HY-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

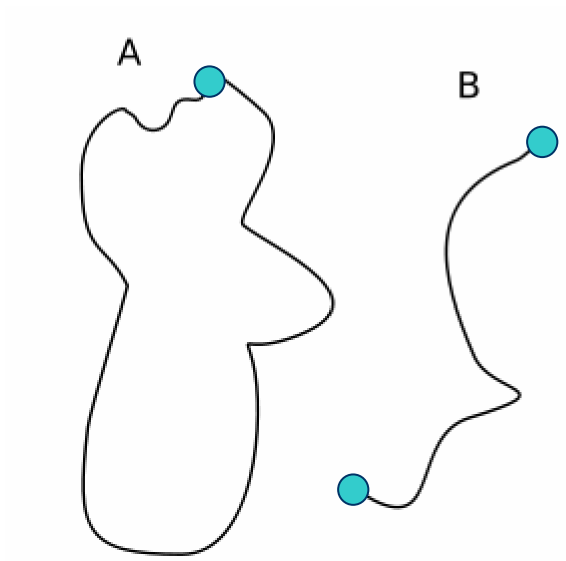
Παραμετρικές εξισώσεις καμπύλων

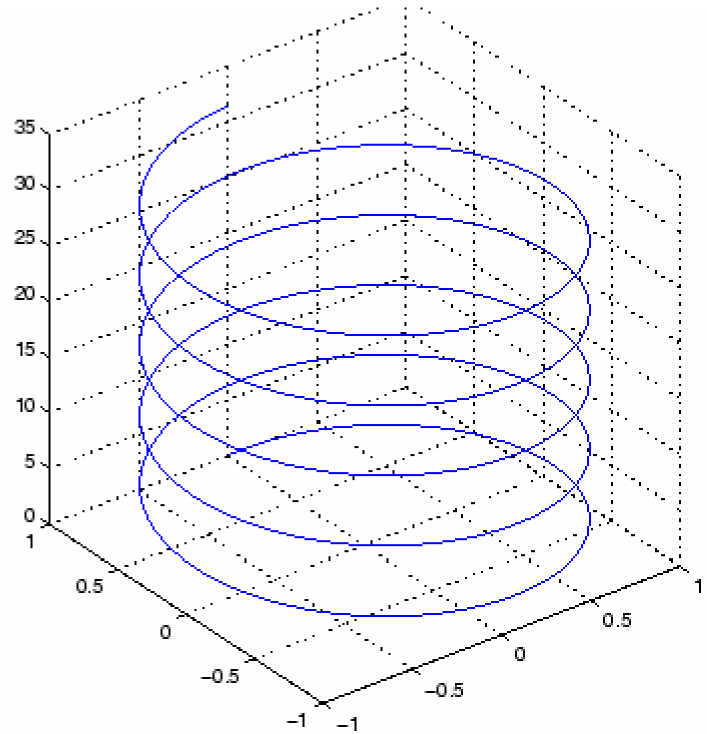
Παραδείγματα

$$c(t): U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to (x_1(t), x_2(t))$$

$$c(t): U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$t \to (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

