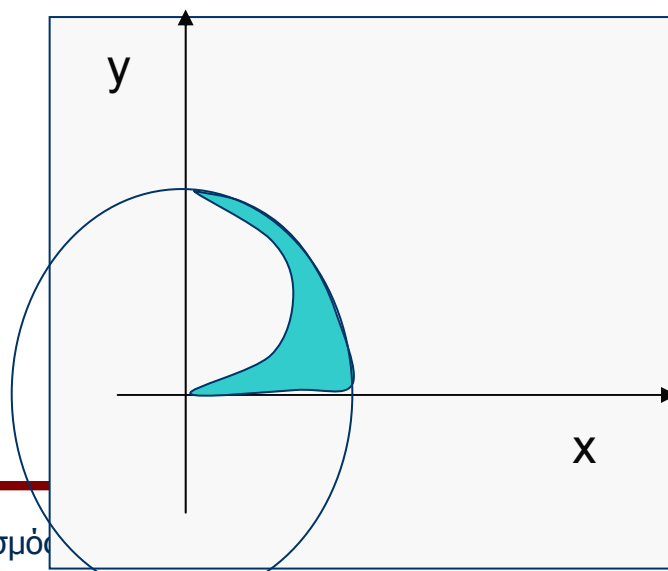
Πολικές συντεταγμένες

Σύνολο σημείων του επιπέδου με

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ και $0 \leq r \leq 1$. \rightarrow Μοναδιαίος δίσκος

Γενικά σύνολο σημείων επιπέδου με

$$\begin{cases} a \leq \theta \leq b \\ r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta) \end{cases} \quad \text{π.χ.} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 1 - \cos \theta \leq r \leq 1 \end{cases}$$

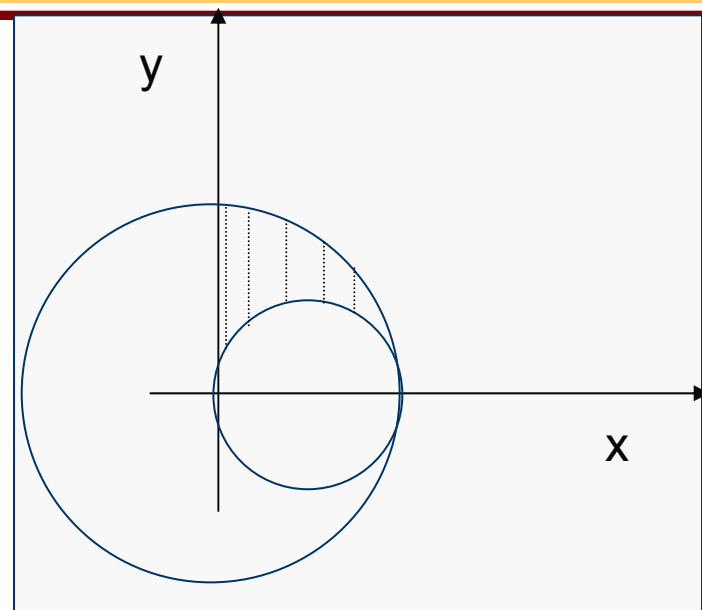


Πολικές συντεταγμένες

$$\text{π.χ. } \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi / 2 \\ \cos \theta \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \cos \theta \rightarrow r = \cos \theta \rightarrow r = x / r \rightarrow r^2 = x \rightarrow \\ x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

