ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μέγιστα & Ελάχιστα

1 μεταβλητή: Τύπος Taylor

Αν y=f(x) είναι καλή συνάρτηση

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \ \text{a<c<}x$$

$\pi.\chi$

$$f(x) = e^x, e^{0.7} = ?$$

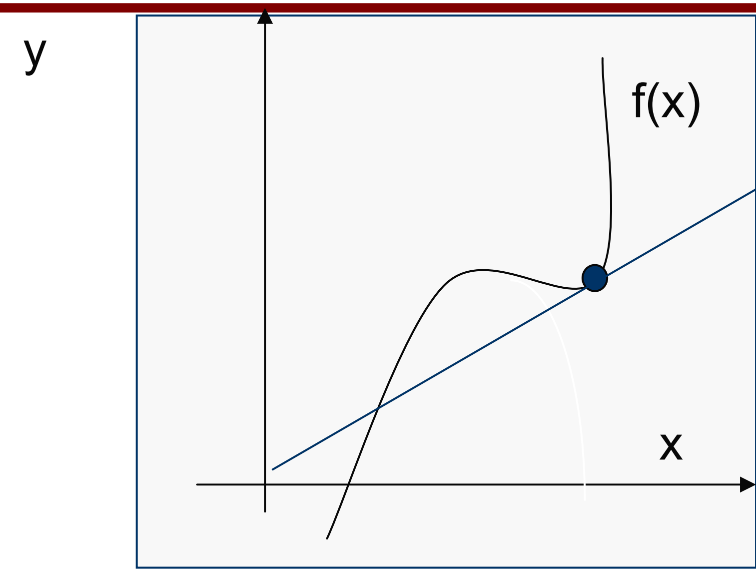
Εφαρμόζω το Θ. Taylor n=5, a=0

$$\text{f(0.7)}=f(0) + \frac{f(0)}{1!}(0.7) + \frac{f''(0)}{2!}(0.7)^2 + \ldots + \frac{f^5(0)}{5!}(0.7)^5 + \frac{f^6(c)}{6!}(0.7)^6$$

$$0 < c < 1 \to 1 < e^c < 3 \to \frac{f^6(c)}{6!}(0.7)^6 < \frac{3 \bullet 0.7^6}{6!}$$

$$|e^{0.7} - m| = \frac{f^6(c)}{6!}(0.7)^6 < \frac{3 \bullet 0.7^6}{6!}$$

Ακρότατα συνάρτησης



Αν f είναι καλή συνάρτηση (παραγ. - συνεχής)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2, \text{a<c<}x$$

$$y(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a), \text{ εξίσωση εφαπτομένης}$$

Υποθέτω f"(a)>0

Έστω g(x)=f"(x), συνεχής g(a)>0.

Λόγω συνέχειας υπάρχει γειτονιά Δ του a τ.ώ. $\forall x \in \Delta \Rightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$

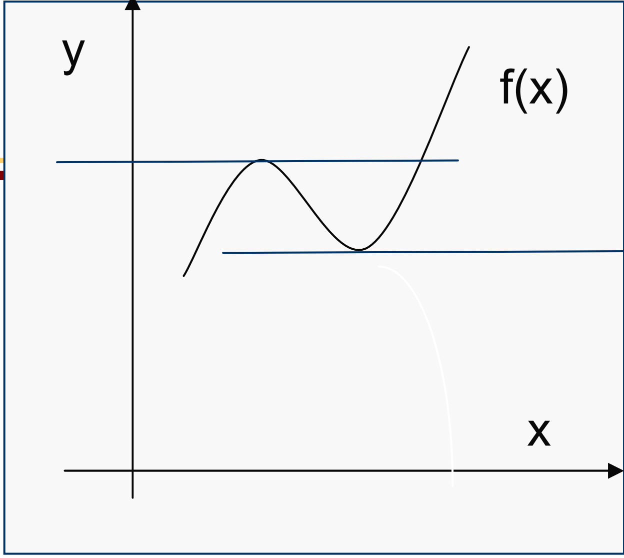
Άρα $\forall x \in \Delta$, $\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2 \geq 0 \Rightarrow R_1(x) > 0$

$f(x) \geq y(x), \forall x \in \Delta \Rightarrow$ Το γράφημα της f είναι πάνω από την εφαπτομένη στο (a,f(a))

Ομοίως αν f"(a)<0 $\Rightarrow$ Το γράφημα της f είναι κάτω από την εφαπτομένη στο (a,f(a))

Αν f"(a)=0, κανένα συμπέρασμα

Τοπικά Ακρότατα



$f : U \to \mathbb{R}$

a τοπικό ελάχιστο αν υπάρχει γειτονιά Δ(a) τ.ώ. $\forall x \in \Delta(\alpha) \Rightarrow f(\mathrm{x}) \geq \mathrm{f(a)}$

a τοπικό μέγιστο αν υπάρχει γειτονιά Δ(a) τ.ώ. $\forall x \in \Delta(\alpha) \Rightarrow f(\mathrm{x}) \leq \mathrm{f(a)}$

Αν a τοπικό ακρότατο (δηλ. μέγιστο ή ελάχιστο) τότε $f'(a) = 0$

Αν $f'(a) = 0$

1) $f''(a) < 0$, a τοπικό μέγιστο

2) $f''(a) > 0$, a τοπικό ελάχιστο

3) $f''(a) = 0$???