Θέσης – χρόνου   ταχύτητας χρόνου   Χαρακτηριστικού-χρόνου



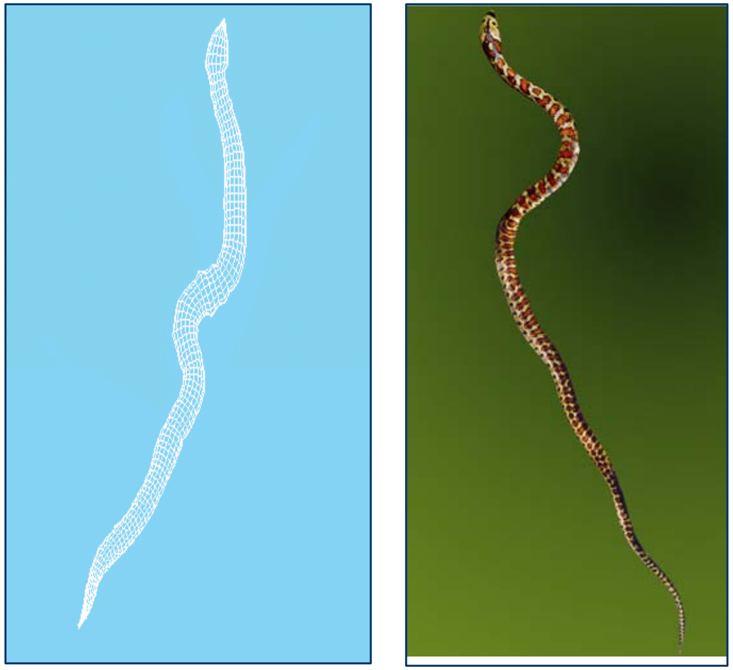


Παραδείγματα από Γραφική

$$c(t): U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$t \to (x_1(t), x_2(t))$$

3Δ Μοντέλα

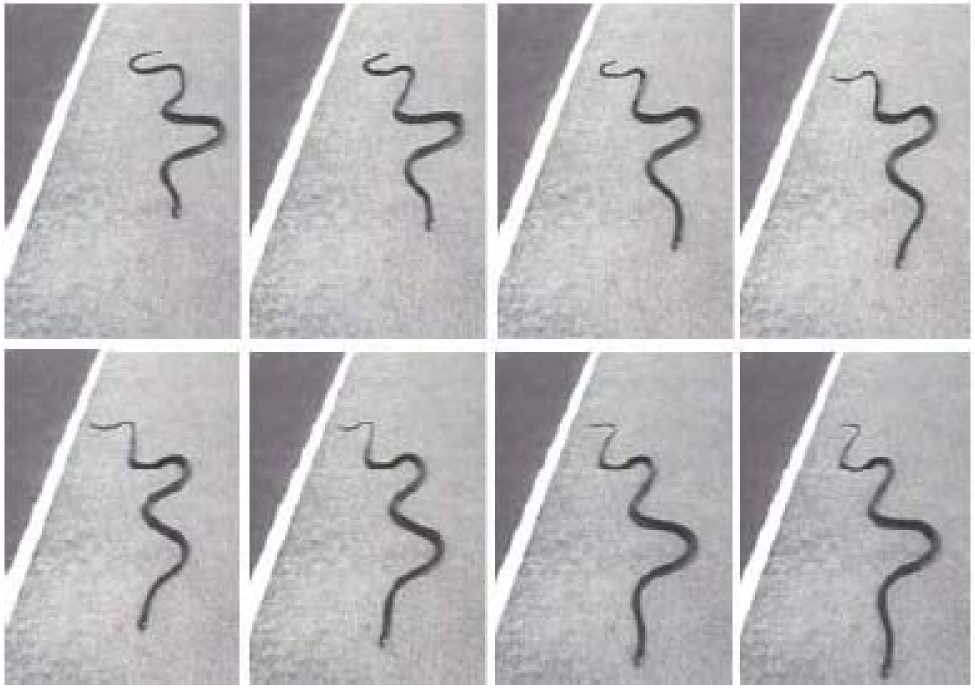


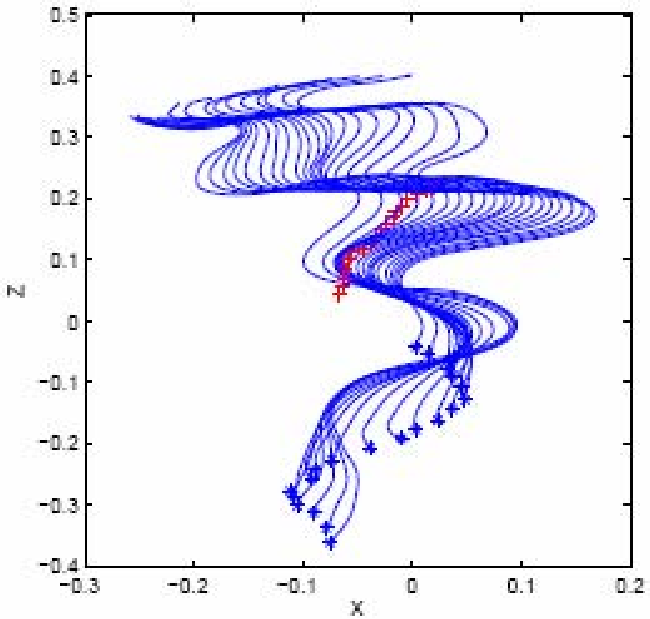
Με τη βοήθεια της καμπύλης c(t) του σκελετού του φιδιού έχουμε πετύχει 3Δ ανακατασκευή του.

