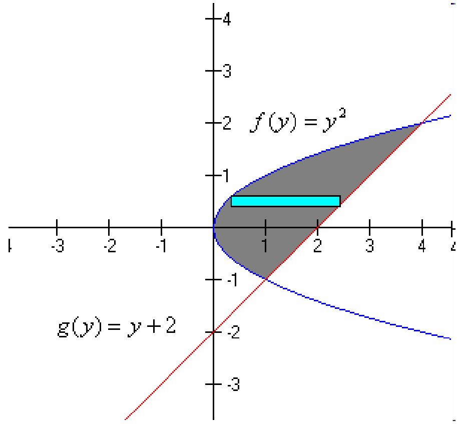
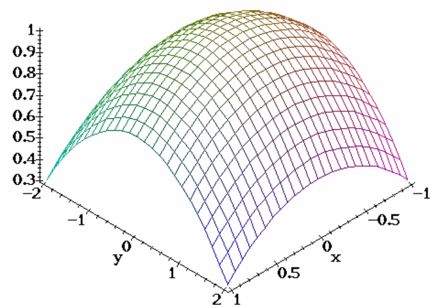
HY-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Ολοκληρώματα

Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων



- Υπολογισμός μήκους
- Υπολογισμός εμβαδού
- Υπολογισμός όγκου



- Χρήση σε Τύπους/Μετρικές
  - Φυσική
  - Πιθανότητες
  - Γραφική
  - Θέματα Αναγνώρισης προτύπων

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$\int (u \pm \upsilon)dx = \int udx \pm \int \upsilon dx$$

$$\int adx = ax$$

$$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, & n \neq -1 \\ \ln x, & n = -1 \end{cases}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \tan x\, dx = -\ln\cos x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \qquad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\boxed{+c,\ c \in \Re}$$

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων στο Matlab

- Ορισμένα Ολοκληρώματα

Πρόβλημα: Υπολόγισε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x\log(x+1)dx$$

Λύση:

```
syms x;
int(x*log(1+x),0,1)
```

1/4

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων στο Matlab

• Αόριστα Ολοκληρώματα

Πρόβλημα: Υπολόγισε το ολοκλήρωμα

$$\int (x^n + \sin(n \bullet x) - 1)dx$$

Λύση:

```
syms x
syms n
f = x^n + sin(n*x) - 1
int(f,x)
ans =

x^(n+1)/(n+1)-1/n*cos(x*n)-x
```

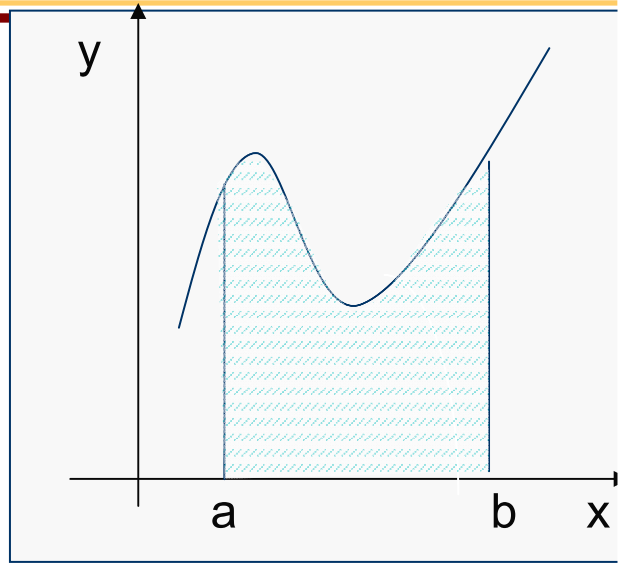
Ολοκληρώματα 1 μεταβλητή

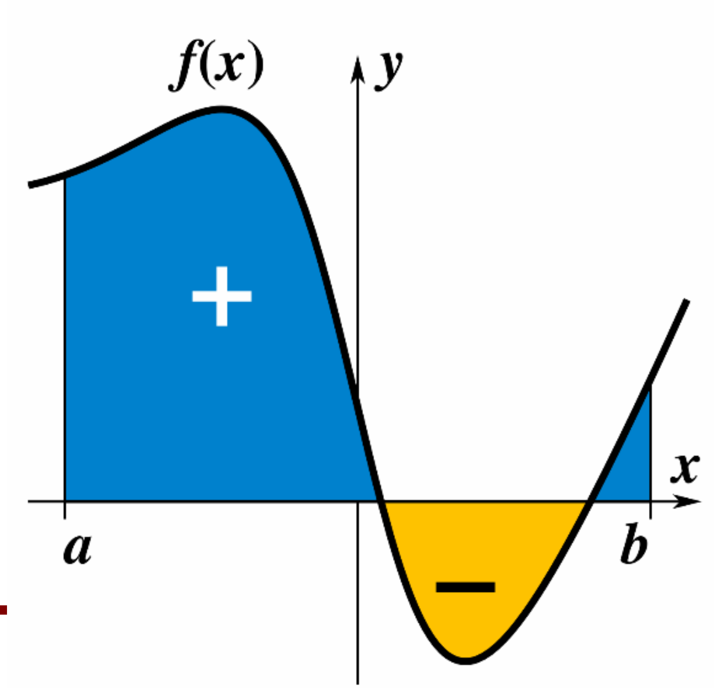
y= f(x) συνάρτηση.

Βρες τον εμβαδόν κάτω από

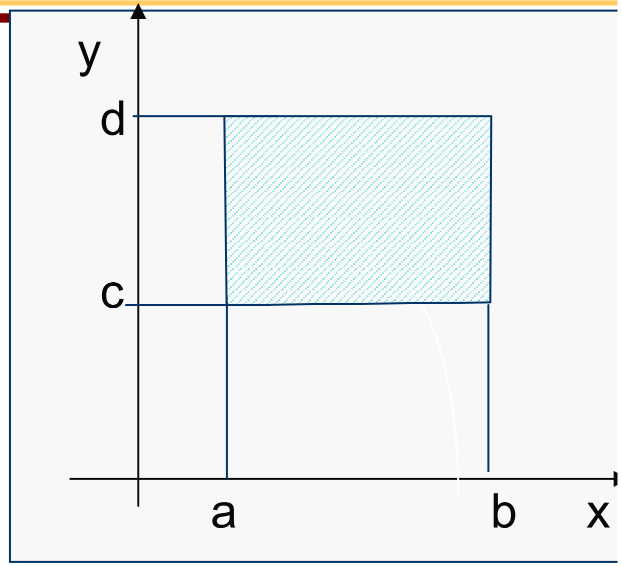
το γράφημα με a ≤ x ≤ b.

$$\int_a^b f(x)dx$$





Ολοκληρώματα 2 μεταβλητών



z= f(x,y) συνάρτηση.

Βρες τον όγκο κάτω από το γράφημα.

Έστω $c(y_0)=\{(x,y)|\ a \le x \le b\}$.

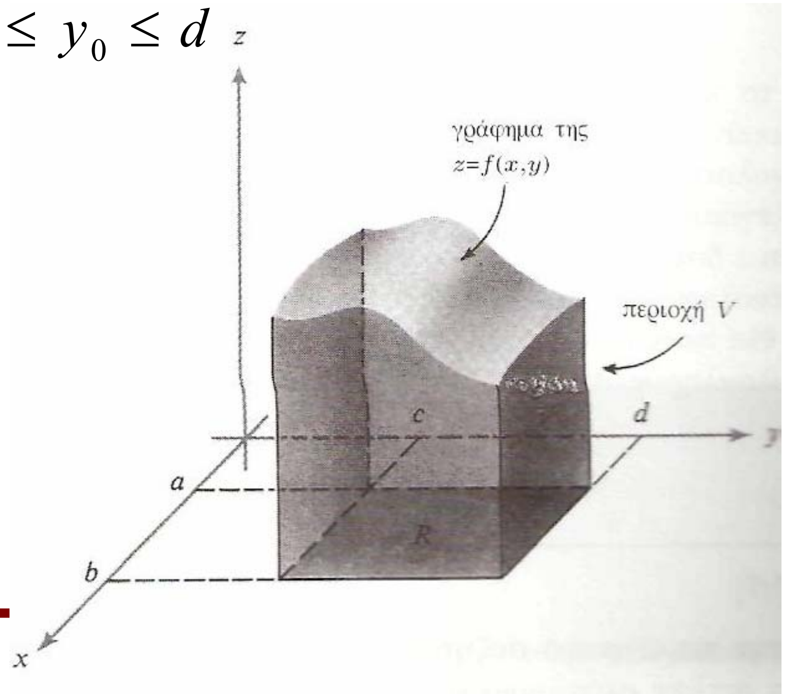
$$f(x, y_0):[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$A(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)dx$$

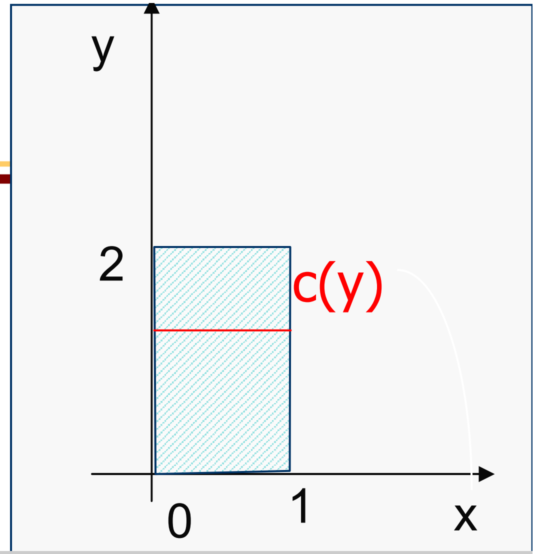
Όγκος στερεού: άθροισμα εμβαδόν $A(y_0), c \le y_0 \le d$

$$A(y) = \int_a^b f(x, y)dx, \text{ αθροίζω με } c \le y \le d,$$

$$\int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right)dy$$



Διπλά ολοκληρώματα



$f(x,y)= x^2+y+1$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le 2$.

Έστω $c(y)=\{(x,y)|\ 0 \le x \le 1\}$.

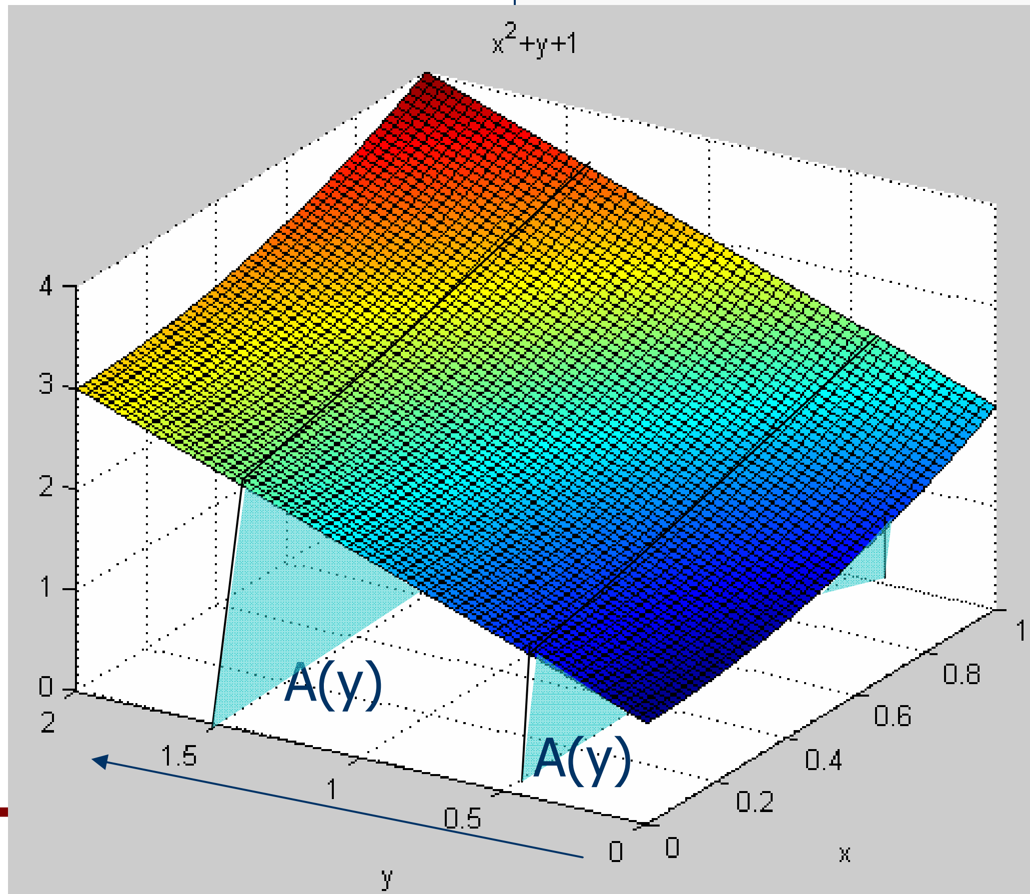
$A(y)$ = εμβαδόν πάνω από τη c(y)

$$= \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 (x^2+y+1)dx = \frac{4}{3} + y$$

Όγκος=άθροισμα των A(y)=

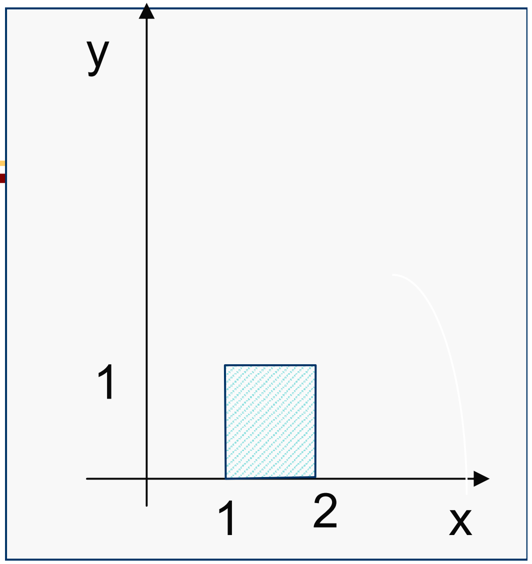
$$= \int_0^2 A(y)dy = \int_0^2 (\frac{4}{3}+y)dy = \frac{4}{3}y + \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{4}{3}2 + \frac{2^2}{2} - 0 = 2 + \frac{8}{3}$$



$$\int_0^2 \int_0^1 f(x,y)dxdy$$

Διπλά ολοκληρώματα

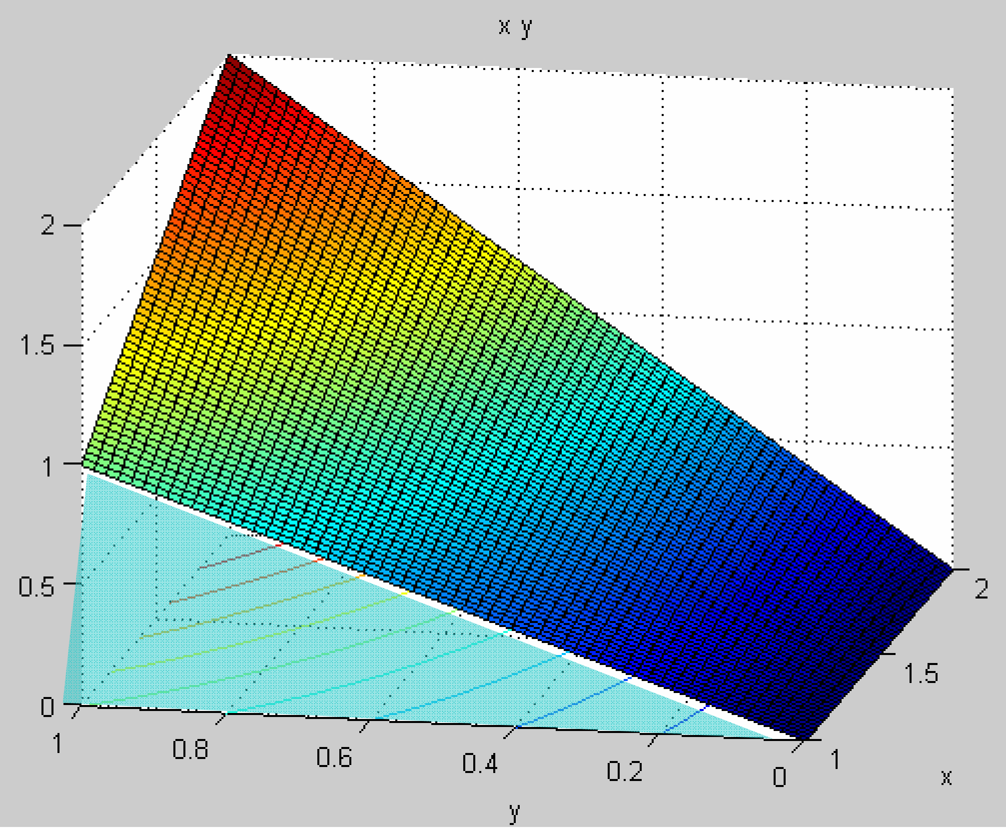


f(x,y)= xy

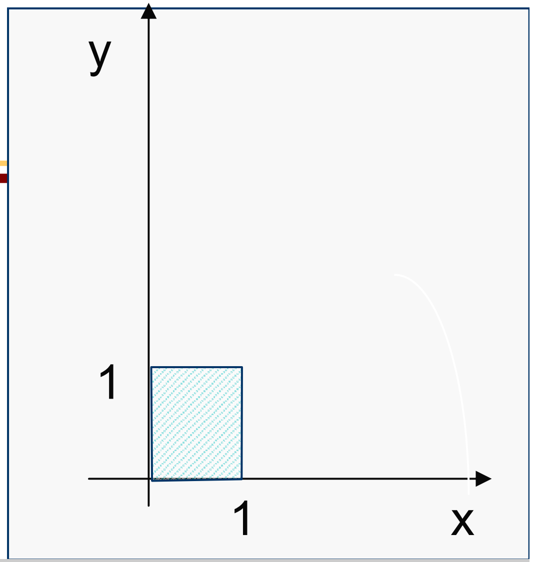
Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα $1 \le x \le 2$ και $0 \le y \le 1$.