2 μεταβλητές: Τύπος Taylor

Αν $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι καλή συνάρτηση

$$f(x,y) = \underbrace{f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\bullet(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}_{\text{Εφαπτόμενο επίπεδο}}\bullet(y-b) + R_1(x,y)$$

$$R_1(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1,c_2)\bullet(x-a)^2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1,c_2)\bullet(x-a)\bullet(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1,c_2)\bullet(y-b)^2\right)$$

π.χ.

$$f(x,y) = (y+1)e^x, (a,b) = (0,0)$$

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\bullet(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\bullet(y) + R_1(x,y)$$

…

2 μεταβλητές: Τύπος Taylor

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\bullet(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\bullet(y-b) + R_1(x,y)$$

$$R_1(x,y) = \frac{1}{2}\Big(\overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1,c_2)}^{\alpha}\bullet(x-a)^2 + \overbrace{\frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1,c_2)}^{\beta}\bullet(x-a)\bullet(y-b) + \overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1,c_2)}^{\gamma}\bullet(y-b)^2\Big)$$

Διαιρώ με το $(y-b)^2$ και θέτω $z = \dfrac{x-a}{y-b}$ και εξετάζω το πρόσημο

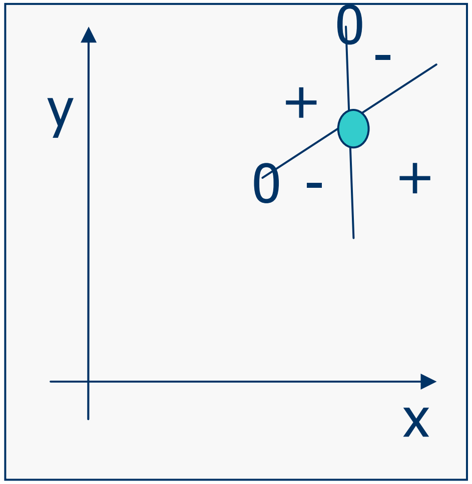
του πολυωνύμου $R_1(z) = \alpha z^2 + 2\beta z + \gamma$

$$4\beta^2 - 4\alpha\gamma = 4(\beta^2 - \alpha\gamma)$$

$$\Delta = \alpha\gamma - \beta^2$$

Αν $\Delta > 0$ $\begin{cases} \alpha > 0 \rightarrow R(z) > 0 \\ \alpha < 0 \rightarrow R(z) < 0 \end{cases}$

Αν $\Delta < 0$ αλλαγή προσήμου



Αν $\Delta = 0 \rightarrow$ τέλειο τετράγωνο $\begin{cases} \alpha > 0 \rightarrow R(z) \geq 0 \\ \alpha < 0 \rightarrow R(z) \leq 0 \end{cases}$

Κριτήριο β′ παραγώγου

Αν $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

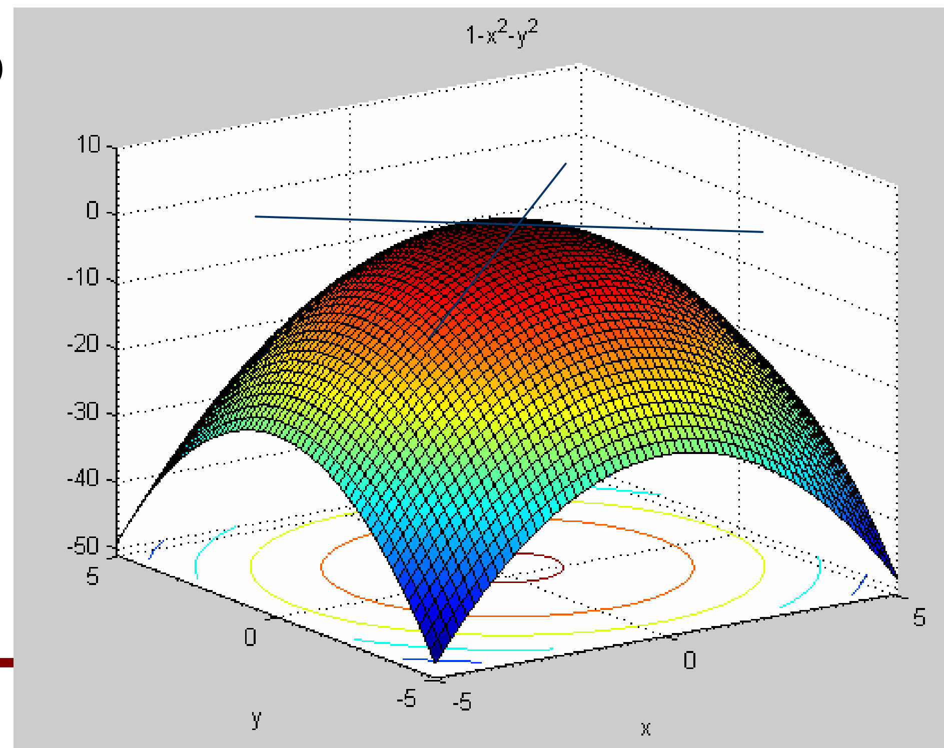
(a,b) $\in$ U είναι τοπικό ελάχιστο αν υπάρχει γειτονιά Δ(a,b) τ.ώ. $\forall (x, y) \in \Delta(\alpha) \Rightarrow f(x,y) \geq f(a,b)$