Παραδείγματα από κινηματική/γραφική

$$c(t) : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$t \to (x_1(t), x_2(t))$$





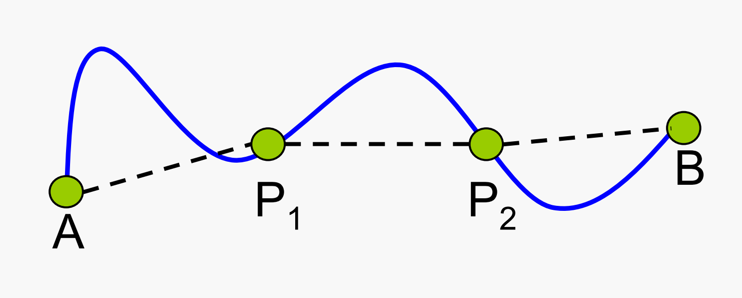
+:τροχιά κέντρου μάζας
*: τροχιά κεφαλιού

Από την ανάλυση των καμπύλων κίνησης διαφόρων σημείων μπορούμε να προχωρήσουμε σε ανακατασκευή της κίνησης και σε σύνθεση 3Δ animation

Ισοδιαμέριση Καμπύλης

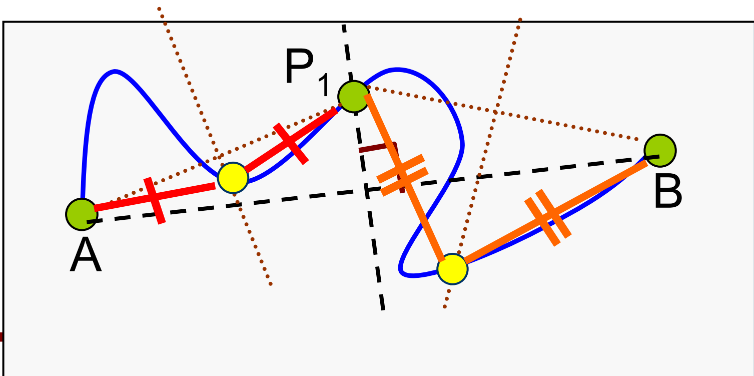
The Curve Equipartition (EP) Problem

Problem Definition: It is given a continuous curve **C(t), t∈[0,1]** starting at point **A** and ending at point **B**. The goal is to locate **N-1** consecutive curve points $\mathbf{P_i = C(t_i)}$, i = 1,…,N-1, so that the curve can be divided into **N** segments with equal length chords, $\mathbf{|P_i - P_{i+1}| = |P_{i+1} - P_{i+2}|, P_0 = A, P_N = B}$.



An EP example for N=3, $|AP_1|=|P_1P_2|=|P_2B|$

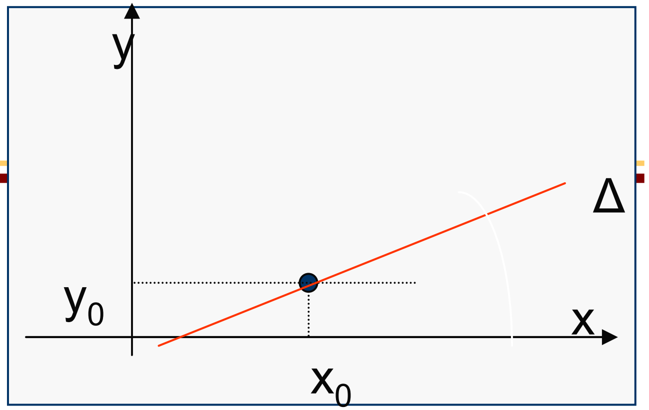
- When *N* is higher than two, there is not a trivial method to compute the equal length line segments.



An EP example for N=2, $|AP_1|=|P_1B|$

- When ***N* = 2**, we have to locate a curve point P_1, so that $|AP_1| = |P_1B|$. This point can be given as the intersection of the curve with the *AB* segment bisector.
- We can not apply this method inductively.