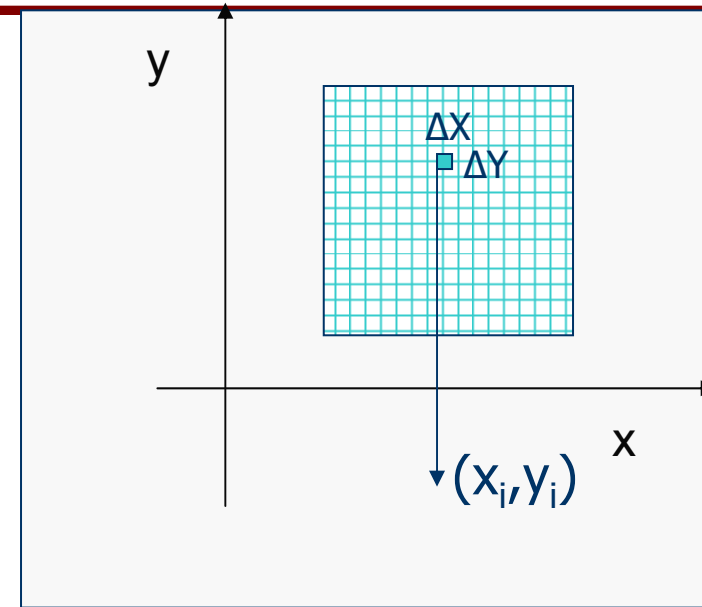
$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



Διπλά Ολοκληρώματα

$$f(x,y):R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

1. Διαμερίζω το R και αριθμώ τα τμήματα $(x_i, y_i) \in R_i$
2. Εμβαδόν $R_i = \Delta X \cdot \Delta Y$
3. Στο R_i θεωρώ πως η $f(x,y)$ έχει τιμή $f(x_i, y_i)$
4. Ο όγκος πάνω από R_i το προσεγγίζεται $f(x_i, y_i) \cdot \Delta X \cdot \Delta Y$



$$\text{Συνολικός όγκος προσεγγίζεται} = \sum_i f(x_i, y_i) \cdot \Delta X \cdot \Delta Y$$

$$\text{Συνολικός όγκος} = \lim_{(\Delta X, \Delta Y) \rightarrow (0,0)} \sum_i f(x_i, y_i) \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \iint_R f(x, y) dx dy$$



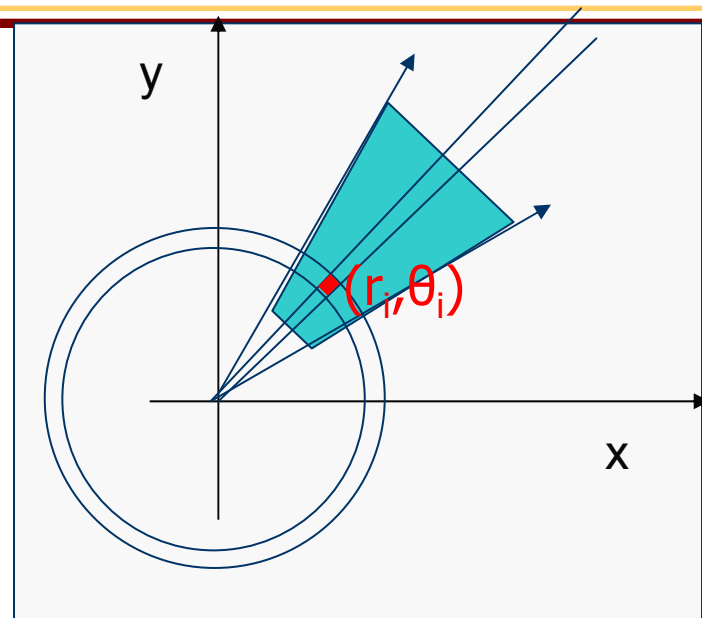
Πολικές συντεταγμένες

$$f(r, \theta): \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, \theta) \rightarrow f(r, \theta)$$

Η f περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες (r, θ)

$$R = \begin{cases} a \leq \theta \leq b \\ r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta) \end{cases}$$



1. Παίρνω διαμέριση $R_i, (r_i, \theta_i) \in R_i$

$$2. \text{Εμβαδόν } R_i = \frac{\Delta\Theta}{2} \cdot (r_2^2 - r_1^2) = \frac{\Delta\Theta}{2} \cdot \left(\left(r_i + \frac{\Delta R}{2} \right)^2 - \left(r_i - \frac{\Delta R}{2} \right)^2 \right) = \Delta\Theta \cdot r_i \cdot \Delta R$$