(a,b) $\in$ U είναι τοπικό μέγιστο αν υπάρχει γειτονιά Δ(a,b) τ.ώ. $\forall (x, y) \in \Delta(\alpha) \Rightarrow f(x,y) \leq f(a,b)$

Αν (a,b) $\in$ U είναι τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο τότε το εφαπτόμενο επίπεδο στο (a,b) είναι με το xy-επίπεδο

$\perp$ διάνυσμα στο εφ. επίπεδο $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)$

$$(a,b) \text{ τοπικό ακρότατο} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0}_{\text{Κρίσιμα Σημεία}}$$

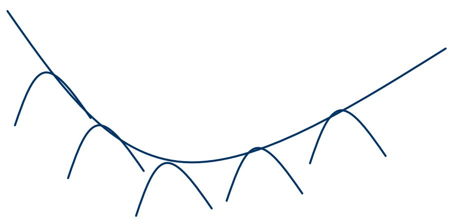


Κριτήριο για τοπικά ελάχιστα/μέγιστα

$$\text{Αν } \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\bullet\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right)^2$$

$$1)\ \text{Αν } \Delta > 0 \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0 \rightarrow \text{(a,b) είναι τοπικό ελάχιστο, το γράφημα πάνω από εφ. επ.} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0 \rightarrow \text{(a,b) είναι τοπικό μέγιστο, το γράφημα κάτω από εφ. επ.} \end{cases}$$



2) $\Delta < 0 \rightarrow$ τότε το (a,b) αντιστοιχεί σε σημείο "σαμαριού"

3) $\Delta = 0 \rightarrow$ κανένα συμπέρασμα

Τοπικά ελάχιστα/μέγιστα

$f(x,y) = x^2 + y^2$

Βρες τα κρίσιμα σημεία

$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$

Βρες τα κρίσιμα σημεία

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

Κρίσιμα σημεία: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2 = 4 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0 \to (0,0) \text{ τοπικό ελάχιστο}$$

Τοπικά ελάχιστα/μέγιστα

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(x_1, \ldots, x_n)$ τοπικό ακρότατο $\to \nabla f(x_1, \ldots, x_n) = 0$

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Εσσιανός (Hessian)

Αν H + ορισμένος ($\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ >0 και det(H)>0) τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο

Αν H - ορισμένος ($\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ <0 και det(H)>0) τότε έχουμε τοπικό μέγιστο

Κρίσιμα σημεία

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$$

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

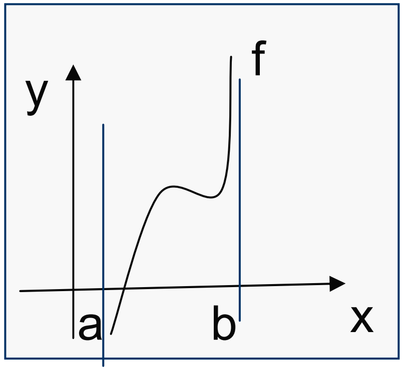
$$f(x,y) = y \sin x$$

ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Προσδιορισμός ολικού μέγιστου/ελάχιστου

Ακρότατα σε κλειστό πεδίο ορισμού (1 μεταβλητή)

$f:(a,b)\rightarrow\mathbb{R}$ Δεν έχει κατ' ανάγκη ολικό ελάχιστο ή μέγιστο



$f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, συνεχής - παραγωγίσιμη

Η f λαμβάνει ολικό ελάχιστο, μέγιστο είτε στο (a,b) είτε στο a ή στο b.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία (μαζί με f(a), f(b)) και συγκρίνουμε τιμές.

π.χ

$f(x) = x^2 + 5x - 4, x \in [2,5]$

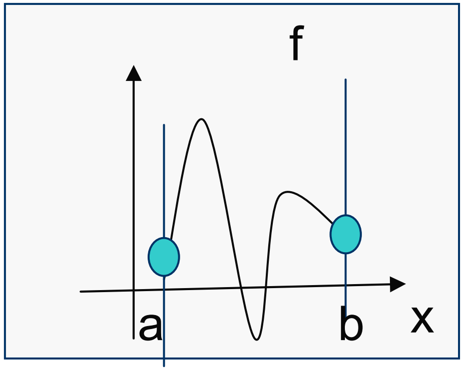
Κρίσιμα σημεία

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x = -2.5\ (\alpha\pi o\rho.)$

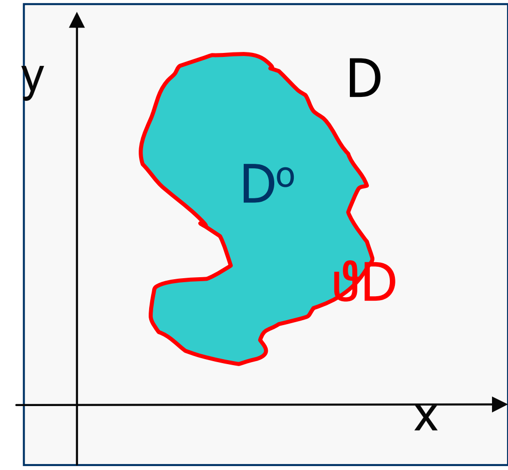
$f(2) = 10$

$f(5) = 46$

Οπότε ελάχιστο στο x = 2, μέγιστο στο x = 5.