Παραδείγματα



$$c(t): U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \to (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

Ευθεία στο $\Re^2$ που περνάει από το (x_0, y_0) και έχει τη διεύνθυση του $\vec{v}$=<a,b>

$$c(t): U \subseteq \Re \to \Re^2$$
$$t \to (x_0 + at, y_0 + bt)$$

Ευθεία $\Re^n$ που περνάει από το $(x_1,..,x_n)$ και έχει τη διεύνθυση του $\vec{v}$=<a_1,..,a_n>

$$c(t): U \subseteq \Re \to \Re^n$$
$$t \to (x_1 + a_1 t, \ldots, x_n + a_n t)$$

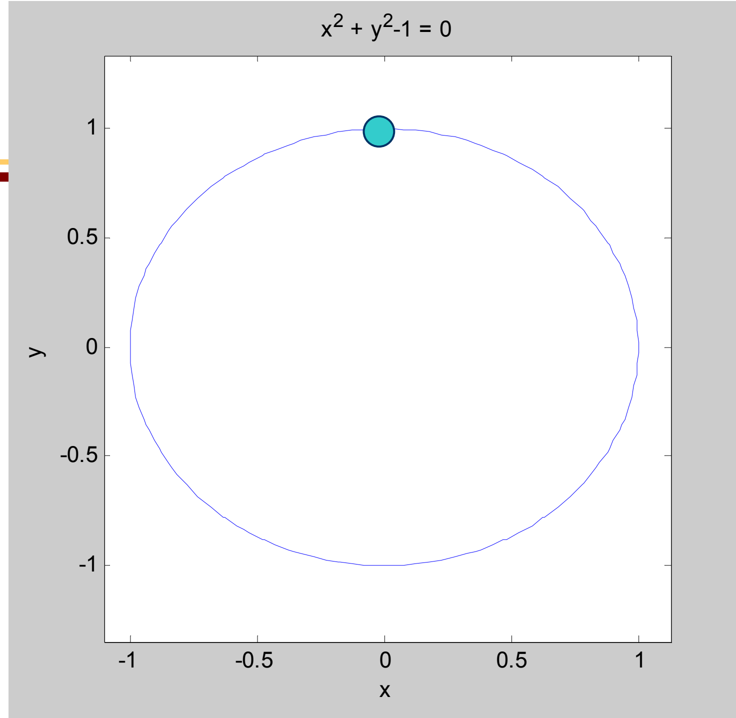
Παραδείγματα

$$c(t):[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$$
$$t\to(\cos(t),\sin(t))$$

$$c(t):[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$$
$$t\to(\cos(2t),\sin(2t))$$

$$c(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$$
$$t\to(\cos(2t),\sin(2t))$$

$$x^2+y^2=1$$

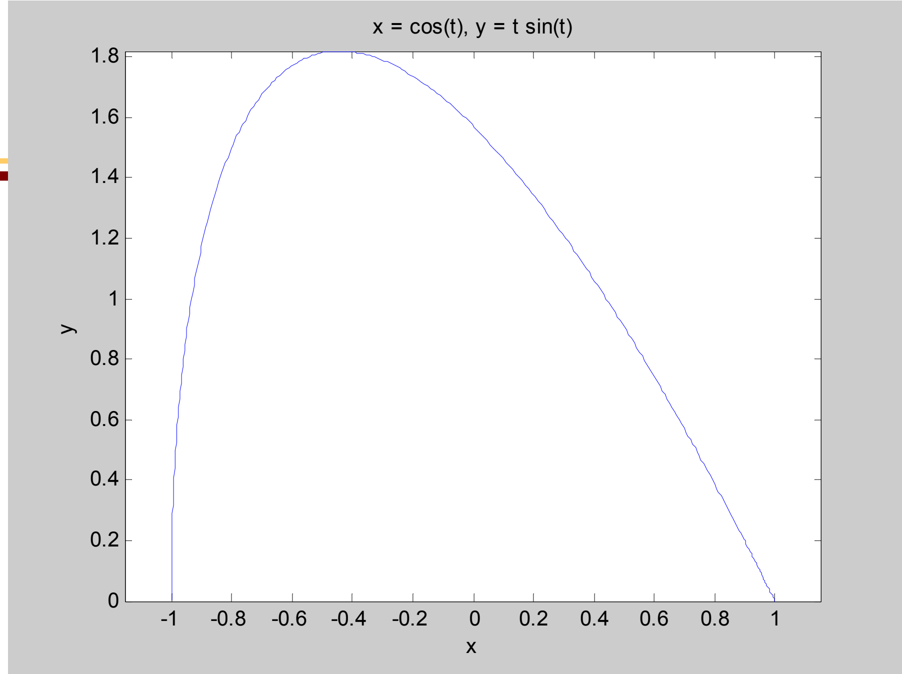


Matlab: ezplot('x^2 + y^2-1');