3. Στο R_i θεωρώ πως η $f(r, \theta)$ έχει τιμή $f(r_i, \theta_i)$

4. Ο όγκος πάνω από R_i το προσεγγίζεται $f(r_i, \theta_i) \cdot \Delta\Theta \cdot r_i \cdot \Delta R$



Συνολικός όγκος προσεγγίζεται $= \sum_i f(r_i, \theta_i) \cdot \Delta\Theta \cdot r_i \cdot \Delta R$

$$\text{Συνολικός όγκος} = \lim_{(\Delta\Theta, \Delta R) \rightarrow (0,0)} \sum_i f(r_i, \theta_i) \cdot \Delta\Theta \cdot r_i \cdot \Delta R \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \iint_R f(r, \theta) r \cdot dr d\theta$$



Πολικές συντεταγμένες

π.χ. Βρείτε το εμβαδόν δίσκου ακτίνας r_0 .

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq r_0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Εμβαδόν δίσκου} = \iint_R r \cdot dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} r dr d\theta = \pi r_0^2$$

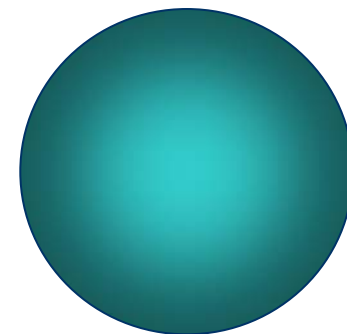
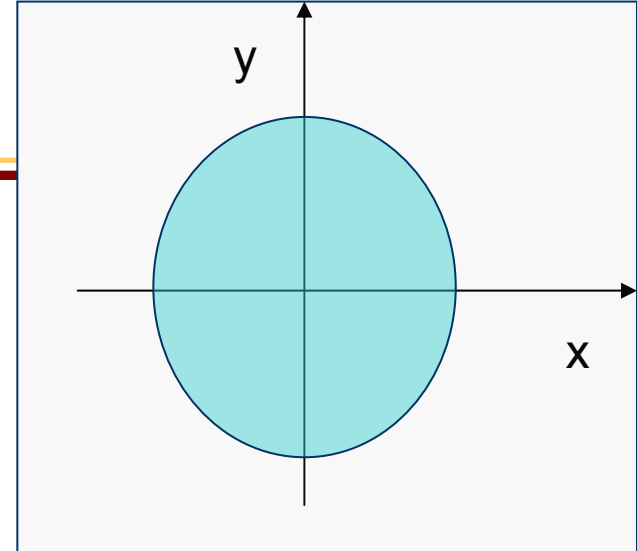
π.χ. Βρείτε τον όγκο μοναδιαίας σφαίρας ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) του πάνω ημισφαιρίου.

$$\text{Πάνω ημισφαίριο } z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$\text{Μετατροπή σε πολικές: } f(r, \theta) = \sqrt{1 - r^2}$$

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq r_0 = 1 \end{array} \right\}$$

$$\text{Εμβαδόν δίσκου} = \iint_R f(r, \theta) r \cdot dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr d\theta =$$



Πολικές συντεταγμένες

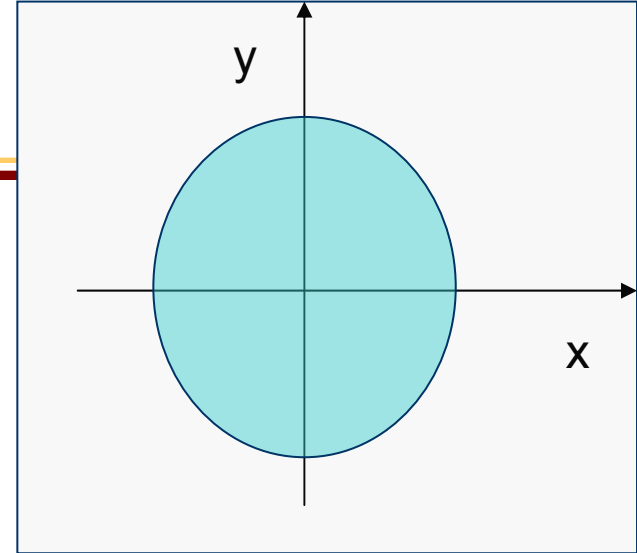
π.χ. Υπολογίστε το $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, D μον. κύκλος