$$\int_0^1 \int_1^2 f(x,y)\,dx\,dy$$



Διπλά ολοκληρώματα

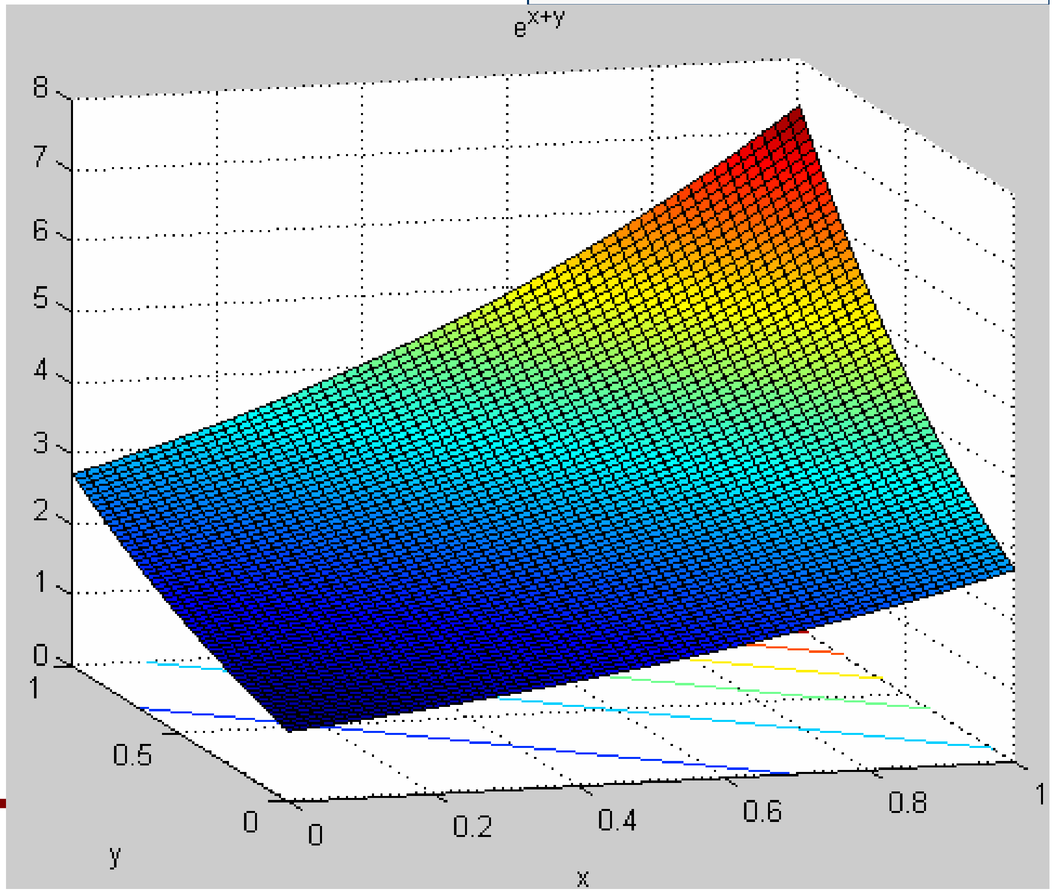


$f(x,y) = e^{x+y}$

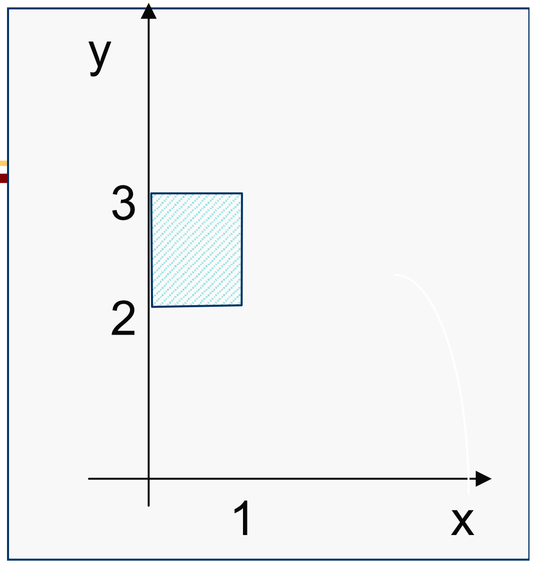
Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le 1$.

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$$



Διπλά ολοκληρώματα



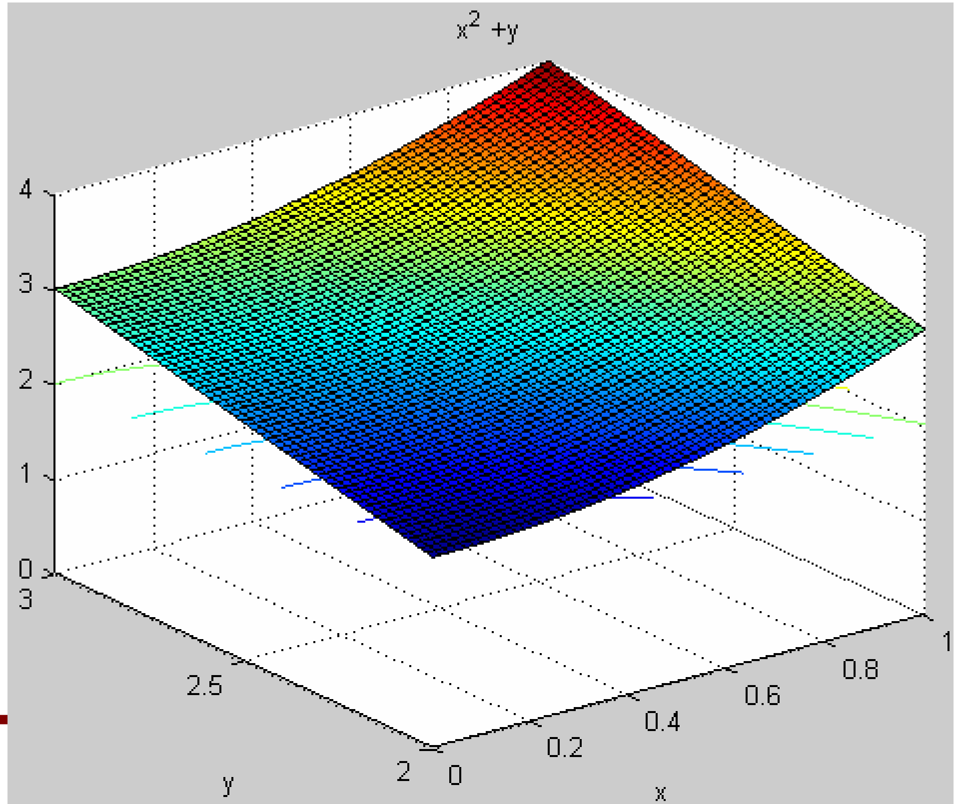
$f(x,y)= x^2+y$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα $0 \le x \le 1$ και $2 \le y \le 3$.

$$\int_2^3 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\int_0^1 \int_2^3 f(x,y)\,dy\,dx$$



ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Διπλά Ολοκληρώματα (1/2)

Διπλά ολοκληρώματα

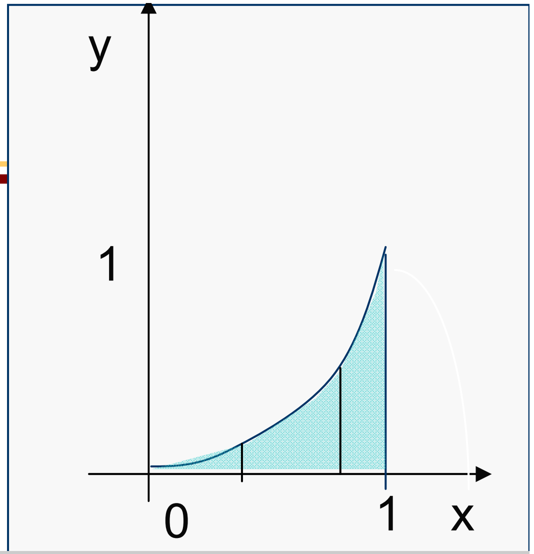
$f(x,y)= x^2+y+1$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα .

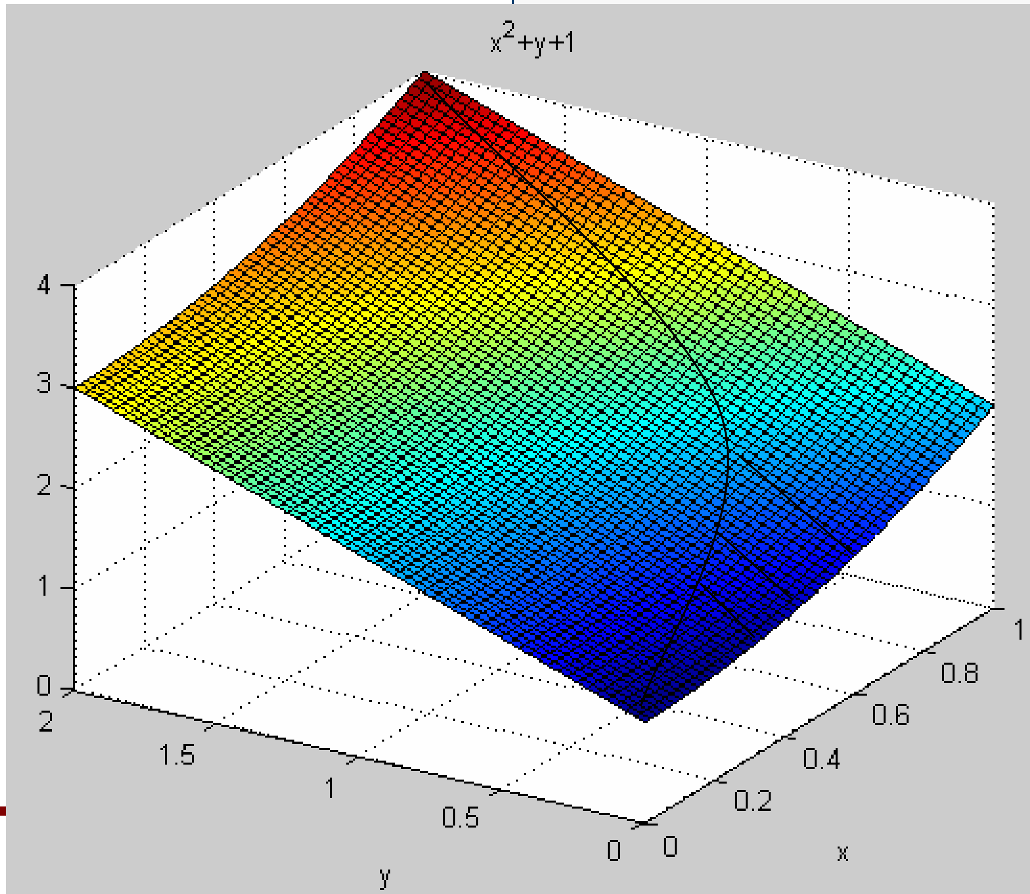
Α′ τρόπος

$c(x)=\{(x,y)|\ 0 \le y \le x^2\}, 0 \le x \le 1.$



Συνοπτικά $R=\left\{\begin{array}{l} 0 \le y \le x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{array}\right\}$

$$\int_R \int f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)dydx$$



Διπλά ολοκληρώματα

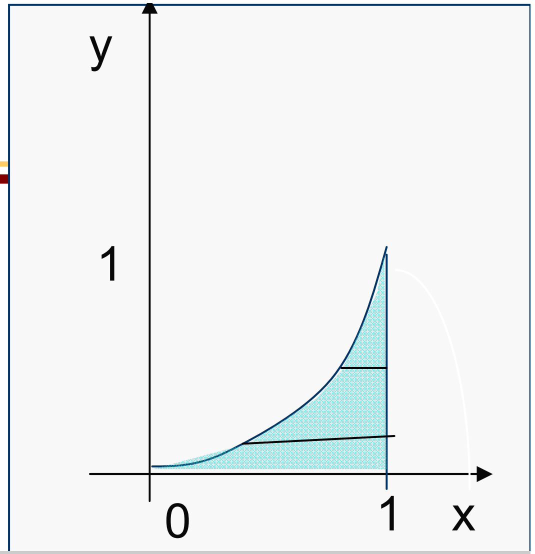
$f(x,y) = x^2 + y + 1$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα .

$c(x) = \{(x,y) \mid 0 \le y \le x^2\},\ 0 \le x \le 1.$

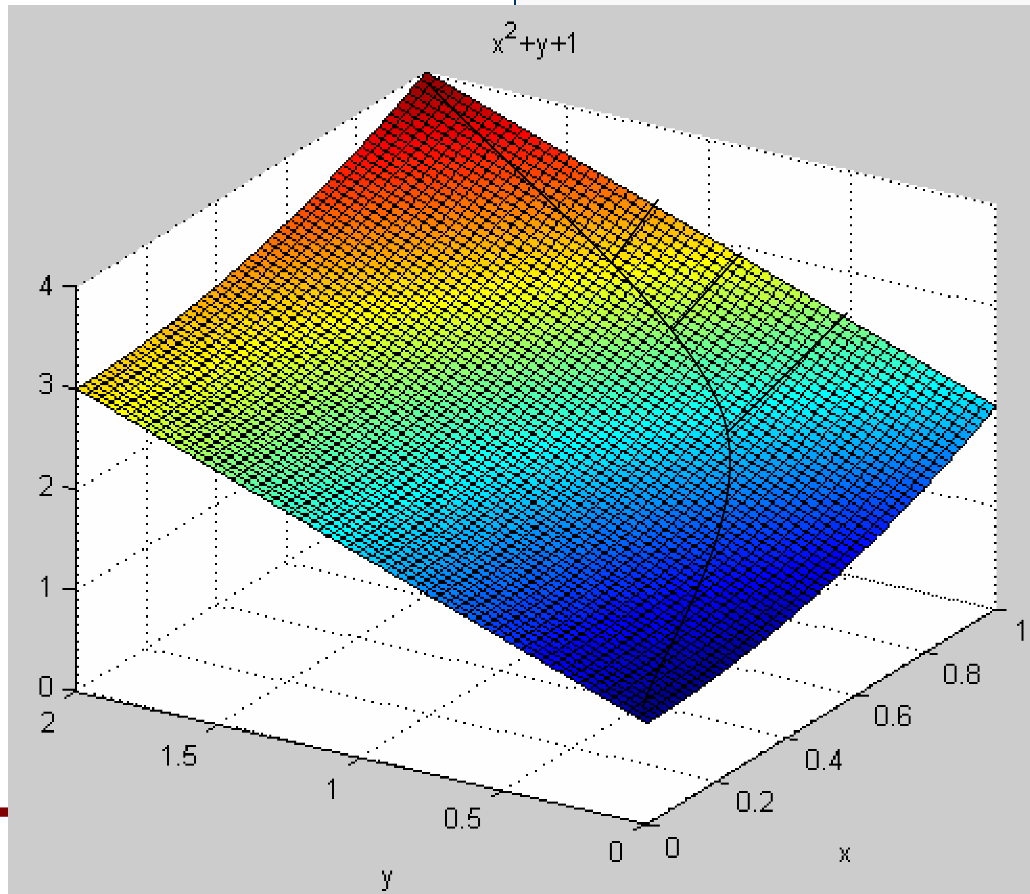
Β′ τρόπος



$$\text{Συνοπτικά } R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \le y \le x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{y} \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{array} \right\}$$

$$\int_R \int f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_1^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy$$



Διπλά ολοκληρώματα

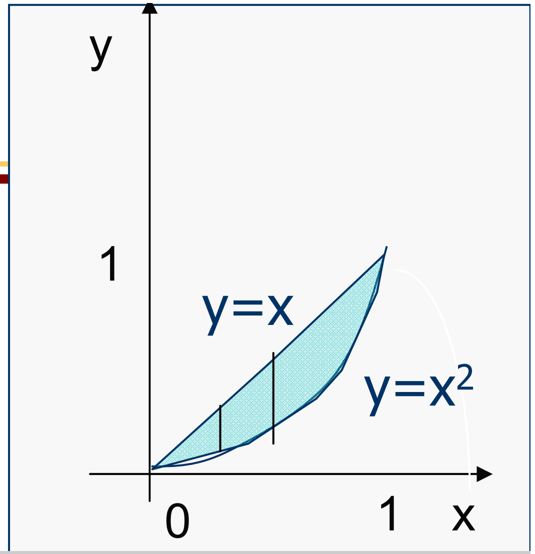
Α′ τρόπος

$f(x,y)= x^2+y+1$

Βρες τον όγκο

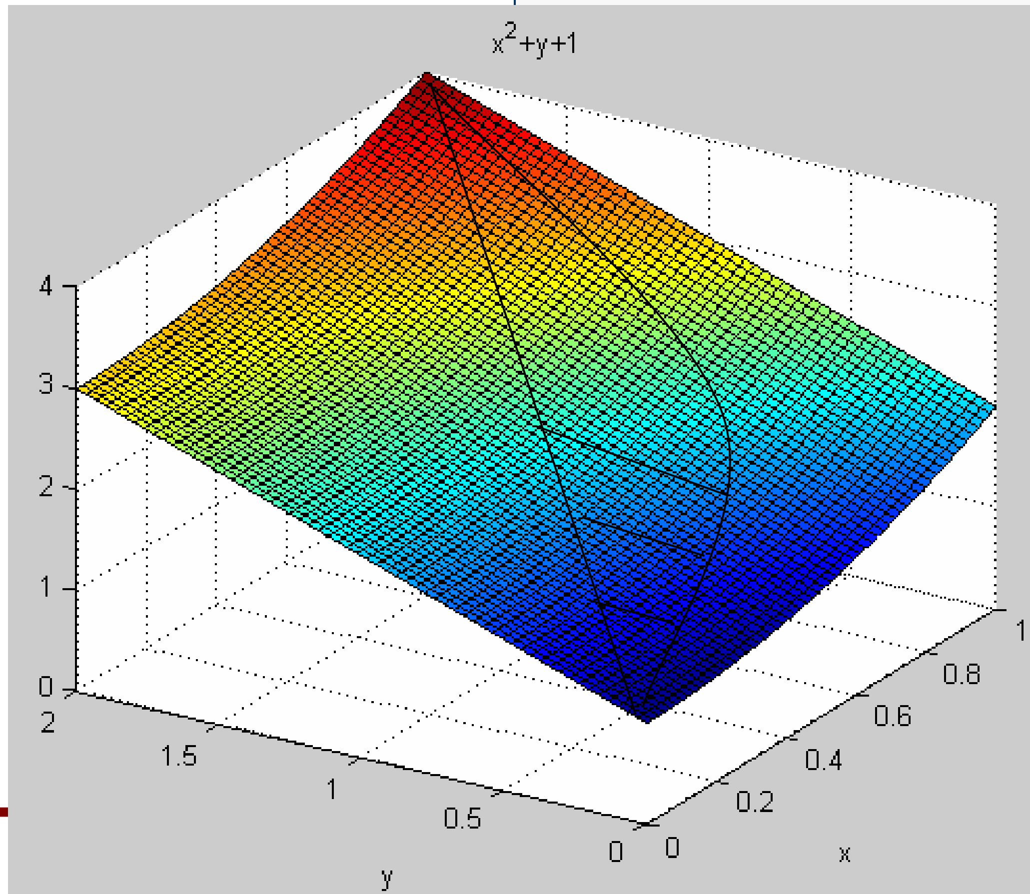
κάτω από το γράφημα .

$c(x)=\{(x,y) \mid x^2 \le y \le x\}, 0 \le x \le 1.$



Συνοπτικά $R=\left\{\begin{matrix} x^2 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{matrix}\right\} =$

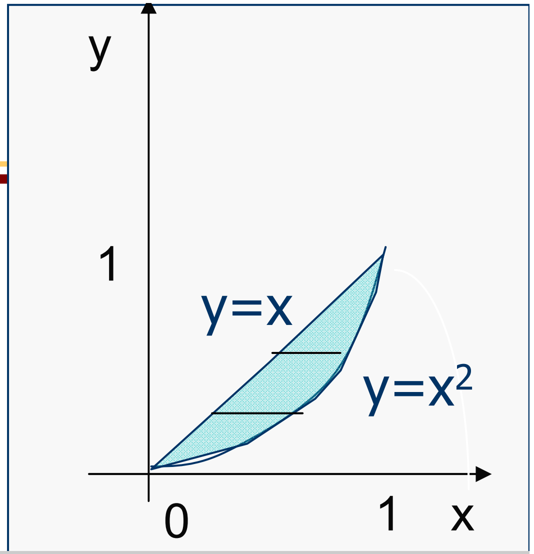
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$$



Διπλά ολοκληρώματα

$f(x,y)= x^2+y+1$ Β′ τρόπος

Βρες τον όγκο
κάτω από το γράφημα που φράσεται πάνω από το γράφημα της y=x και κάτω από το γράφημα της $y=x^2$.

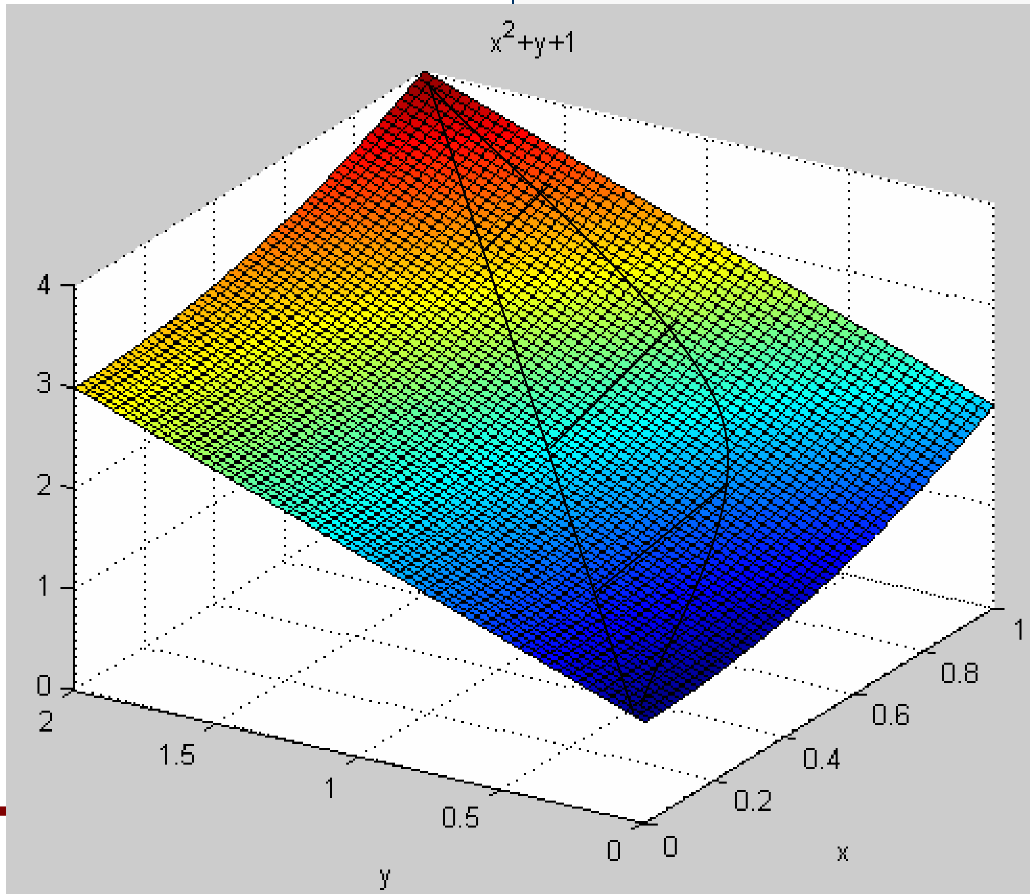


$$c(x)=\{(x,y)\mid x^2 \le y \le x\},\ 0 \le x \le 1.$$

$$\text{Συνοπτικά } R=\left\{\begin{array}{l} x^2 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{array}\right\} =$$

$$=\left\{\begin{array}{l} y \le x \le \sqrt{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{array}\right\}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy$$



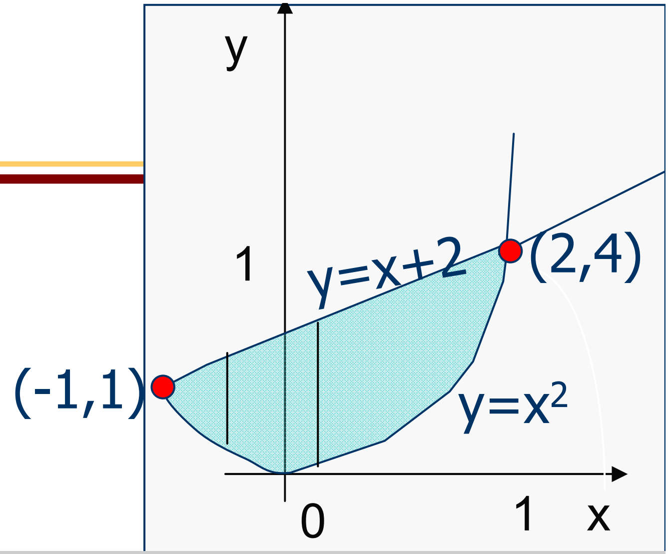
Διπλά ολοκληρώματα

$f(x,y)= x^2+y+1$

Α′ τρόπος

Βρες τον όγκο

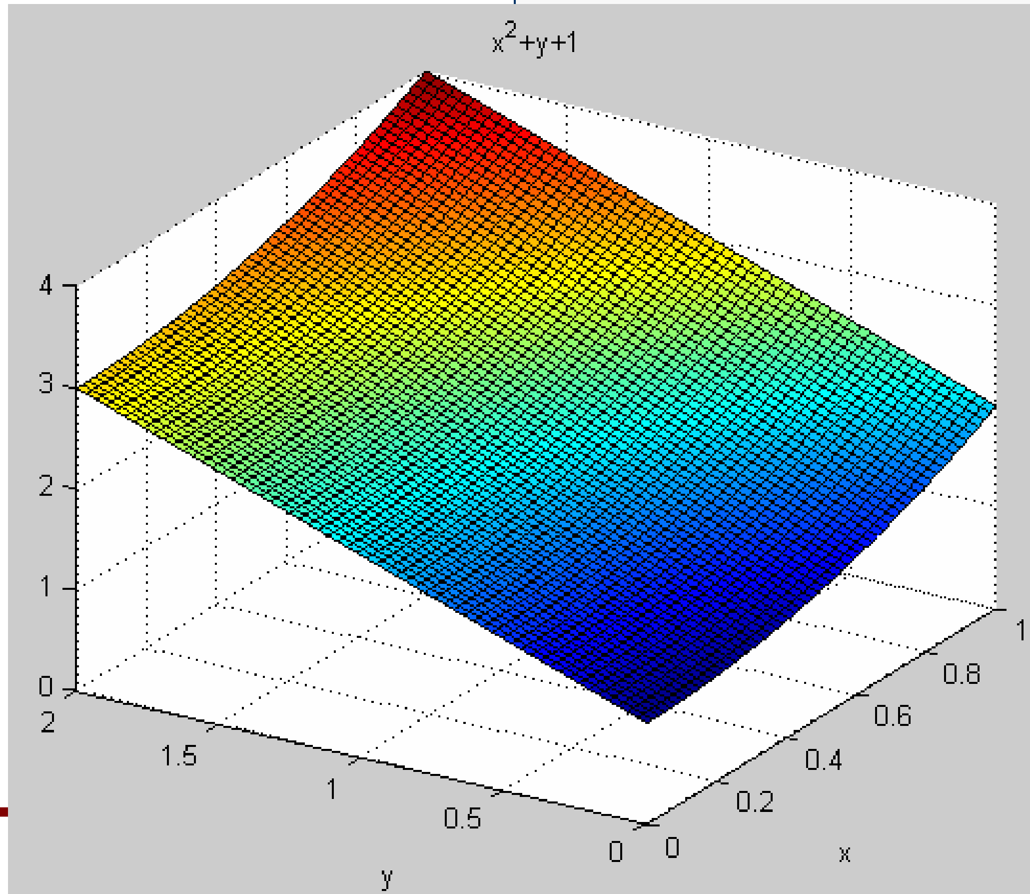
κάτω από το γράφημα που φράσεται πάνω από το γράφημα της y=x+2 και κάτω από το γράφημα της $y=x^2$.



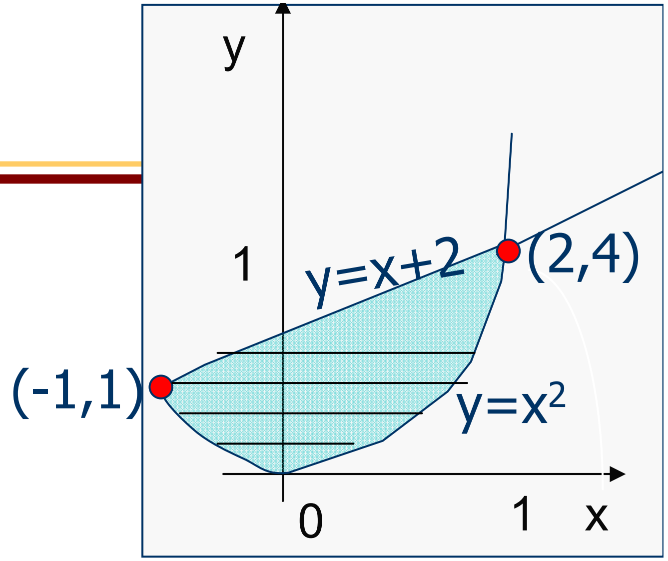
$c(x)=\{(x,y)|\ x^2 \le y \le x+2\}, -1 \le x \le 2.$

Συνοπτικά $R=\left\{\begin{matrix} x^2 \le y \le x+2 \\ -1 \le x \le 2 \end{matrix}\right\} =$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy\,dx$$



Διπλά ολοκληρώματα



Β′ τρόπος

$f(x,y)= x^2+y+1$
Βρες τον όγκο
κάτω από το γράφημα που φράσεται πάνω από το γράφημα της $y=x+2$ και κάτω από το γράφημα της $y=x^2$.