Ακρότατα σε κλειστό πεδίο ορισμού (2 μεταβλητές)



$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D κλειστό φραγμένο

D^o: εσωτερικό του D (αντίστοιχο του (a,b))

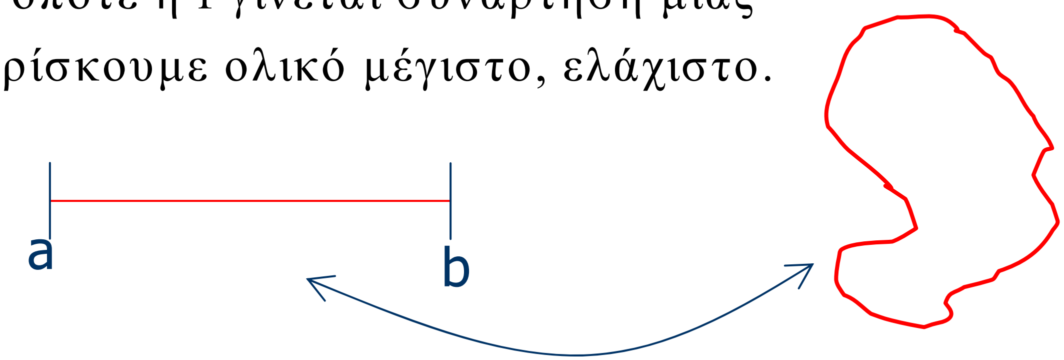
∂D: σύνορο του D (αντίστοιχο του a,b)

Αν f συνεχής και παραγωγίσιμη στο D λαμβάνει ολικό μέγιστο και ελάχιστο

Τρόπος υπολογισμού

–Βρίσκεις τα κρίσιμα σημεία στο D^o

–Περιορίζεις τη συνάρτηση στο ∂D οπότε η f γίνεται συνάρτηση μιας μεταβλητής σε κλειστό διάστημα. Βρίσκουμε ολικό μέγιστο, ελάχιστο.



Ακρότατα σε κλειστό πεδίο ορισμού (2 μεταβλητές)

$f(x,y)=3x^2+5y^2$

$D=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$ κλειστός μοναδιαίος δίσκος

Λύση

$D^o=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$

$\partial D=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$

–Κρίσιμα σημεία στο D^o

$(0,0)$ f(0,0)=0

–Περιορίζεις την f στο ∂D.

$\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$t\to(\cos t,\sin t)$

$F(t)=f\circ\varphi(t)=3\cos^2 t+5\sin^2 t=3+2\sin^2 t, t\in[0,2\pi]$

Κρίσιμα σημεία στο [0,2π]

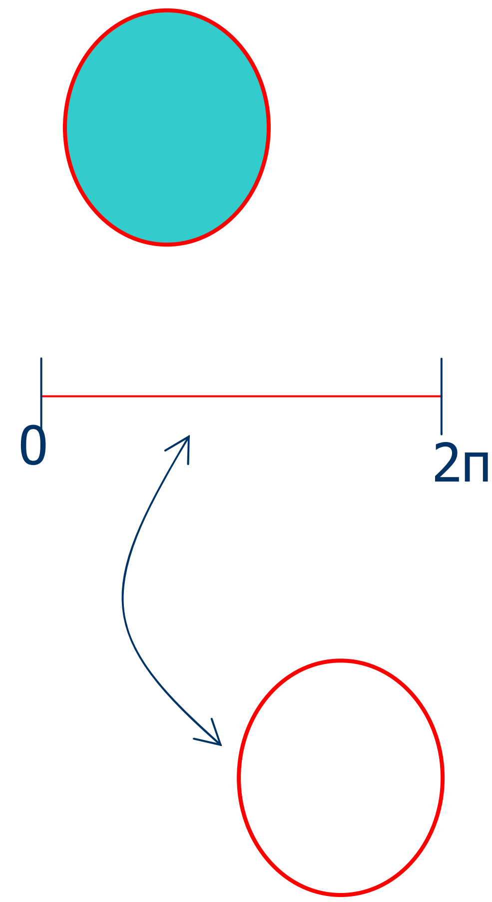
$F'(t)=4\cos t\sin t, t\in(0,2\pi)$

$F'(t)=0\to, t=\pi/2\ F(\pi/2)=5, t=\pi\ \ F(\pi)=3, t=3\pi/2\ F(3\pi/2)=5$

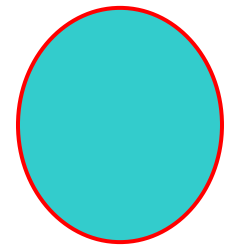
$\{0,2\pi\}: F(0)=3, F(2\pi)=3$

Ολικό μέγιστο έχω στα σημεία (0,1) (για t=$\pi/2$) και (0,-1) (για t=$3\pi/2$) με τιμή το 5

Ολικό ελάχιστο έχω στο σημείο (0,0) με τιμή το 0



Ακρότατα σε κλειστό πεδίο ορισμού (2 μεταβλητές)



$f(x,y) = (x^2 + y^2)^4$

$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ κλειστός μοναδιαίος δίσκος