Παραδείγματα

$$c(t):[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$$

$$t\to(\cos(t),t\sin(t))$$

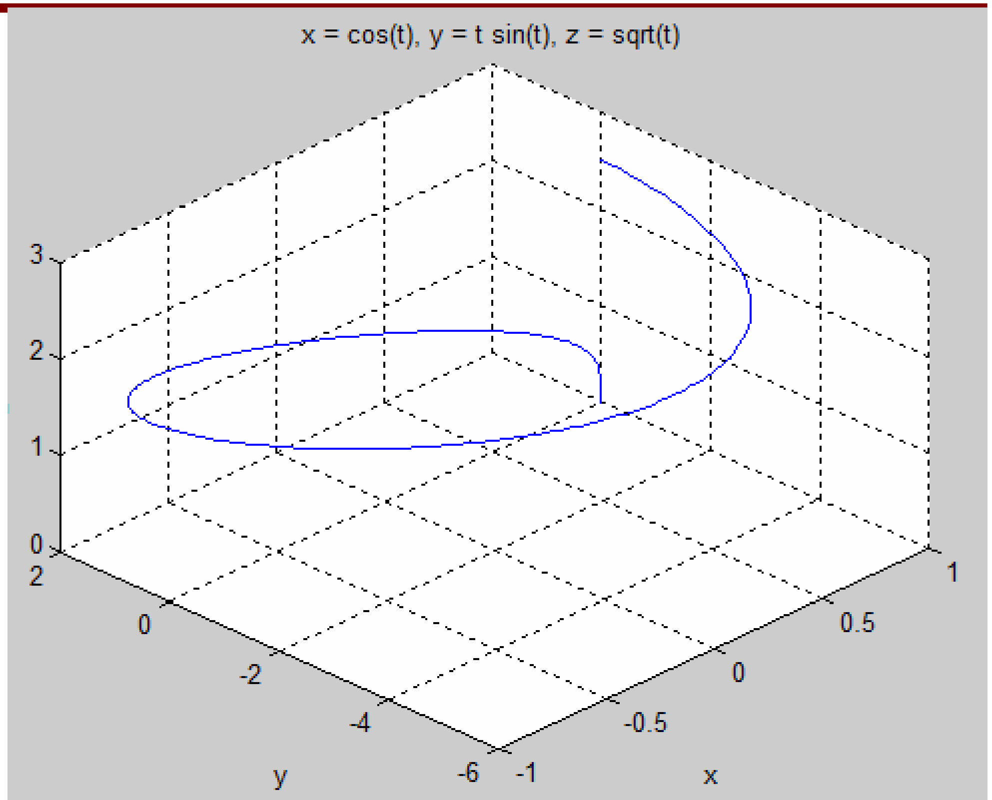


Matlab: ezplot('cos(t)','t.*sin(t)',[0 pi]);

Παραδείγματα

$$c(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$t \to (\cos(t), t\sin(t), \sqrt{t})$$



Matlab: ezplot3('cos(t)','t.*sin(t)','sqrt(t)');