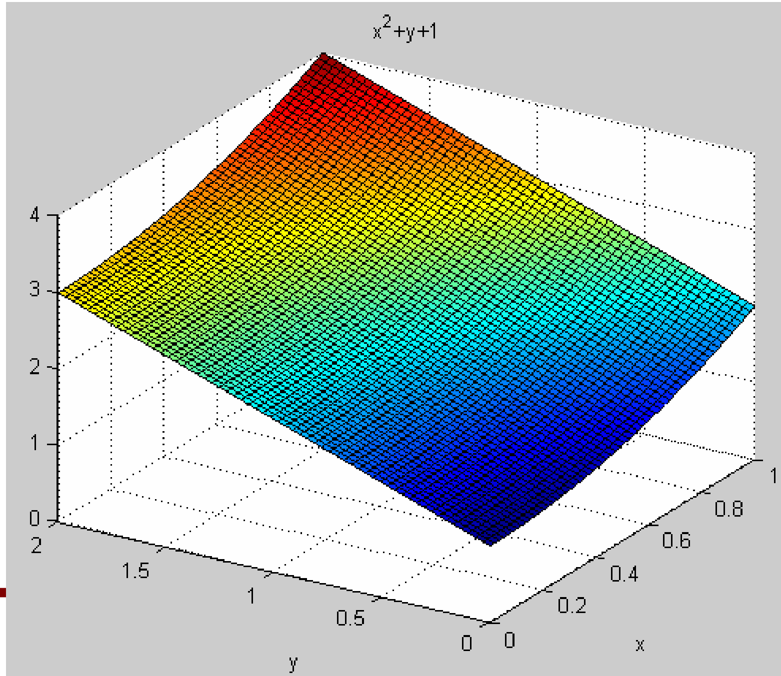
$c(x)=\{(x,y)|\ x^2 \le y \le x+2\}, -1 \le x \le 2.$

Συνοπτικά $R=R_1+R_2=$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} 1 \le y \le 4 \\ y-2 \le x \le \sqrt{y} \end{array} \right\} =$$

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{R_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{R_2} f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy$$



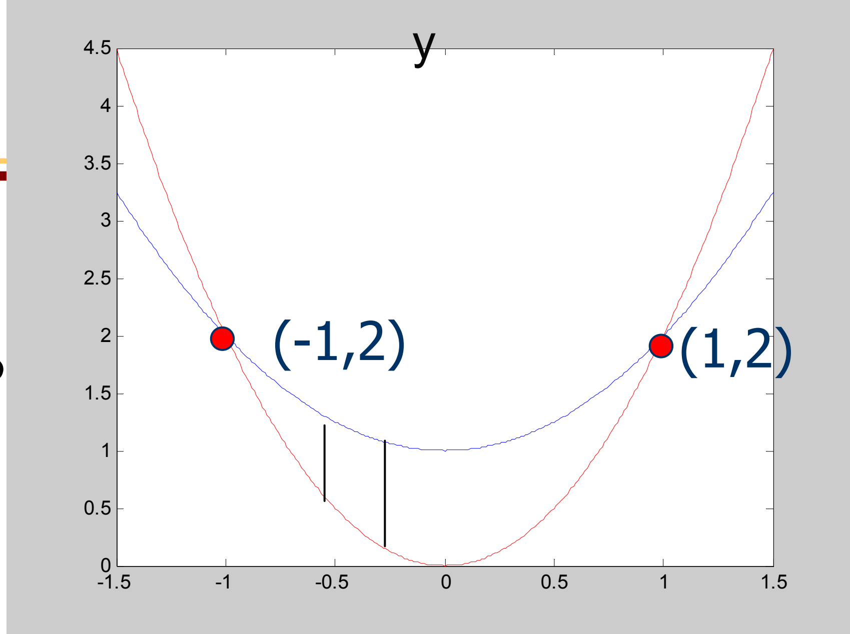
Διπλά ολοκληρώματα

$f(x,y)= x^2+y+1$

Βρες τον όγκο

κάτω από το γράφημα που φράσεται πάνω από το γράφημα της $y=1+x^2$ και κάτω από το γράφημα της $y=2x^2$.

Α′ τρόπος

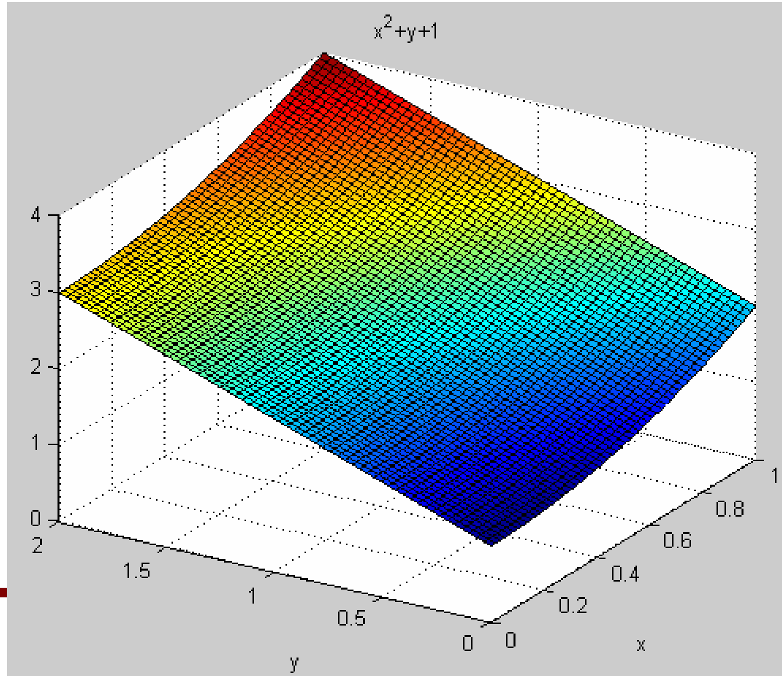


$c(x)=\{(x,y) \mid 2x^2 \le y \le 1+x^2\}, -1 \le x \le 1.$

$$\text{Συνοπτικά } R=\left\{\begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ 2x^2 \le y \le 1+x^2 \end{array}\right\}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2} f(x,y)\,dydx$$

Β′ τρόπος;



ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Διπλά Ολοκληρώματα (2/2)

Διπλά ολοκληρώματα

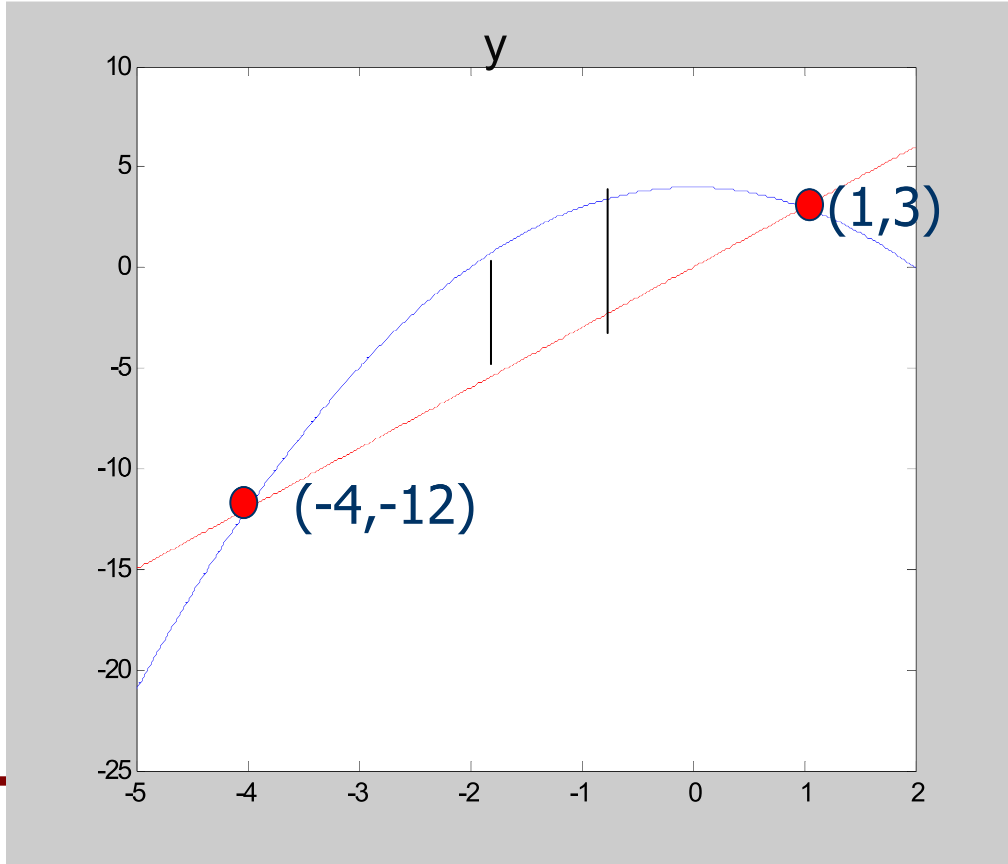
Βρες τον όγκο στερεού με βάση στο xy επίπεδο το χωρίο R που φράσεται από τις καμπύλες $y=4-x^2$ και $y=3x$ και οροφή το γράφημα της $f(x,y) = x+4$.

$$\text{τομές καμπύλων:}\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=3x \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+3x-4=0 \\ y=3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x,y)=(-4,-12) \\ \text{ή} \\ (x,y)=(1,3) \end{cases}$$

$$\text{Συνοπτικά } R=\left\{\begin{matrix} -4 \le x \le 1 \\ 3x \le y \le 4-x^2 \end{matrix}\right\}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-4}^{1}\int_{3x}^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$$



Διπλά ολοκληρώματα

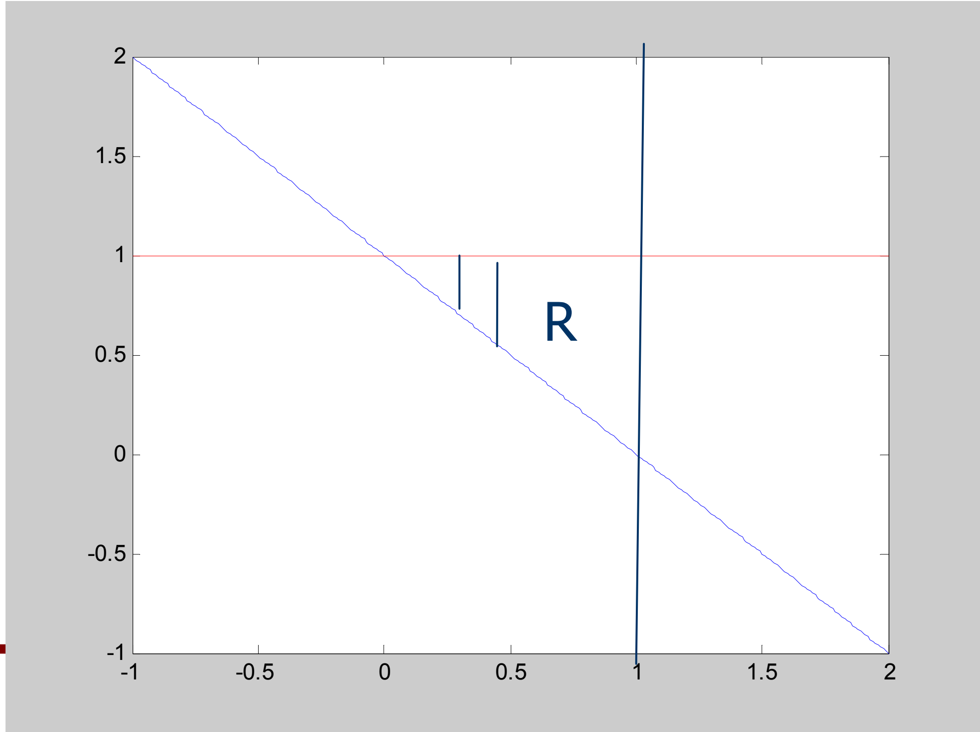
Βρες τον όγκο στερεού με βάση στο xy επίπεδο
το χωρίο R που φράσεται από τις καμπύλες x=1-y
και x= 1 και y=1 και οροφή το γράφημα της f(x,y) = $x + y + 4$.

τομές καμπύλων: $\begin{cases} x=1-y \\ x=1 \end{cases} \rightarrow (x,y)=(1,0)$

$$\begin{cases} x=1-y \\ y=1 \end{cases} \rightarrow (x,y)=(0,1)$$

Συνοπτικά $R=\left\{\begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 1-x \le y \le 1 \end{matrix}\right\}$

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{1-x}^1 f(x,y)\,dydx$$

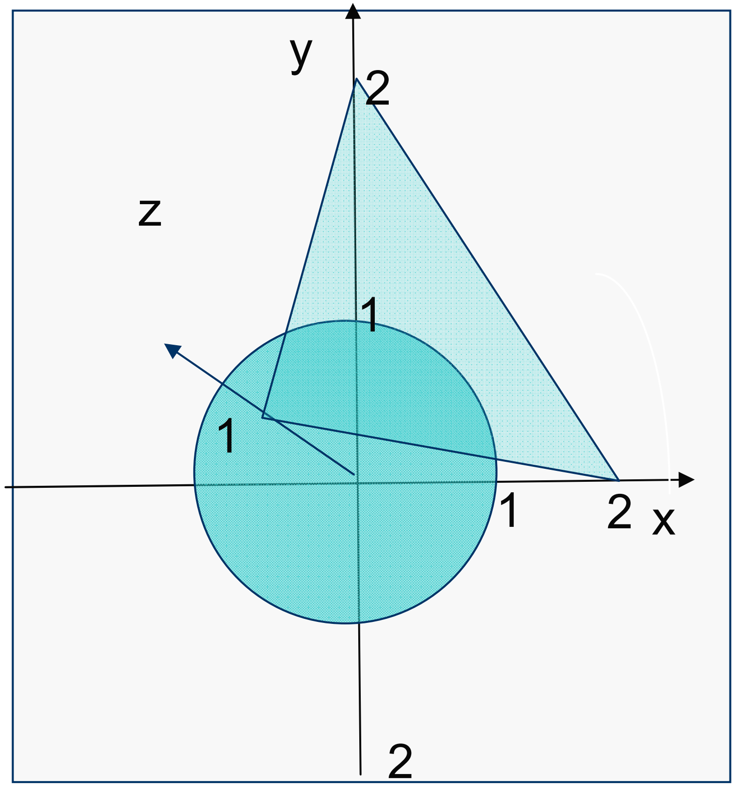


Διπλά ολοκληρώματα

Βρες τον όγκο στερεού που περικλείεται $x^2+y^2=1$, $z = 0$ και $x+y+2z=2$

$R =$ *εσωτερικός* χώρος κύκλου $x^2+y^2=1$, και γράφημα συνάρτησης

$$f(x,y) = \frac{2-x-y}{2}$$



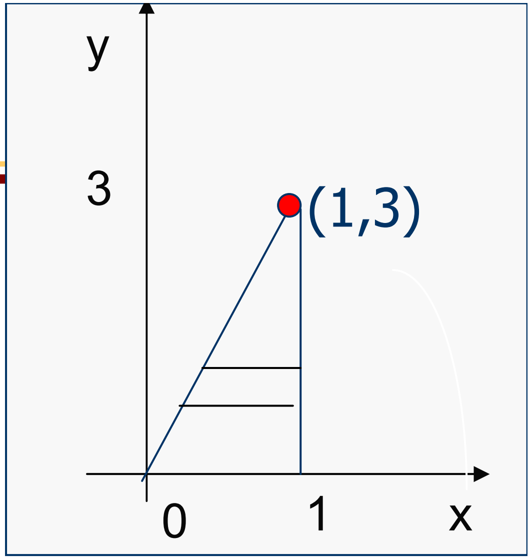
$$\text{Συνοπτικά R} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$$