Λύση

$D^o = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$

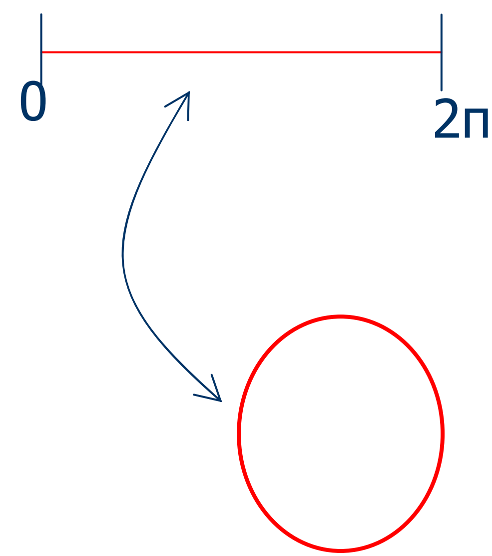
$\partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

–Κρίσιμα σημεία στο D^o

–Περιορίζεις την f στο ∂D.

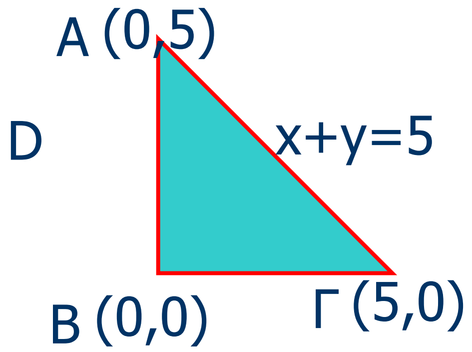
$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$t \to (\cos t, \sin t)$



Ακρότατα σε κλειστό πεδίο ορισμού (2 μεταβλητές)

$$f(x,y) = 2 + x + y - x^2 - y^2$$



Λύση

–Κρίσιμα σημεία στο D^o

...

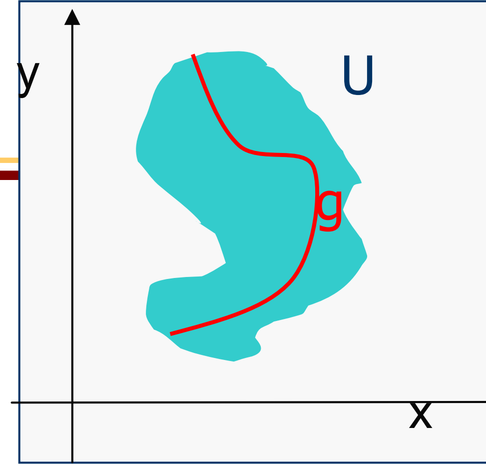
–Περιορίζεις την f στο ∂D.....

– 3 περιπτώσεις

ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Πολλαπλασιαστές Lagrange

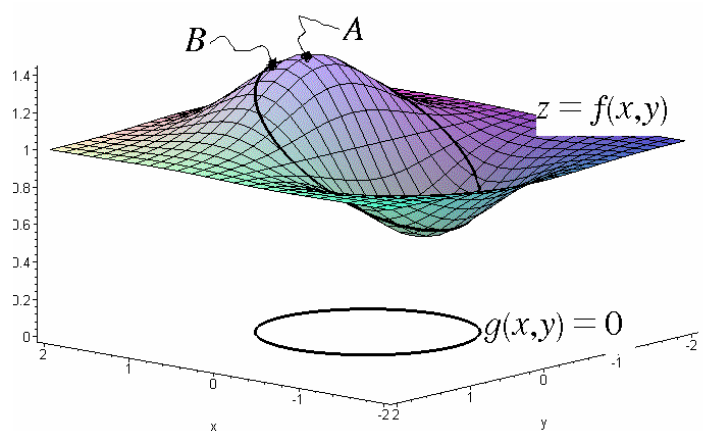
Ακρότατα υπό συνθήκη



Αν $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f σε μια καμπύλη g(x,y)=0.

$r(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



$t \to (x(t), y(t))$

$f(r(t)) = f(x(t), y(t))$

Ορισμός p κρίσιμο $\Leftrightarrow \dfrac{df}{dt}(t_0) = 0$

Από κανόνα αλυσίδας $\dfrac{df}{dt}(t_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(p)\bullet\dfrac{dx}{dt}(t_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(p)\bullet\dfrac{dy}{dt}(t_0) = \nabla f(p)\bullet r'(t_0)$

p κρίσιμο $\Leftrightarrow \nabla f(p)\bullet r'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(p) \perp r'(t_0)$

Όταν η καμπύλη δίδεται από τη g(x,y)=0 τότε $\nabla g(p) \perp r'(t_0)$ άρα $\nabla f(p) // \nabla g(p)$

$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$, (λ πολλαπλασιαστές lagrange)

*Αν λ = 0, ισχύει πάλι πως είμαι σε κρίσιμο σημείο.

Ακρότατα υπό συνθήκη

$f(x,y) = 3x^2 + 5y^2$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ Κρίσιμα σημεία της f επί της g

$Έστω\ (x,y)$ κρίσημο σημείο τότε έχουμε:

$\nabla f = < 6x, 10y >$

$\nabla g = < 2x, 2y >$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Matlab:
```
figure;
ezplot3('cos(t)','sin(t)','3*(cos(t))^2+5*(sin(t))^2');
hold on;
ezmesh('3*x^2+5*y^2',[-1 1], [-1 1]);
```

Να βρεθεί η απόσταση του O(0,0,0) από το x+2y+3z=1.