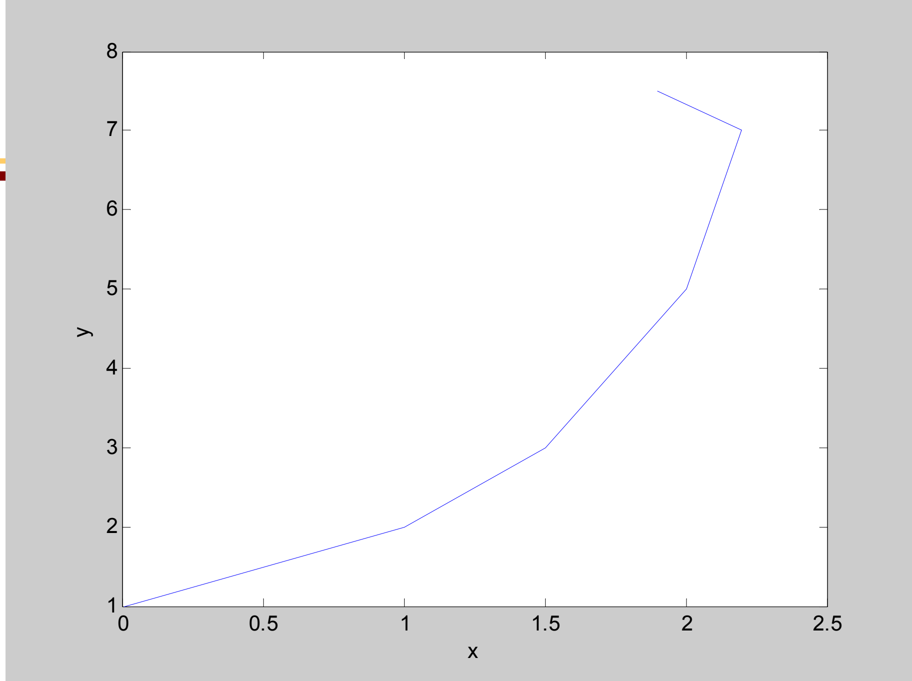
Παραδείγματα

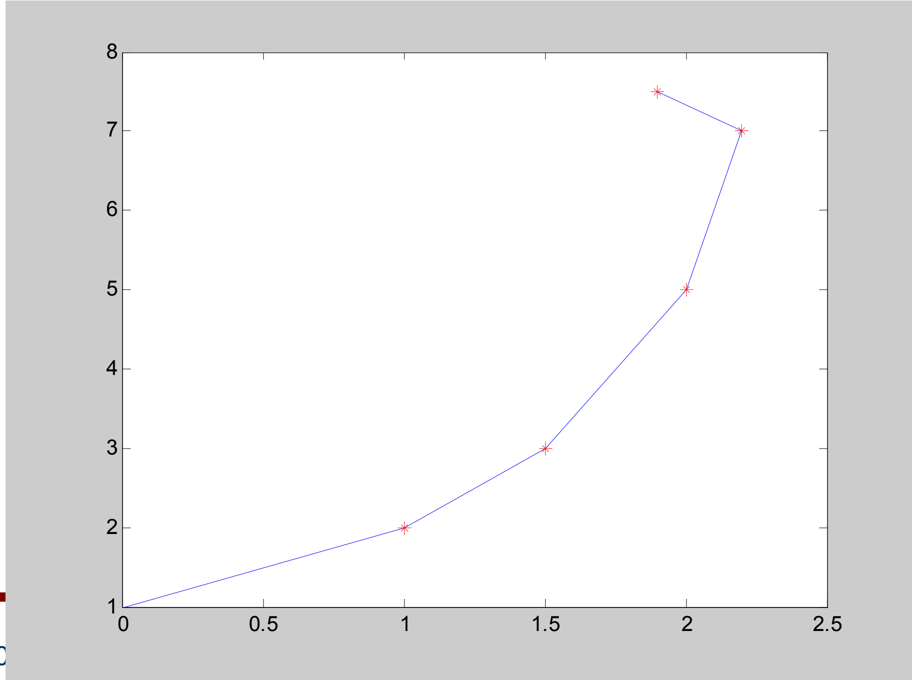
Εκτύπωση καμπύλης με γραμμική παρεμβολή διαδοχικών σημείων (από διακριτό σε συνεχές)

A1(0,1)
A2(1,2)
A3(1.5,3)
A4(2,5)
A5(2.2,7)
A6(1.9,7.5)

```
Matlab:
x = [0 1 1.5 2 2.2 1.9];
y = [1 2 3 5 7 7.5];
plot(x,y);
xlabel('x');
ylabel('y');

figure;
plot(x,y);
hold on;
plot(x,y,'r*');
```