Αλλαγή σειρά ολοκλήρωσης

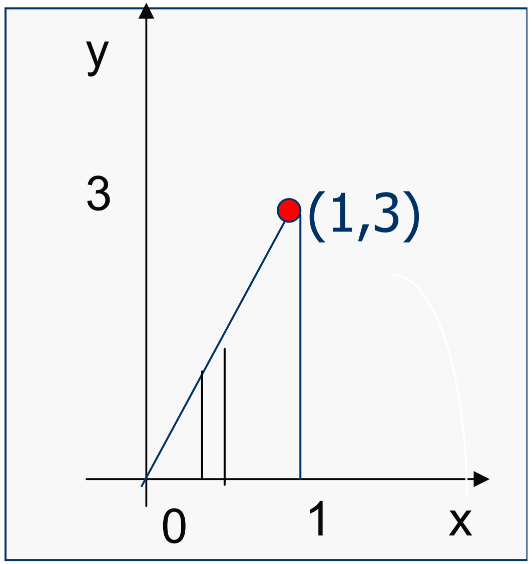
Βρες τον ολοκλήρωμα:

$$\int_0^3 \int_{y/3}^1 e^{x^2} dx dy$$



Συνοπτικά $R = \begin{Bmatrix} 0 \le y \le 3 \\ y/3 \le x \le 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \le y \le 3x \\ 0 \le x \le 1 \end{Bmatrix}$

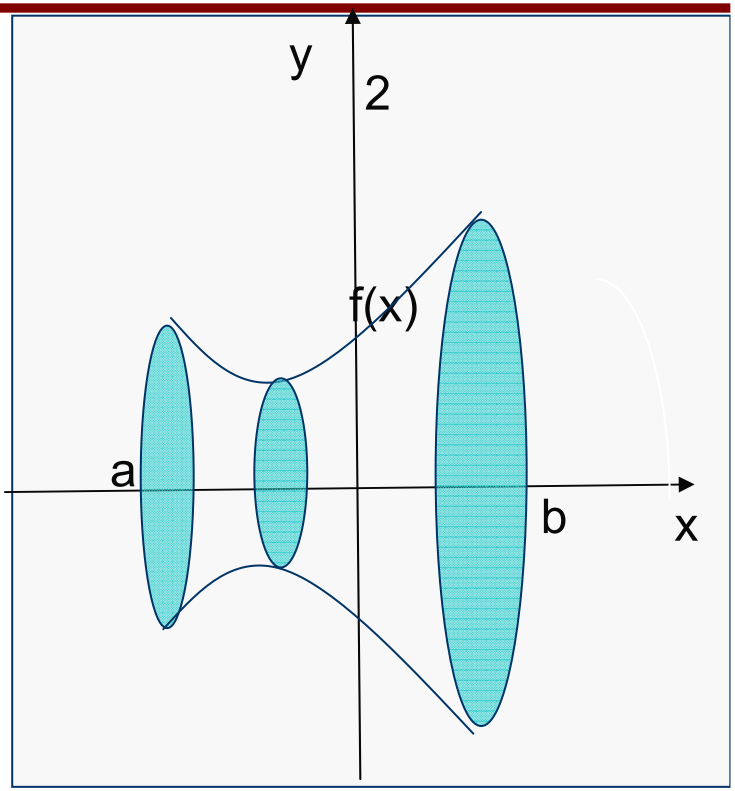
$$\int_0^3 \int_{y/3}^1 e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^{3x} e^{x^2} dy dx =$$



Όγκος στερεού εκ περιστροφής

Τομή του στερεού είναι κύκλος εμβαδού $\pi f^2(x)$, $a \le x \le b$:

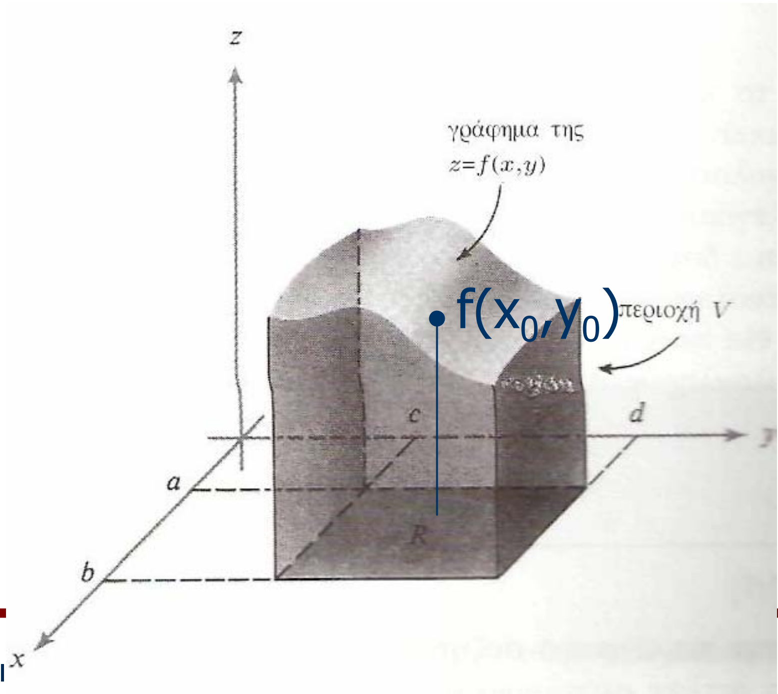
$$\acute{o}\gamma\kappa o\varsigma = \text{άθροισμα των εμβαδών} = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$



Θεώρημα μέσης τιμής για διπλά ολοκληρώματα

$$\int_S f(x)dx = f(x_0) \bullet L(S), x \in S, \text{L(S)=μήκος του R}$$

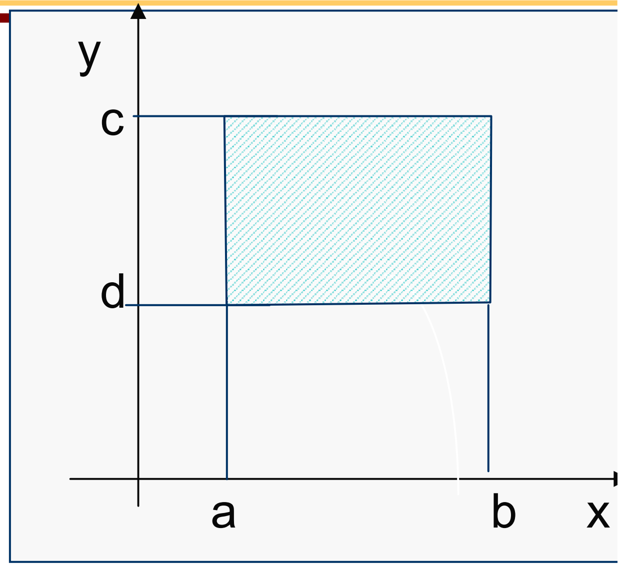
$$\int\int_R f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0) \bullet A(R), \quad (x_0,y_0) \in R, \ \text{A(R)=εμβαδόν του R}$$



ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Τριπλά Ολοκληρώματα

Διπλά Ολοκληρώματα

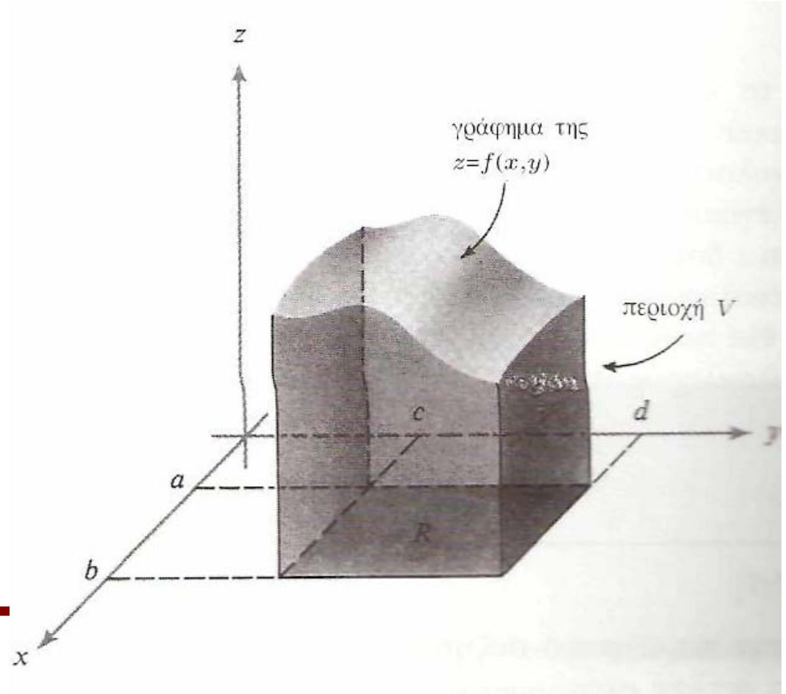


z= f(x,y) συνάρτηση.

Βρες τον όγκο κάτω από το γράφημα εμβαδόν κάτω από το γράφημα.

$$R=\begin{Bmatrix} c \le \mathrm{y} \le d \\ a \le \mathrm{x} \le b \end{Bmatrix}$$

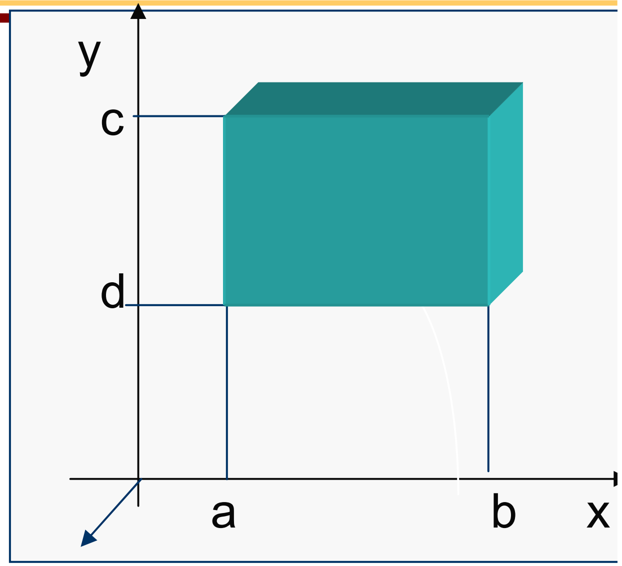
$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$



Τριπλά Ολοκληρώματα

f(x,y,z) συνάρτηση.

R=[a,b]×[c,d]×[e,f], ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο



$$R=\left\{\begin{array}{l} a \le \mathrm{x} \le b \\ c \le \mathrm{y} \le d \\ e \le \mathrm{z} \le f \end{array}\right\}$$

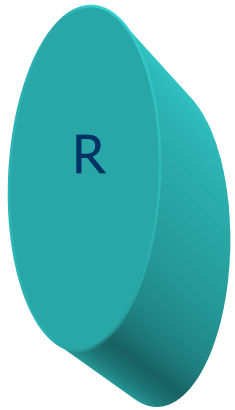
$$\int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)\,dx\right)dy\right)dz$$

$$\pi.\chi.\ \int_1^3 \left(\int_0^2 \left(\int_0^1 (x+2y+z)\,dx\right)dy\right)dz =$$

Τριπλά Ολοκληρώματα

f(x,y,z) συνάρτηση, $R \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Αν f(x,y,z) = 1,



$$\iiint_R 1\,dxdydz = \text{Όγκος στερεού R}$$

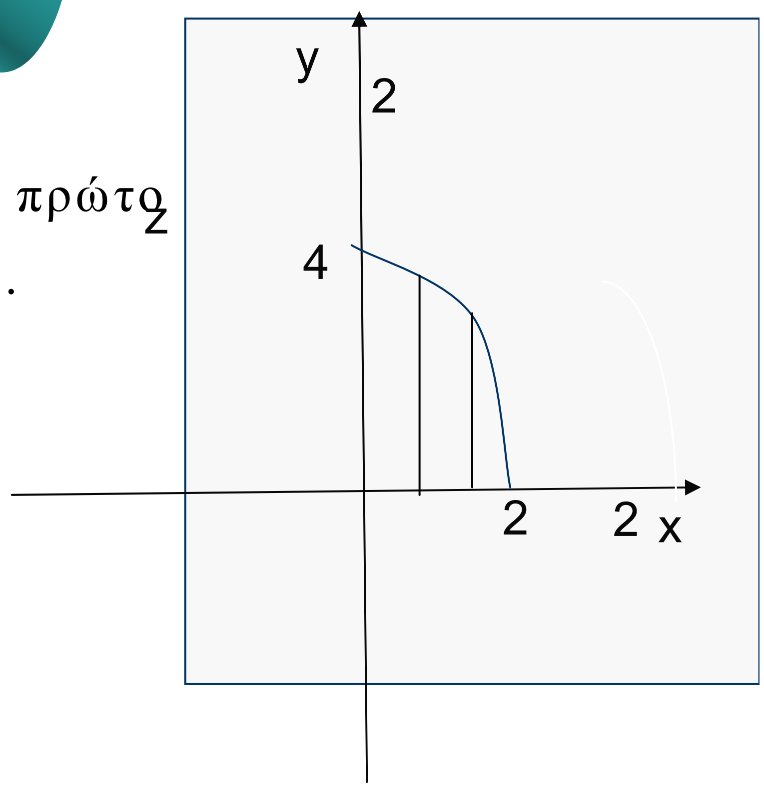
π.χ. Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται από $y=4-x^2$ και $z=5$.

A' Τρόπος

$$f(x,y) = 5$$

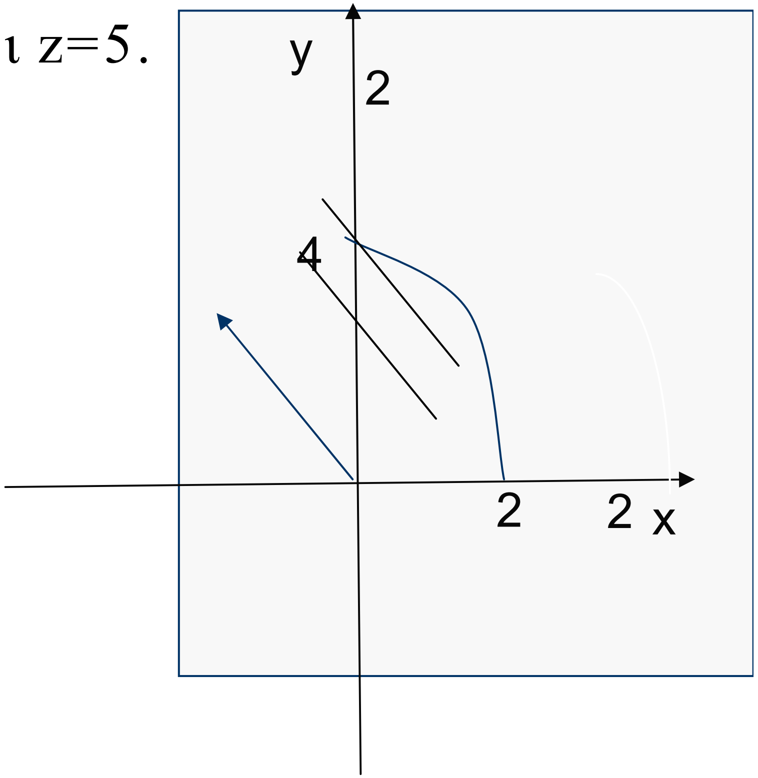
$$c(x_0) = \{(x_0, y) \mid 0 \le y \le 4-x^2\},\ 0 \le x_0 \le 2$$

$$R = \begin{cases} 0 \le y \le 4-x^2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} \qquad \text{όγκος} = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} 5\,dydx$$



Τριπλά Ολοκληρώματα

$\pi.\chi.$ Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται από y=4-x^2 και z=5.