$\min\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$ $d(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$\nabla d = < 2x, 2y, 2z >$

$\nabla g = < 1, 2, 3 >$

$Έστω\ p = (x,y)$ κρίσημο σημείο τότε έχουμε:

$$\begin{cases} \nabla d(p) = \lambda \nabla g(p) \\ \text{x+2y+3z=1} \end{cases}$$

Ακρότατα υπό συνθήκη

Να μεγιστοποιηθεί ο όγκος κυλίνδρου δοσμένης επιφάνειας c.

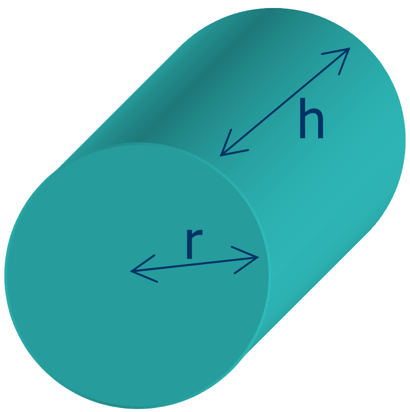
$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

$$S(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = c$$

$$\nabla V = < 2\pi rh, \pi r^2 >$$

$$\nabla S = < 4\pi r + 2\pi h, 2\pi r >$$

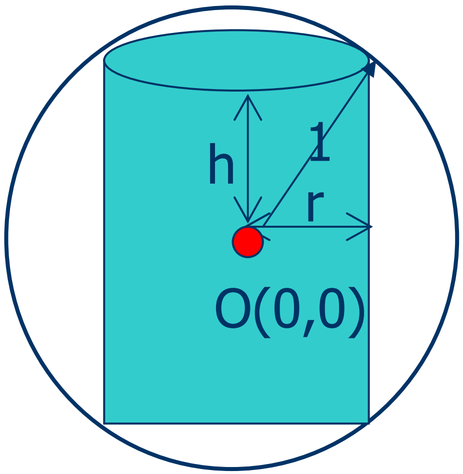
$$\begin{cases} \nabla V(p) = \lambda \nabla S(p) \\ 2\pi r^2 + 2\pi rh = c \end{cases}$$



Ακρότατα υπό συνθήκη

Να μεγιστοποιηθεί ο όγκος κυλίνδρου εγγεγραμμένου στη μοναδιαία σφαίρα.

$$V(r,h) = 2\pi r^2 h$$
$$g(r,h) = h^2 + r^2 - 1 = 0$$



$$\nabla V = < 4\pi rh, 2\pi r^2 >$$
$$\nabla g = < 2r, 2h >$$

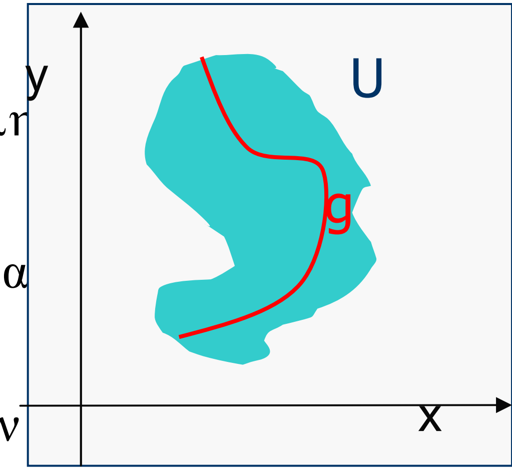
$$\begin{cases} \nabla V(p) = \lambda \nabla g(p) \\ h^2 + r^2 = 1 \end{cases}$$

Ακρότατα υπό 2 συνθήκες

Αν $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f επί των

$g_1(x,y,z)=0$ και $g_2(x,y,z)=0$ (τομή 2 επιφανειών δίνει καμπύλη



Ερώτημα:Περιορίστε την f στην g_1 βρείτε τα κρίσιμα σημεία

Προηγουμένως P κρίσιμο σημείο όταν $\nabla f(p) // \nabla g_1(p)$.

Όλα τα δυνατά κάθετα διανύσματα σε ένα σημείο P ορίζουν 1 κάθετο επίπεδο

Όταν η καμπύλη δίδεται από τη g(x,y)=0 τότε $\nabla g(p) \perp r'(t_0)$ άρα $\nabla f(p) // \nabla g(p)$

$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \lambda_2 \nabla g_2(p)$, ($\lambda_1, \lambda_2$ πολλαπλασιαστές lagrange)

Ακρότατα υπό συνθήκη

Να βρεθεί το σημείο τομής των επιπέδων που είναι πιο κοντά στο O(0,0,0) $x+3z=10$, $2x+y+z=1$.

$\min\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$ $\quad d(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$\nabla d =< 2x, 2y, 2z >$

$\nabla g_1 =< 1, 0, 3 >$

$\nabla g_2 =< 2,1,1 >$

$$\begin{cases} \nabla d(p)=\lambda_1 \nabla g_1(p)+\lambda_2 \nabla g_2(p) \\ 2x+y+z=1 \\ x+3z=10 \end{cases}$$

Ακρότατα υπό συνθήκη

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2, D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

Βρείτε τα ακρότατα της f.