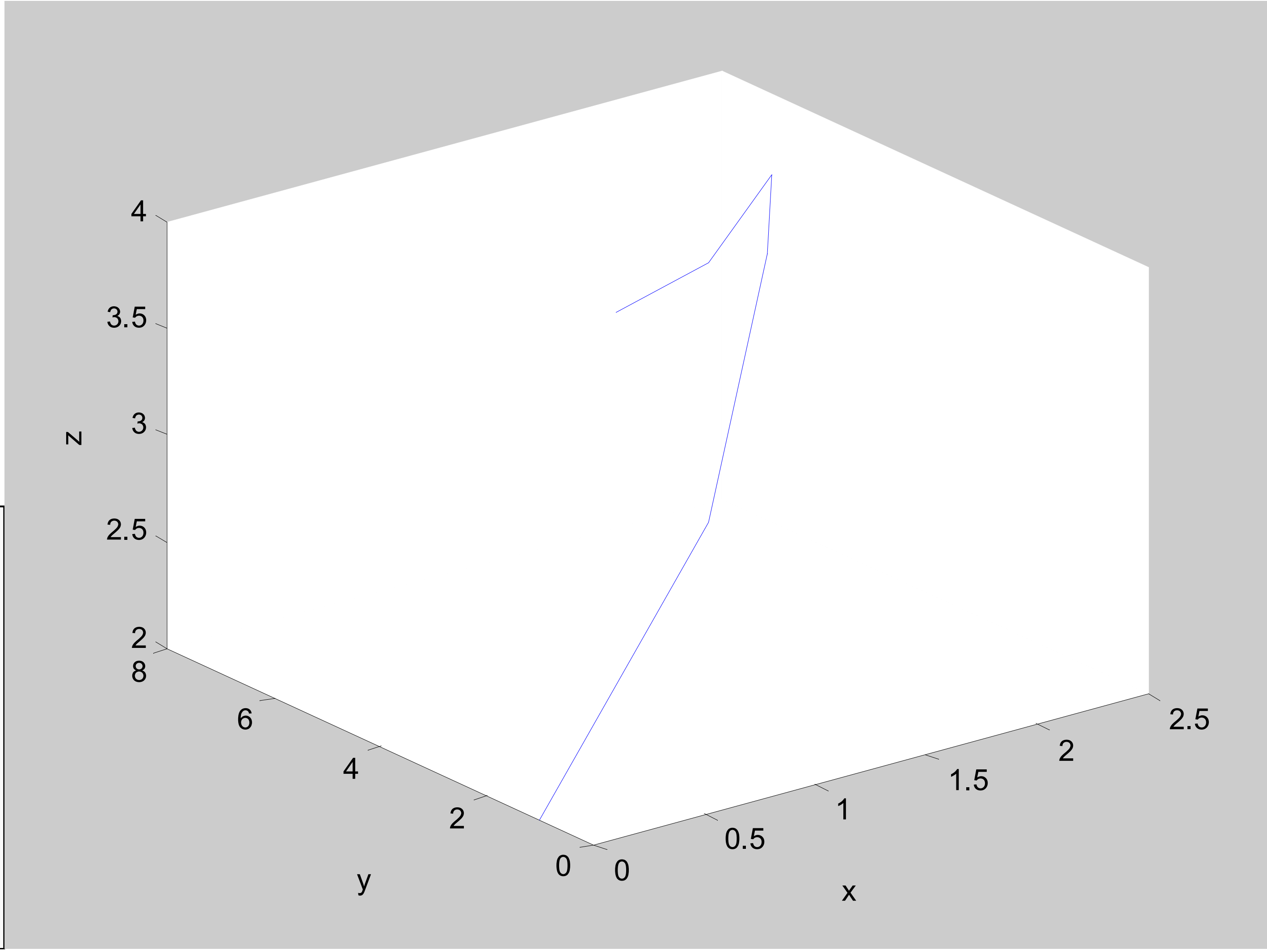


Παραδείγματα

Εκτύπωση 3Δ καμπύλης με γραμμική παρεμβολή διαδοχικών σημείων (από διακριτό σε συνεχές)

A1(0,1,2)
A2(1,2,3)
A3(1.5,3,4)
A4(2,5,4)
A5(2.2,7,3.3)
A6(1.9,7.5,3.1)

```
Matlab:
x = [0 1 1.5 2 2.2 1.9];
y = [1 2 3 5 7 7.5];
z= [2 3 4 4 3.3 3.1];
plot3(x,y,z);
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
```