B' Τρόπος

D στερεό, $c(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0, z) \mid 0 \le z \le 5\}$

$, (x_0, y_0) \in R$

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \le y \le 4\text{-}x^2 \\ 0 \le x \le 2 \\ 0 \le z \le 5 \end{array} \right\} \quad \text{όγκος} = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^5 1 \, dz\,dy\,dx$$

Τριπλά Ολοκληρώματα

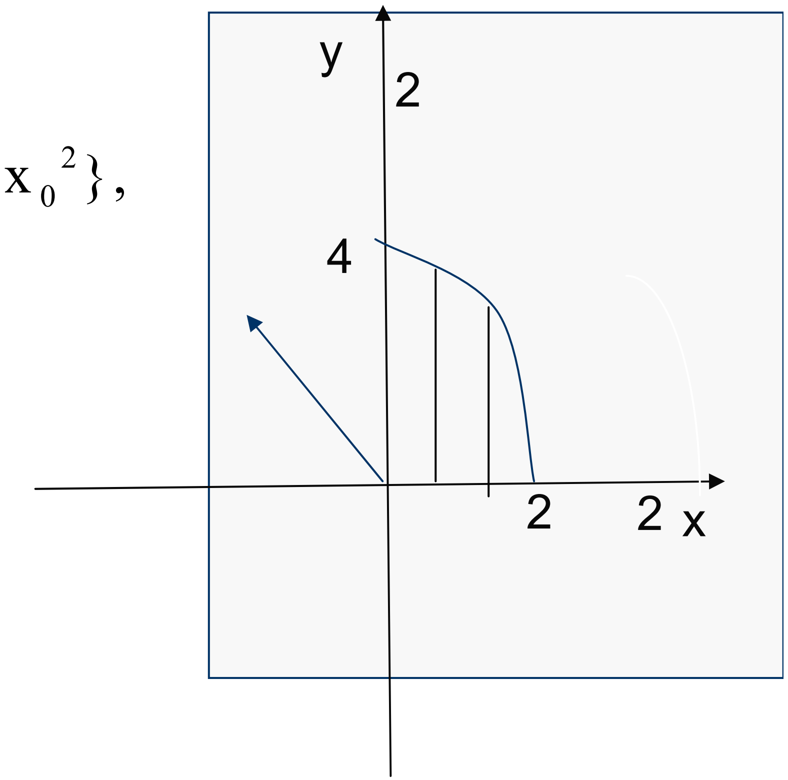
π.χ. Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται από $y=4-x^2$ και $z=5$.

Γ' Τρόπος

D στερεό, $c(x_0, z_0) = \{(x_0, y, z_0) \mid 0 \le y \le 4 - x_0^2\}$,

$0 \le x_0 \le 2, 0 \le z_0 \le 5$

$$\text{όγκος} = \int_0^5 \int_0^2 \int_0^{4-x^2} 1\,dy\,dx\,dz$$



Τριπλά Ολοκληρώματα

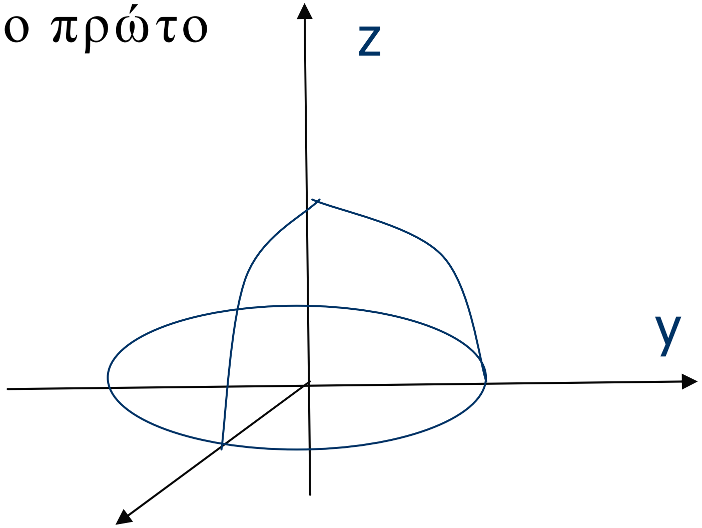
$\pi.\chi.$ Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται από $z=1-x^2-y^2$.

$T o\mu \acute{\varepsilon} \varsigma$

$$\text{xy επίπεδο: } (z=0) \rightarrow x^2+y^2=1$$

$$\text{xz επίπεδο: } (y=0) \rightarrow z=1-x^2$$

$$\text{yz επίπεδο: } (x=0) \rightarrow z=1-y^2$$

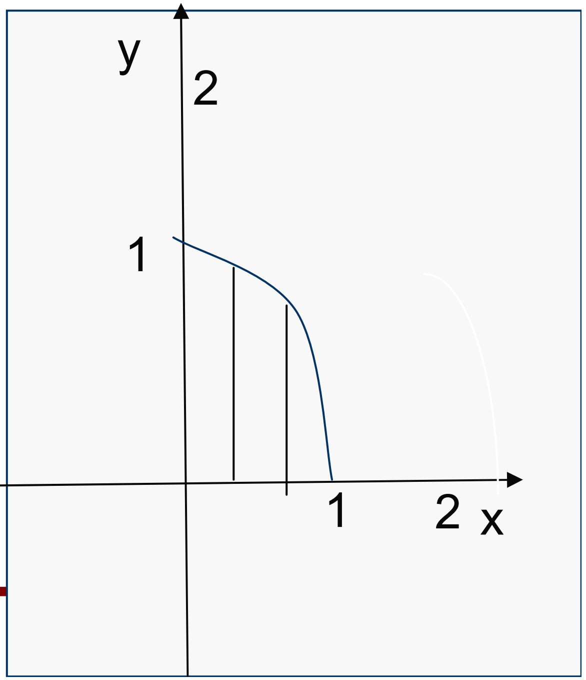


Α' Τρόπος (Διπλό ολοκλήρωμα)

$$f(x,y)=1-x^2-y^2$$

$$c(x_0)=\{(x_0,y)\mid 0\le y\le \sqrt{1-x_0^{\,2}}\},\ 0\le x_0\le 1$$

$$R=\begin{cases} 0\le y\le \sqrt{1-x^2} \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \qquad \text{όγκος}=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)\,dy\,dx$$



Τριπλά Ολοκληρώματα

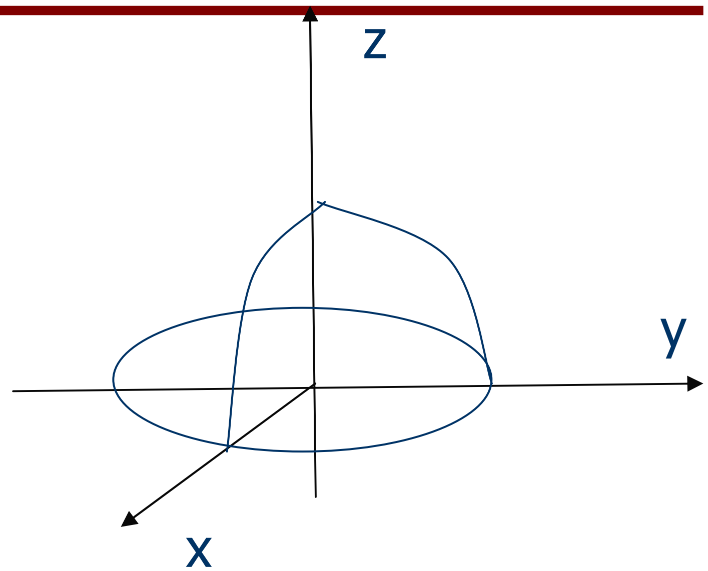
$\pi.\chi.$ Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται από $z=1-x^2-y^2$.

Τ*ομές*

$$\text{xy επίπεδο: } (z=0) \rightarrow x^2+y^2=1$$

$$\text{xz επίπεδο: } (y=0) \rightarrow z=1-x^2$$

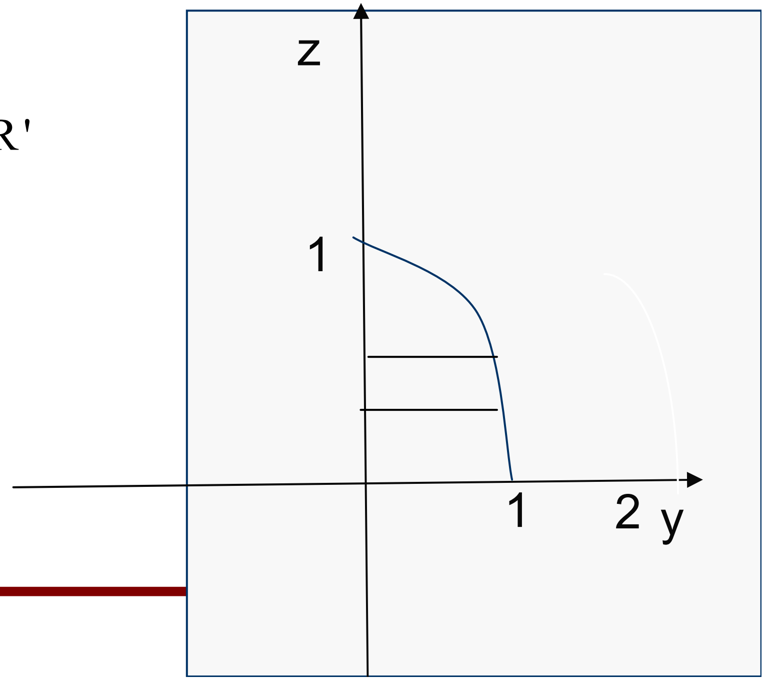
$$\text{yz επίπεδο: } (x=0) \rightarrow z=1-y^2$$



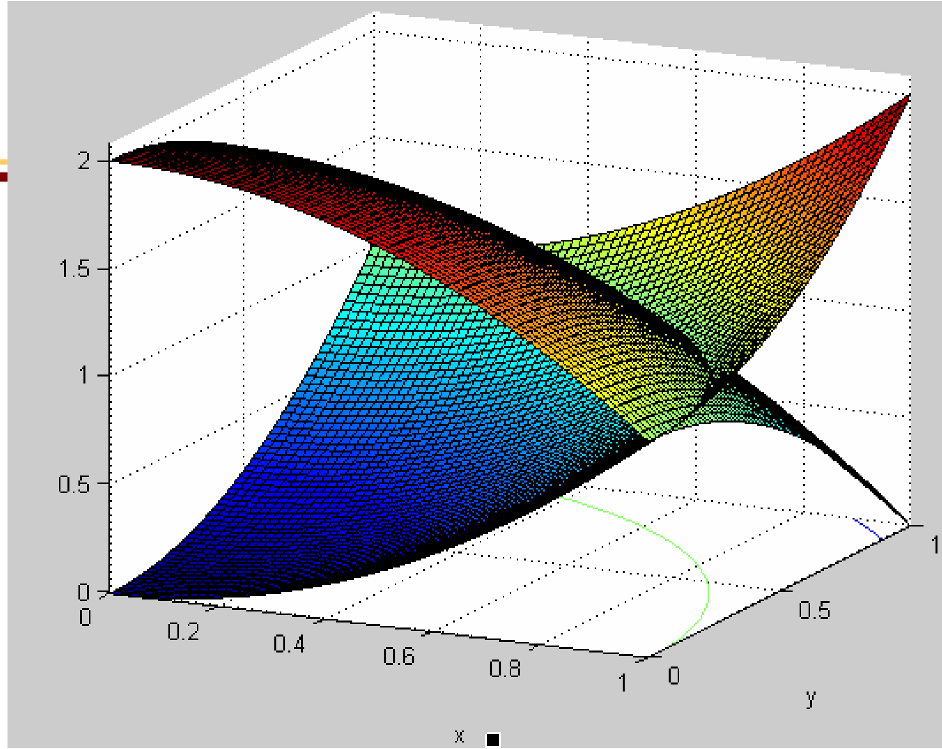
B' Τρόπος (Τριπλό ολοκλήρωμα)

$$c(y_0, z_0) = \{(x, y_0, z_0) \mid 0 \le x \le \sqrt{1-z_0-y_0^{\,2}}\}, (y_0, z_0) \in R'$$

$$R' = \left\{ \begin{array}{l} 0 \le y_0 \le 1 \\ 0 \le z_0 \le 1-y^2 \end{array} \right\} \quad \text{όγκος} = \int_0^1 \int_0^{1-y^2} \int_0^{\sqrt{1-z-y^2}} 1\,dxdzdy$$



Τριπλά Ολοκληρώματα

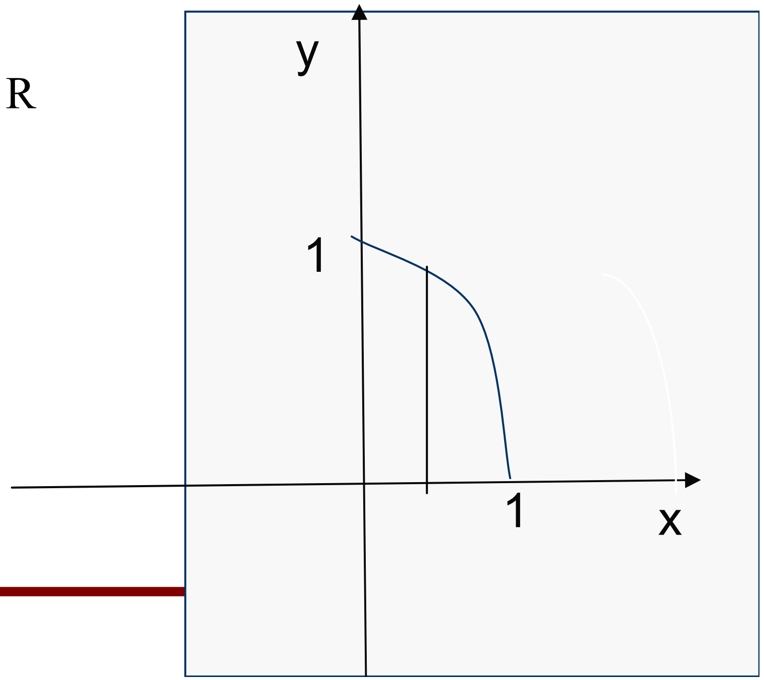


$\pi.\chi.$ Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται από $z=2-x^2-y^2$ και $z=x^2+y^2$.

Τομές

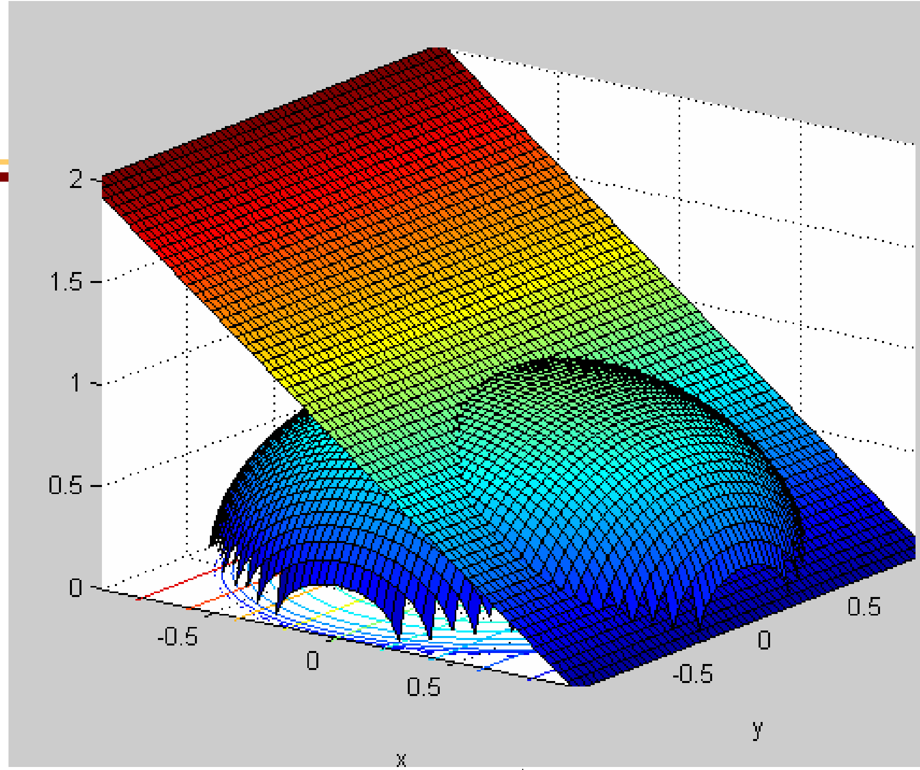
$$2-x^2-y^2 = x^2+y^2 \rightarrow x^2+y^2 = 1, z = 1$$

$$c(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0, z) \mid x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2\}, (x_0, y_0) \in R$$



$$R = \left\{\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{array}\right\} \quad \text{όγκος} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} 1\, dz\,dy\,dx$$

Τριπλά Ολοκληρώματα



$\pi.\chi.$ Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πάνω ημιχώρο και περικλείεται από $x^2+y^2+z^2=1$ και $x+z=1$.