$a)$ κρίσιμα σημεία στο $D^o = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$

$$\partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\nabla f = < 2x + y, 2y + x >$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \to \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \to x = y = 0$$

$\beta)$ κρίσιμα σημεία στο $\partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\begin{cases} \nabla f(p) = \lambda \nabla g(p) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Ακρότατα υπό συνθήκη

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2, D = \{(x,y) \mid x^4 + y^2 \le 1\}$

Βρείτε τα ακρότατα της f.

$a)$κρίσιμα σημεία στο $D^o = \{(x,y) : x^4 + y^2 < 1\}$

$\nabla f = < 2x + y, 2y + x >$

$\nabla f(x,y) = 0 \to \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \to x = y = 0 \ \in D^o$ f(0,0)=0

$\beta)$κρίσιμα σημεία στο $\partial D = \{(x,y) : x^4 + y^2 = 1\}$

$g(x,y) = x^4 + y^2 - 1$

$$\begin{cases} \nabla f(p) = \lambda \nabla g(p) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

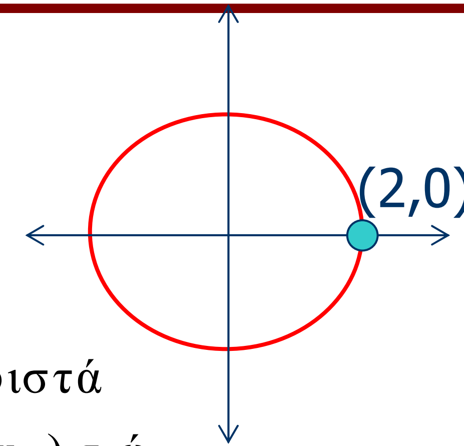
ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

π.χ. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-1=0:G$



Ερώτημα: Γύρω από ποια σημεία $P=(x_0,y_0)$ G η καμπύλη παριστά γράφημα συνάρτησης ως προς x, δηλαδή υπάρχει γειτονιά $\Delta(x_0)$ τ.ώ.

$\Delta(x_0) \to \mathbb{R}$

$x \to f(x)$

Πρόβλημα έχω στα σημεία Q όπως το (2,0) για τα οποία η εφαπτομένη του γραφήματος στο Q είναι // με τον y άξονα ή ισοδύναμα η κάθετη της καμπύλης στο Q είναι $\perp$ στον y άξονα.

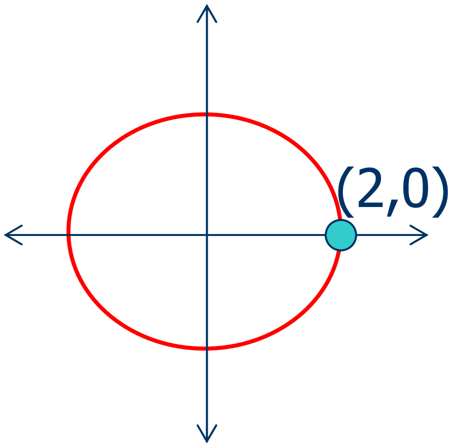
Αν η G δίδεται από μια εξίσωση $g(x,y)=0$ τότε η $\perp$ στο $P=(x_0,y_0)$ είναι $\nabla g(x_0,y_0)$

Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Αν η g(x,y) παριστά καμπύλη G στο επίπεδο τότε τα σημεία $Q(x_0,y_0)$ γύρω από τα οποία η Γ δε παριστά γράφημα συνάρτησης είναι αυτά που το $\nabla g(x_0,y_0) \perp$ στον y άξονα.

$$\nabla g(x_0,y_0) = < \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) >$$

Άρα υπάρχει πρόβλημα με τα σημεία $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.



π.χ. $g(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 : G$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm 2, (x,y) = (\pm 2, 0)$$

Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Έστω f(x,y)=0 καμπύλη και $P(x_0,y_0)$ τ.ώ. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

Έστω y=y(x) σε γειτονιά του P. Βρες $\frac{dy}{dx}$;

$$\left.\begin{array}{l} z=f(x,y) \\ y=y(x) \end{array}\right\} \text{Θεωρώντας } f(x,y(x))=0 \;\Rightarrow\; 0=\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Στο παράδειγμα $\frac{dy}{dx}=\frac{-x/2}{y}=-\frac{x}{2y}$

Γενικότερα αν f(x,y,z)=0 ορίζει επιφάνεια S πάρε $P(x_0,y_0,z_0)$, θέλω να βρω

z=Z(x,y), πρόβλημα έχω στα σημεία Q για τα οποία $\nabla f(Q)$ είναι κάθετο στο z άξονα $\frac{\partial f}{\partial z}(Q)=0$.

Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

z^3-xy+yz+y^3=0(1). Σε ποια σημεία έχω πρόβλημα

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0 \Rightarrow 3z^2 + y = 0 \Rightarrow y = -3z^2 (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} z=0 \text{ και } y=0,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow (a,0,0),\ a \in \mathbb{R} \\ x = \dfrac{27z^4+2z}{3}, \quad (\dfrac{27a^4+2a}{3}, -3a^2, a), a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$z = z(x,y)$$
$$f(x,y,z(x,y)) = 0$$

Γενικά αν $f(x_1,..,x_n,z)=0 \Rightarrow f(X,z)=0$ και $P=(X_0,z)$ με $f(P) = 0$.