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dx dy = ?$$

Λύση αλλαγή σε πολικές

$$R = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad f(r, \theta) = e^{r^2}$$

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta =$$



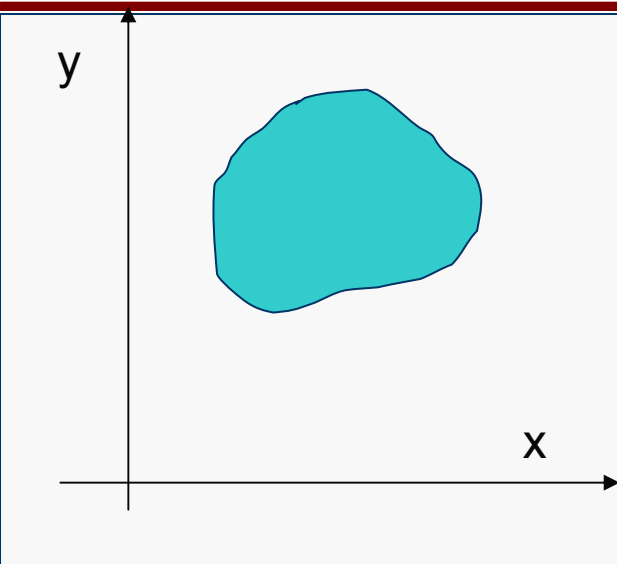
HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Συστήματα συντεταγμένων



Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών

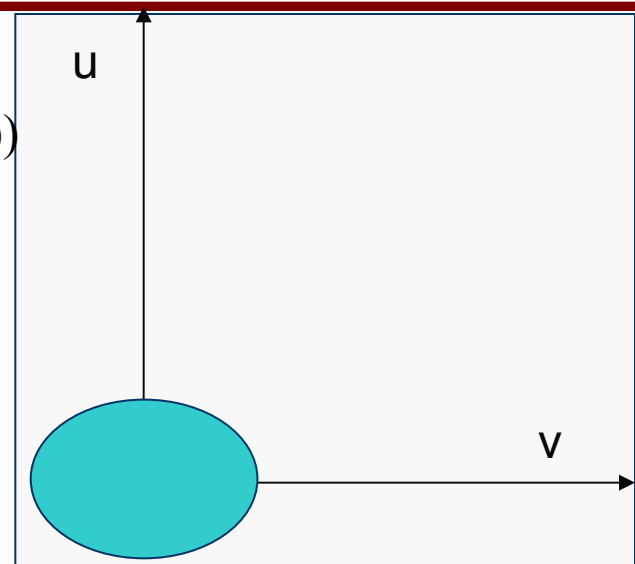


$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (u = g_1(x, y), v = g_2(x, y))$$



$$DT = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(u, v) |DT| du dv$$

π.χ.

Πολικές

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$DT = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad |DT| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

Επέκταση στα τριπλά ολοκληρώματα:

$$\int \iint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int \iint_{D'} f(u, v, w) |DT| du dv dw$$



Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Καθορίζω το $P(x,y,z)$ από 3 στοιχεία (r,θ,z)