Τομές

xy επίπεδο: $x^2+y^2=1$,

xz επίπεδο: $x^2+z^2=1$,

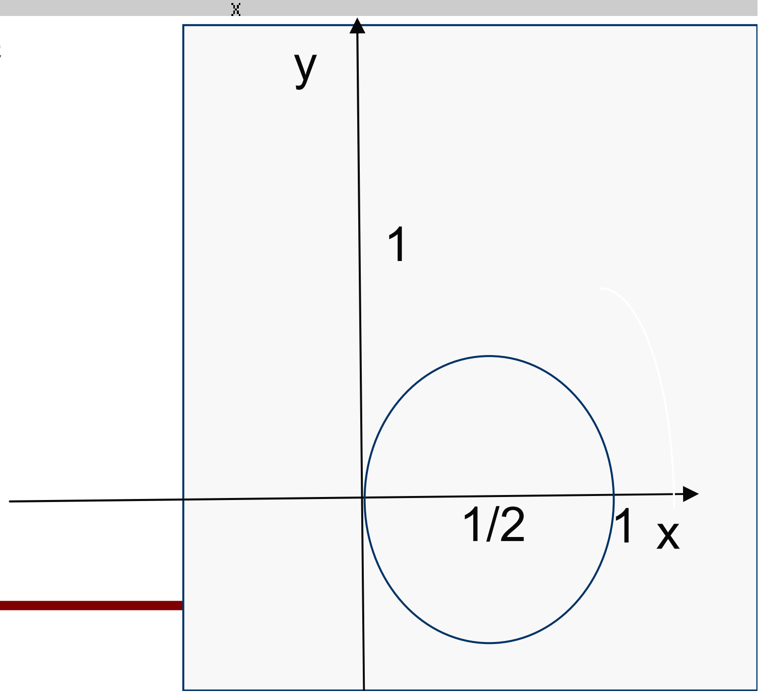
yz επίπεδο: $x^2+z^2=1$,

τομή με x+z=1 επίπεδο: $x^2+y^2+(1-x)^2=1 \;\rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+y^2=(\frac{1}{2})^2$

$$c(x_0,y_0)=\{(x_0,y_0,z)\,|\,1-x_0\le z\le\sqrt{1-x_0^{\,2}-y_0^{\,2}}\},(x_0,y_0)\in R$$

$$R=\left\{\begin{array}{l}0\le x\le 1\\ -\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}\le y\le\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}\end{array}\right\}$$

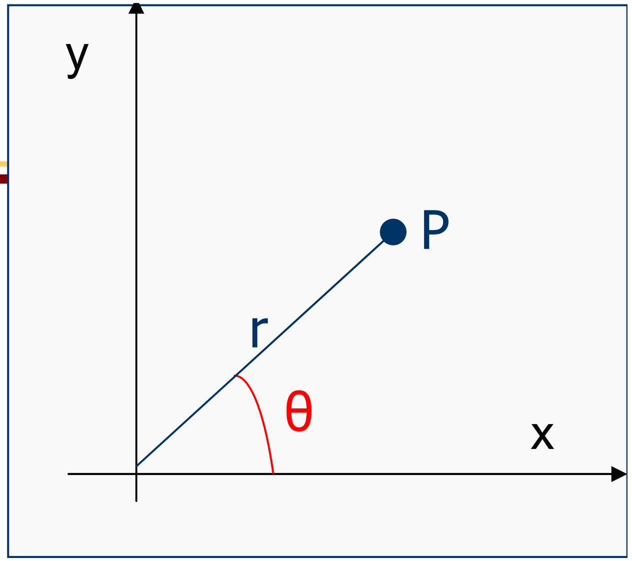
$$\text{όγκος}=\int_0^1\int_{-\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}^{\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}1\,dzdxdy$$



HY-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Συστήματα συντεταγμένων

Πολικές συντεταγμένες



Καθορίζω το P(x,y) από 2 στοιχεία (r,θ)

θ : γωνία OP με οx άξονα

r : απόσταση του P από το O(0,0)

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

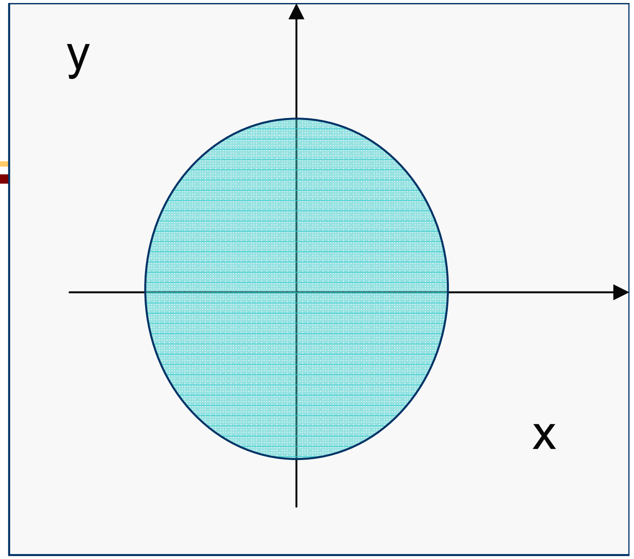
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(y/x)$$

Το (1,1) σε καρτεσιανές συντεταγμένες

είναι το ($\sqrt{2}$,π/4) σε πολικές

Πολικές συντεταγμένες

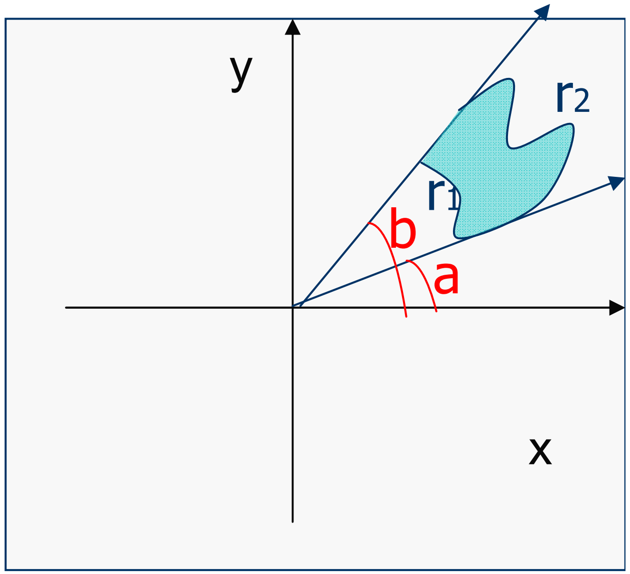


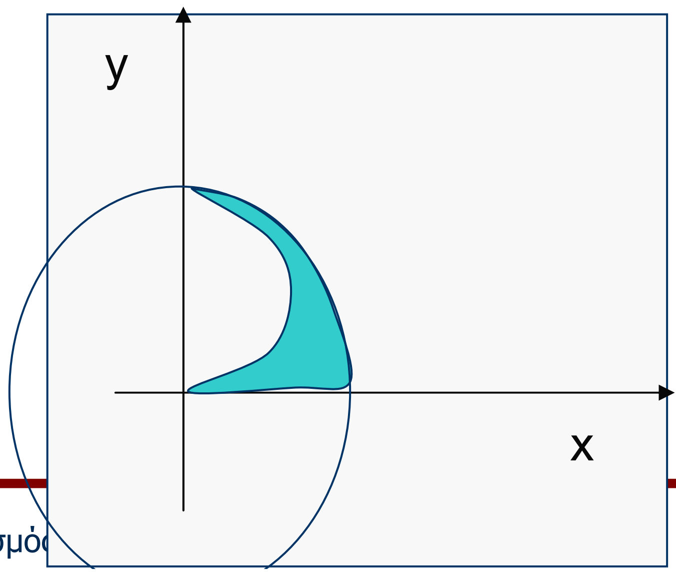
Σύνολο σημείων με του επιπέδου με

$0 \le \theta \le 2\pi$ και $0 \le r \le 1. \to$ Μοναδιαίος δίσκος

Γενικά σύνολο σημείων επιπέδου με

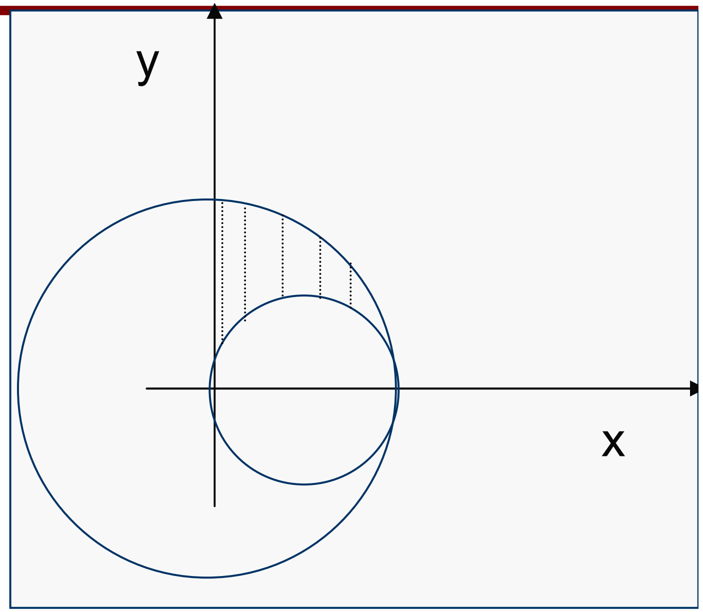
$$\begin{cases} a \le \theta \le b \\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta) \end{cases} \qquad \text{π.χ.} \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 1 - \cos\theta \le r \le 1 \end{cases}$$





Πολικές συντεταγμένες

$$\pi.\chi. \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi / 2 \\ \cos\theta \le r \le 1 \end{cases}$$

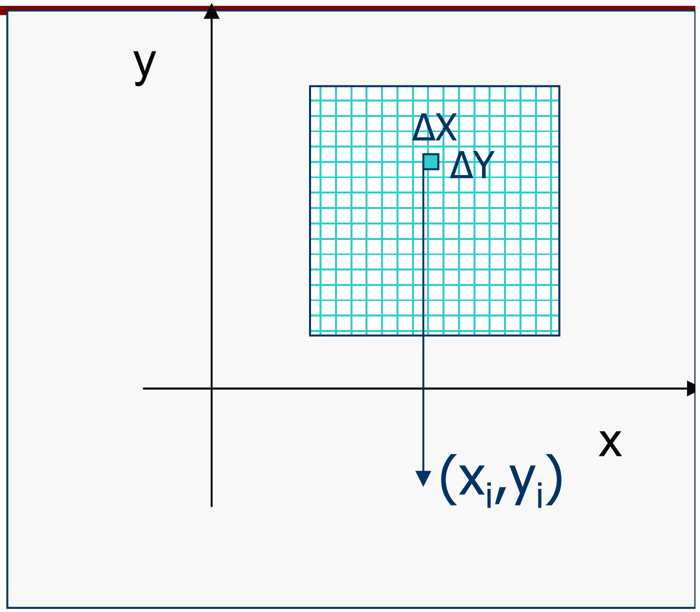


$$\begin{cases} r = \cos\theta \rightarrow r = \cos\theta \rightarrow r = x / r \rightarrow r^2 = x \rightarrow \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$x^2 - 2\bullet\frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2 \rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$$

Διπλά Ολοκληρώματα

$f(x,y): R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



1. Διαμερίζω το R και αριθμώ τα τμήματα $(x_i, y_i) \in R_i$
2. Εμβαδόν $R_i = \Delta X \bullet \Delta Y$
3. Στο Ri θεωρώ πως η f(x,y) έχει τιμή $f(x_i, y_i)$
4. Ο όγκος πάνω από R_i το προσεγγίζεται $f(x_i, y_i) \bullet \Delta X \bullet \Delta Y$

Συνολικός όγκος προσεγγίζεται$=\sum_i f(x_i, y_i) \bullet \Delta X \bullet \Delta Y$

$$\text{Συνολικός όγκος} = \lim_{(\Delta X, \Delta Y) \to (0,0)} \sum_i f(x_i, y_i) \bullet \Delta X \bullet \Delta Y \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

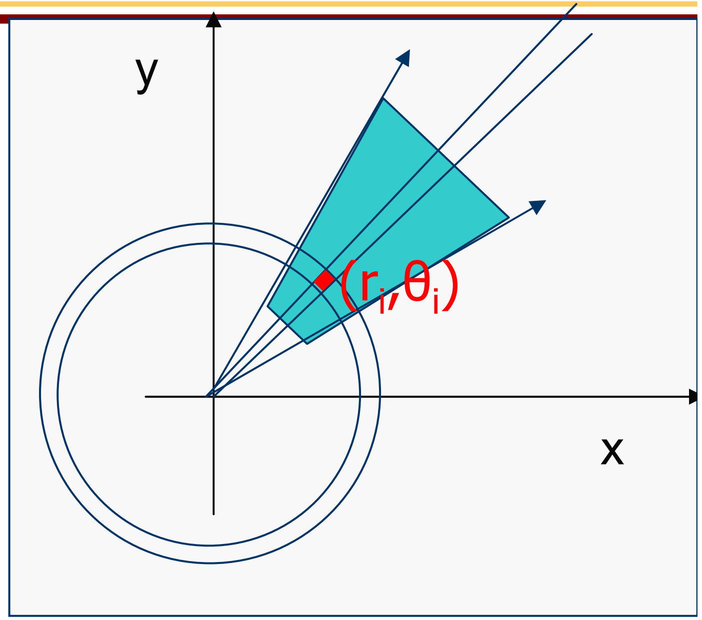
Πολικές συντεταγμένες

$$f(r,\theta):R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(r,\theta) \to f(r,\theta)$$

Η f περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες (r,θ)

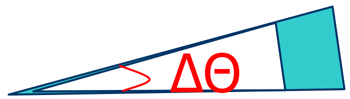
$$R = \begin{cases} a \le \theta \le b \\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta) \end{cases}$$



1. Παίρνω διαμέριση $R_i, (r_i,\theta_i) \in R_i$

2. Εμβαδόν $R_i = \frac{\Delta\Theta}{2} \bullet (r_2^{\,2} - r_1^{\,2}) = \frac{\Delta\Theta}{2} \bullet ((r_i + \frac{\Delta R}{2})^2 - (r_i - \frac{\Delta R}{2})^2) = \Delta\Theta \bullet r_i \bullet \Delta R$