Τότε γύρω από το P μπορώ να παραστήσω συνάρτηση $z=z(x_1,..,x_n)$ αν $\dfrac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$

Υπενθύμιση από γραμμική άλγεβρα

$$A\,x = c, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Αν $\det(A) \neq 0$ τότε έχω μοναδική λύση που εξαρτάται από το c, A.

Έστω το σύστημα $A\,x = y$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, y μεταβλητή

Αν $\det(A) \neq 0$ τότε έχω μοναδική λύση

Γενικότερα αν $\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n \end{array} \right\}$ Εάν $P(X_0, Y_0)$ ικανοποιεί το σύστημα, τότε γύρω από το P μπορώ να επιλύσω ως προς $x_1, \dots, x_n$

αν $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right) \neq 0$

Παράδειγμα

$$\pi.\chi.\begin{cases} x + xyz = u \\ y + xy = v \\ z + 2x + 3z^2 = w \end{cases} \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathrm{X}_0)\right) = \det\begin{pmatrix} 1+yz & xz & xy \\ y & 1+x & 0 \\ 2 & 0 & 1+6z \end{pmatrix}$$

$$\acute{E}\sigma\tau\omega\ P = (1,1,1),\ y = (2,2,6)$$

$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathrm{X}_0)\right) = 17$. Άρα υπάρχει γειτονιά $\Delta(2,2,6)$ ώστε για $(u_0, v_0, w_0) \in \Delta$

μπορώ να γράψω $x=x(u_0,v_0,w_0), y=y(u_0,v_0,w_0), z=z(u_0,v_0,w_0)$

και να λύσω το σύστημα

Υπενθύμιση από γραμμική άλγεβρα

Γενικότερα αν $\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \dots \\ f_n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{array}\right\}$ Εάν $\mathrm{P}(\mathrm{X}_0,\mathrm{Y}_0)$ ικανοποιεί το σύστημα, τότε γύρω από το P μπορώ να επιλύσω ως προς $x_1,\dots,x_n$

αν $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathrm{P})) \neq 0$

$$\pi.\chi. \left\{\begin{array}{l} x^3u + xy^2v + w = 0 \\ x^2w + 2yv = 0 \end{array}\right\} \det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathrm{X}_0)) = \det\begin{pmatrix} 3x^2u + y^2v & 2xyv \\ 2xw & 2v \end{pmatrix}$$

$$Έστω\ P = (1,1,1,1,-2)$$

$\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathrm{P})) = 16$. Άρα υπάρχει γειτονιά Δ(1,1,-2) ώστε για $(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \Delta$

μπορώ να γράψω $\mathrm{x}=\mathrm{x}(\mathrm{u}_0,\mathrm{v}_0,\mathrm{w}_0),\mathrm{y}=\mathrm{y}(\mathrm{u}_0,\mathrm{v}_0,\mathrm{w}_0),\mathrm{z}=\mathrm{z}(\mathrm{u}_0,\mathrm{v}_0,\mathrm{w}_0)$

και να λύσω το σύστημα

ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Επίλυση Συστημάτων με χρήση Matlab

Επίλυση συστημάτων με χρήση Matlab

A x = b

Παράδειγμα

x+2y+3z = 1

2x+y+3z = 2

4x+5y+z = 3

```
A = [1 2 3; 2 1 3; 4 5 1];
b = [1 2 3]';
det(A)
x = inv(A)*b
```

Επίλυση συστημάτων με χρήση Matlab

- Λύσεις εξίσωσης (π.χ. από συστήματα με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange)

Πρόβλημα: Υπολόγισε τις λύσεις της εξίσωσης **cos(2*x)+sin(x)=1**.

Λύση:

```
s = solve('cos(2*x)+sin(x)=1')
s =
[     0]
[    pi]
[ 1/6*pi]
[ 5/6*pi]
```

Επίλυση συστημάτων με χρήση Matlab

Υπολόγισε τις λύσεις του συστήματος

$x^6+y^6 = 1$

$x+2y = 1$

Λύση:

```
figure;
ezplot('x^6+y^6 - 1',[-2 2],[-2 2]);
hold on;
ezplot('x+2*y- 1',[-2 2],[-2 2]);

A = solve('x^6 + y^6= 1 ', 'x + 2*y = 1')

A =     x: [6x1 sym]
   y: [6x1 sym]

A.x
A.y
```

Επίλυση συστημάτων με χρήση Matlab

Υπολόγισε τις λύσεις του συστήματος

$z+x^6+y^6 = 1$

$z+x+2y = 1$

$2*z-x-y = 1$

Λύση:

```
figure;
ezmesh('-x^6-y^6 + 1',[-1 1],[-1 1]);
hold on;
ezmesh('-x-2*y+ 1',[-1 1],[-1 1]);
hold on;
ezmesh('0.5*(+x+y+ 1)',[-1 1],[-1 1]);

A = solve('z+x^6 + y^6= 1 ', 'z+x + 2*y = 1','2*z-x-y=1')

A =     x: [6x1 sym]
  y: [6x1 sym]
```

Επίλυση συστημάτων με χρήση Matlab

- Αθροίσματα

Πρόβλημα: Υπολόγισε το άθροισμα

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

Λύση:

```
syms x k
s1 = symsum(1/k^2,1,inf)

s1 = 1/6*pi^2
```