$P'(x,y,0)$

θ : γωνία OP' με ox άξονα

r : απόσταση του $P'(x,y,0)$ από το $O(0,0,0)$

$$x = r \cos \theta$$

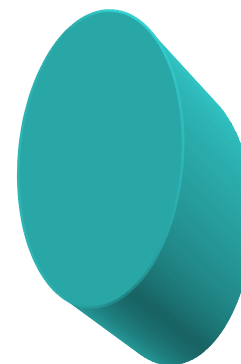
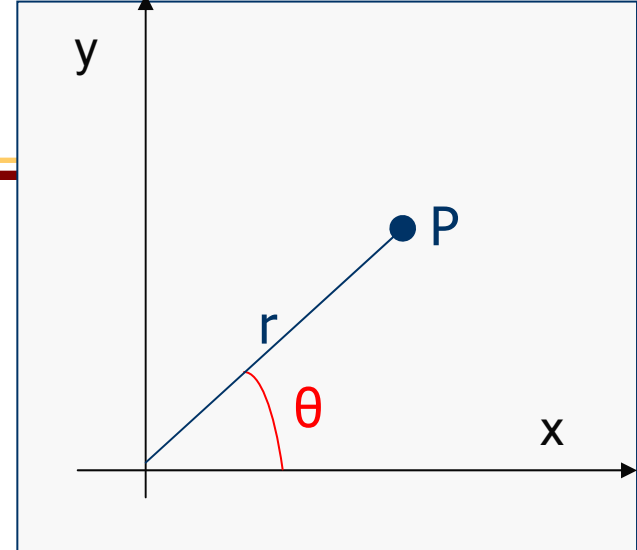
$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(y / x)$$

$$D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq r_0 \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

$$\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_D f(r,\theta,z) r dr d\theta dz =$$

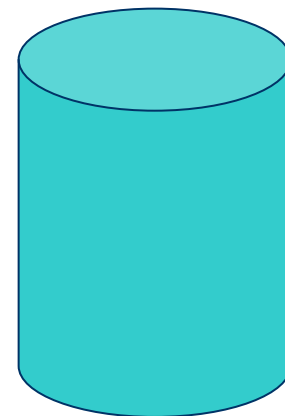


Κυλινδρικές Συντεταγμένες

π.χ. Υπολογίστε το όγκο κυλίνδρου ύψους h , ακτίνας r_0

$$D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq r_0 \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

$$\text{όγκος} = \iiint_D r dr d\theta dz =$$



π.χ. Βρείτε το όγκο που βρίσκεται πάνω από το $z=0$

και κάτω από το $z=x^2+y^2$ και παραπλεύρως από τον κύλινδρο

$$x^2+y^2 = 4.$$

Μετατροπή σε κυλινδρικές $D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq z \leq r^2 \end{cases}$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2} r dz dr d\theta =$$



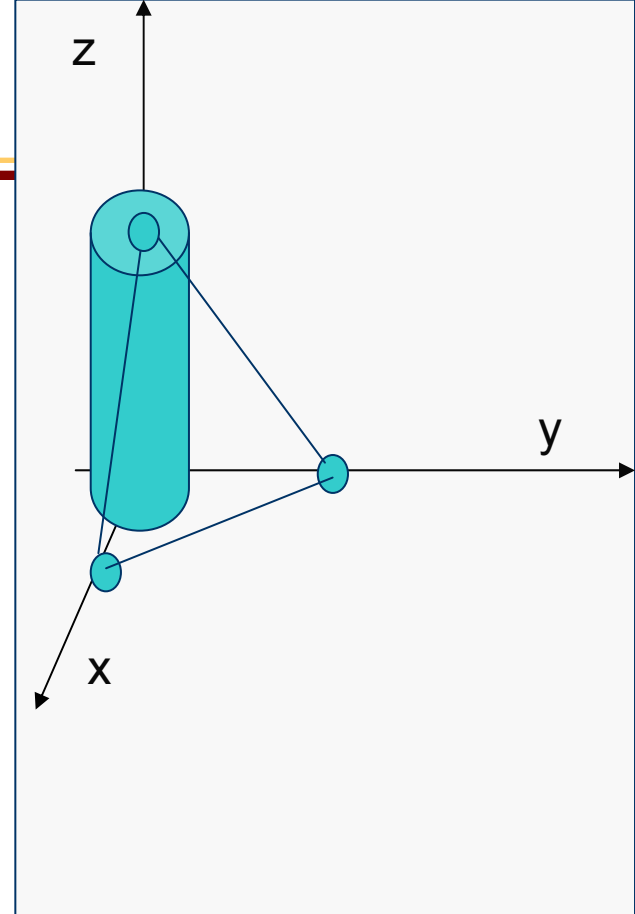
Κυλινδρικές Συντεταγμένες

π.χ. Υπολογίστε το όγκο στερεού D που ορίζεται από $x^2 + y^2 \leq 1$ και τα επίπεδα $x+y+z=2, z=0, x=0, y=0$.