3. Στο R_i θεωρώ πως η $f(r,\theta)$ έχει τιμή $f(r_i,\theta_i)$

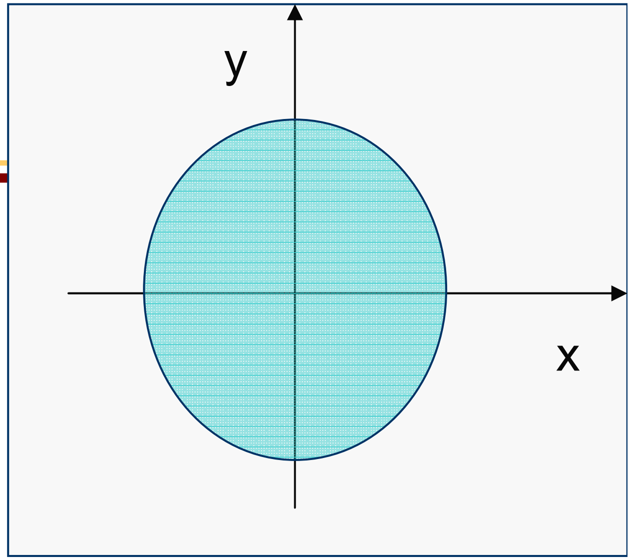


4. Ο όγκος πάνω από R_i το προσεγγίζεται $f(r_i,\theta_i) \bullet \Delta\Theta \bullet r_i \bullet \Delta R$

Συνολικός όγκος προσεγγίζεται$= \sum_i f(r_i,\theta_i) \bullet \Delta\Theta \bullet r_i \bullet \Delta R$

$$\text{Συνολικός όγκος} = \lim_{(\Delta\Theta,\Delta R)\to(0,0)} \sum_i f(r_i,\theta_i) \bullet \Delta\Theta \bullet r_i \bullet \Delta R \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \iint_R f(r,\theta) r \bullet dr d\theta$$

Πολικές συντεταγμένες



$\pi.\chi.$ Βρείτε το εμβαδόν δίσκου ακτίνας r_0.

$$R = \begin{Bmatrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le r_0 \end{Bmatrix}$$

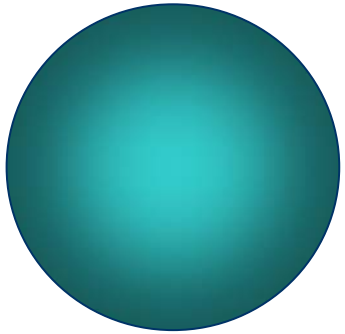
Εμβαδόν δίσκου$=\iint_R r \bullet dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} r dr d\theta = \pi r_0^{\,2}$

$\pi.\chi.$ Βρείτε τον όγκο μοναδιαίας σφαίρας ($x^2+y^2+z^2=1$) του πάνω ημισφαιρίου.

Πάνω ημισφαίριο $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

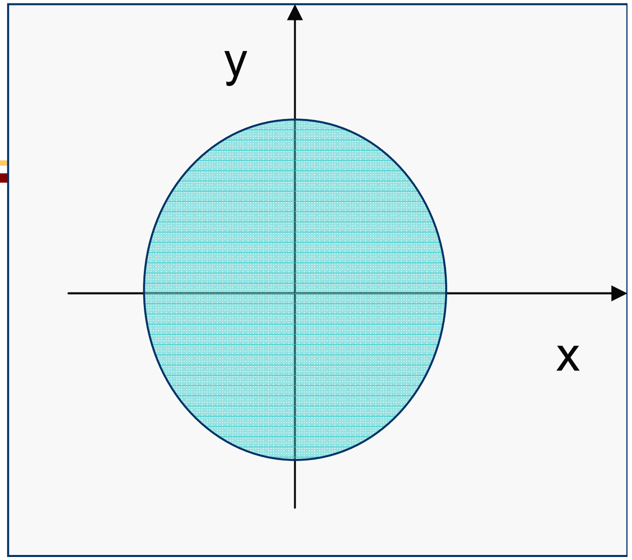
Μετατροπή σε πολικές: $f(r,\theta)=\sqrt{1-r^2}$

$$R = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le r_0 = 1 \end{cases}$$



Εμβαδόν δίσκου$=\iint_R f(r,\theta) r \bullet dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \sqrt{1-r^2}\, r dr d\theta =$

Πολικές συντεταγμένες



$\pi.\chi.$ Υπολογίστε το $\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$, D μον. κύκλος

$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}dxdy = ?$$

Λύση αλλαγή σε πολικές

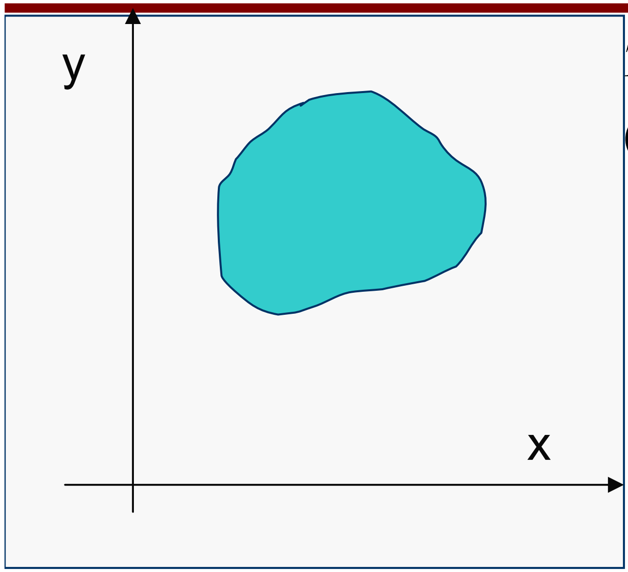
$$R = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases} \qquad f(r,\theta) = e^{r^2}$$

$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta =$$

ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

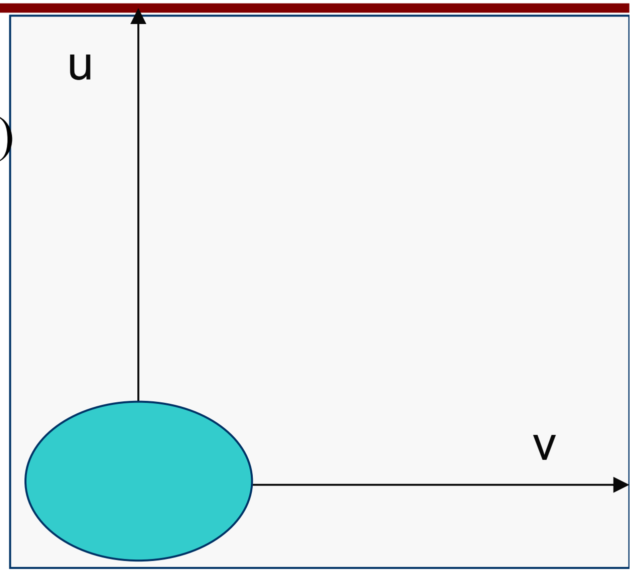
Συστήματα συντεταγμένων

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών



$$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \to (u = g_1(x,y), v = g_2(x,y))$$



$$DT = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(u,v)\,|DT|\,dudv$$

$\pi.\chi.$

Πολικές

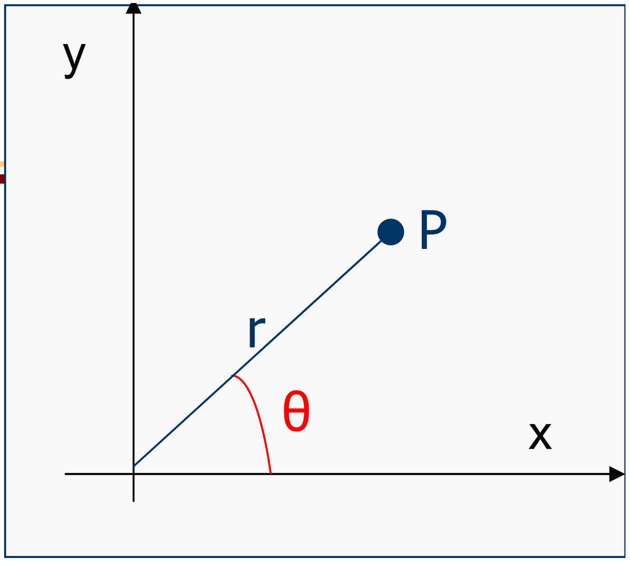
$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$$DT = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \quad |DT| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Επέκταση στα τριπλά ολοκληρώματα: $\int \iint_D f(x,y,z)dxdy = \int \iint_{D'} f(u,v,w)\,|DT|\,dudvdw$

Κυλινδρικές Συντεταγμένες



Καθορίζω το P(x,y,z) από 3 στοιχεία (r,θ,z)

P'(x,y,0)

θ : γωνία OP' με οx άξονα

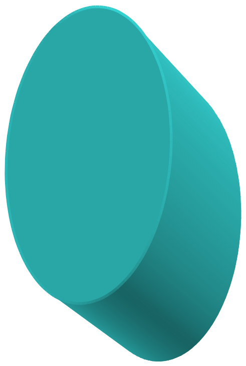
r : απόσταση του P'(x,y,0) από το O(0,0,0)

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(y/x)$$

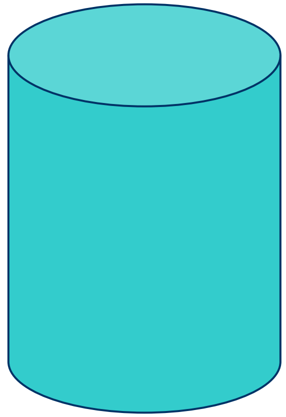


$$D = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le r_0 \\ 0 \le z \le h \end{cases}$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_D f(r,\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz =$$

Κυλινδρικές Συντεταγμένες

$\pi.\chi.$ Υπολογίστε το όγκο κυλίνδρου ύψους h,ακτίνας r_0



$$D = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le r_0 \\ 0 \le z \le h \end{cases}$$

$$όγκος = \iint_D \int r dr d\theta dz =$$

$\pi.\chi.$ Βρείτε το όγκο που βρίσκεται πάνω από το z=0

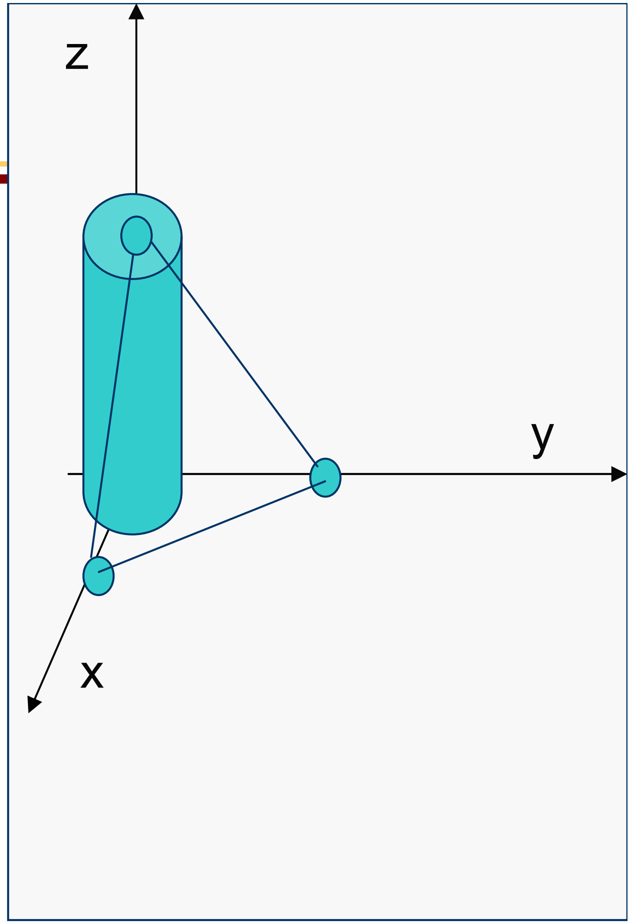
και κάτω από το $z=x^2+y^2$ και παραπλεύρως από τον κύλινδρο

$x^2+y^2=4.$

Μετατροπή σε κυλινδρικές $D = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ 0 \le z \le r^2 \end{cases}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{r^2} r dz dr d\theta =$$

Κυλινδρικές Συντεταγμένες



$\pi.\chi.$ Υπολογίστε το όγκο στερεού D που ορίζεται από $x^2+y^2 \leq 1$ και τα επίπεδα x+y+z=2,z=0,x=0,y=0.

Μετατροπή σε κυλινδρικές $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$D = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 2 - x - y = 2 - r(\cos\theta + \sin\theta) \end{cases}$$

$$\acute{o}\gamma\kappa o\varsigma = \iiint_D r\,dz\,d\theta\,dr =$$

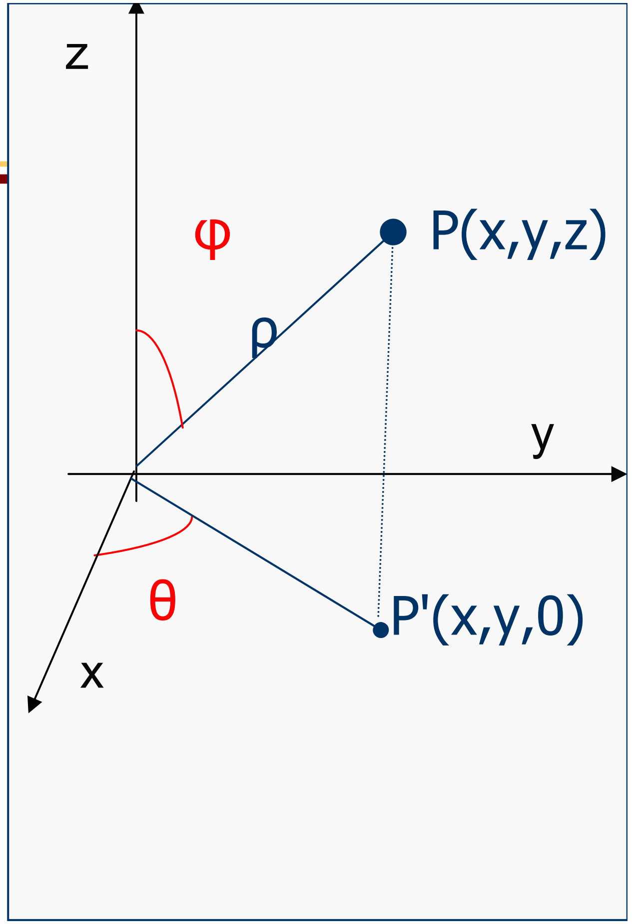
Σφαιρικές Συντεταγμένες

Καθορίζω το P(x,y,z) από 3 στοιχεία (ρ,φ,θ), P'(x,y,0)

θ : γωνία OP' με οx άξονα

φ : γωνία OP(x,y,0) με οz άξονα

ρ : απόσταση του P από το O(0,0,0)



$$z = \rho \cos\varphi$$

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$

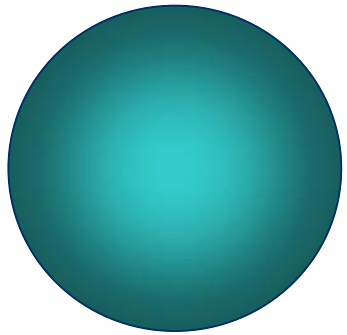
$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad D = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le \rho_0 \end{cases}$$

$$\theta = \tan^{-1}(y/x)$$

$$\iint_D \int f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \int f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

Σφαιρικές Συντεταγμένες



$\pi.\chi.$ Υπολογίστε το όγκο σφαίρας ακτίνας ρ_0

$$D = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le \rho_0 \end{cases}$$

$$\acute{o}\gamma\kappa o\varsigma = \iiint_D \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\theta d\rho =$$

$\pi.\chi.$ Βρείτε το ολοκλήρωμα $\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1.5}} dxdydz$, D στερεό ανάμεσα σε 2 σφαίρες ακτίνων a,b, $a<b$.

Μετατροπή σε σφαιρικές $D = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ a \le \rho \le b \end{cases}$

$$\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1.5}} dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{\rho^2 \sin\varphi}{\rho^3} d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{\sin\varphi}{\rho} d\rho d\varphi d\theta =$$