Μετατροπή σε κυλινδρικές
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 2 - x - y = 2 - r(\cos \theta + \sin \theta) \end{cases}$$

$$\text{όγκος} = \iiint_D r dz d\theta dr =$$



Σφαιρικές Συντεταγμένες

Καθορίζω το $P(x,y,z)$ από 3 στοιχεία (ρ, φ, θ) , $P'(x,y,0)$

θ : γωνία OP' με ox άξονα

φ : γωνία OP με oz άξονα

ρ : απόσταση του P από το $O(0,0,0)$

$$z = \rho \cos \varphi$$

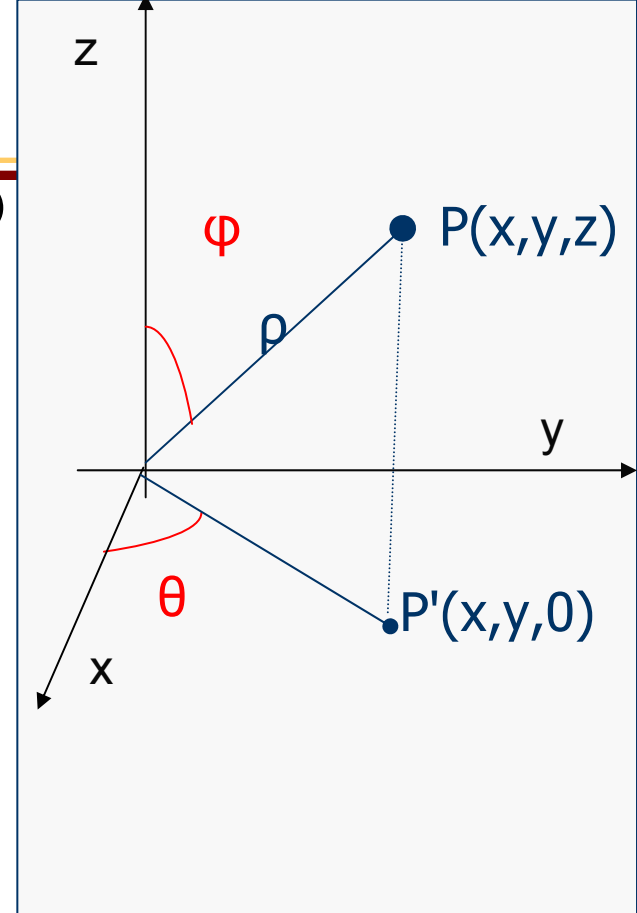
$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \rho_0 \end{cases}$$

$$\theta = \tan^{-1}(y / x)$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(\rho, \varphi, \theta) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

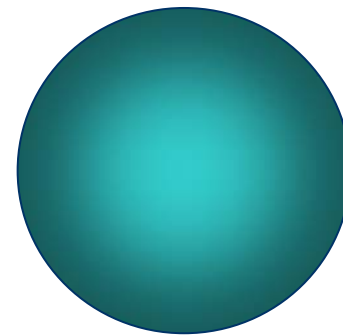


Σφαιρικές Συντεταγμένες

π.χ. Υπολογίστε το όγκο σφαίρας ακτίνας ρ_0

$$D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \rho_0 \end{cases}$$

$$\text{όγκος} = \iiint_D \rho^2 |\sin \varphi| d\varphi d\theta d\rho = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\rho^2 d\theta d\varphi d\rho$$



π.χ. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\iiint_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} dx dy dz$, D στερεό

ανάμεσα σε 2 σφαίρες ακτίνων a, b , $a < b$.

Μετατροπή σε σφαιρικές $D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ a \leq \rho \leq b \end{cases}$

$$\iiint_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\rho^2 |\sin \varphi|}{\rho^3} d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{2 \sin \varphi}{\rho} d\rho d\varphi d\theta =$$