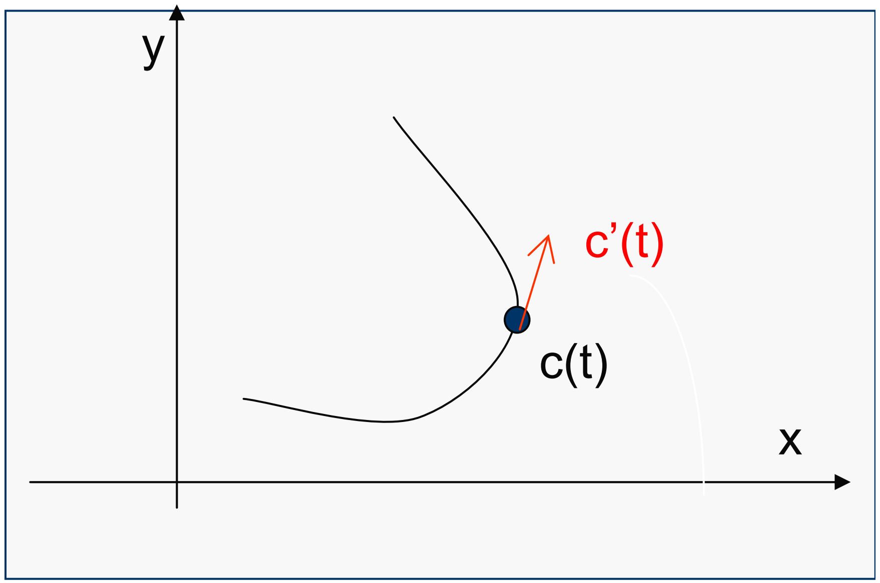
Παραμετρικές εξισώσεις

Οι παραμετρικές εξισώσεις δίνουν

1. τη καμπύλη ως σύνολο σημείων
2. τον τρόπο με οποίο διαγράφεται η καμπύλη

$$c(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$t \to c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$



Παράγωγος Καμπύλης

$$c' : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$t \to c'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$$

$$c'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = < x_1'(t), \ldots, x_n'(t) >$$

Το $c'(t)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο c(t).

ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Εφαπτόμενη Ευθεία σε σημείο της καμπύλης

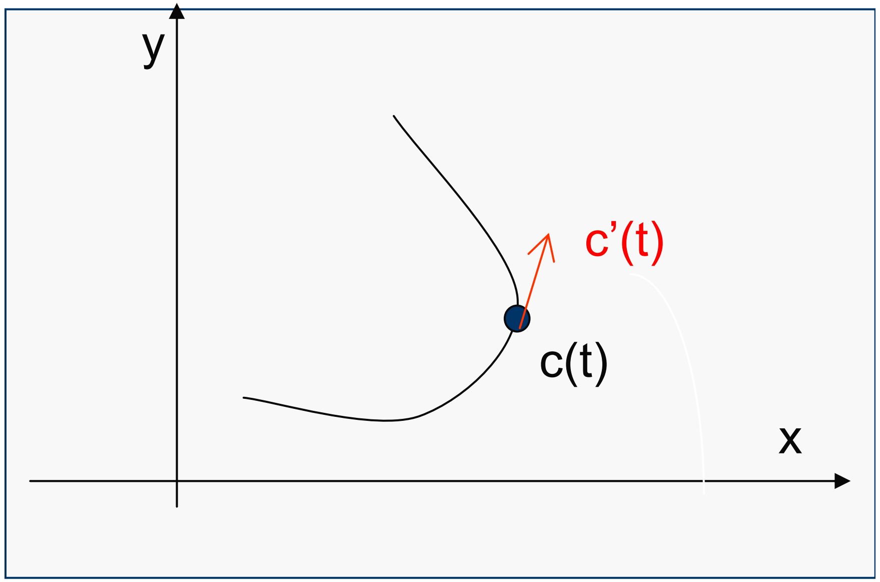
Παραμετρικές εξισώσεις

Οι παραμετρικές εξισώσεις δίνουν

1. τη καμπύλη ως σύνολο σημείων
2. τον τρόπο με οποίο διαγράφεται η καμπύλη

$$c(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$t \to c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$



Παράγωγος Καμπύλης

$$c': U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$t \to c'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$$

$$c'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = < x_1'(t), \ldots, x_n'(t) >$$

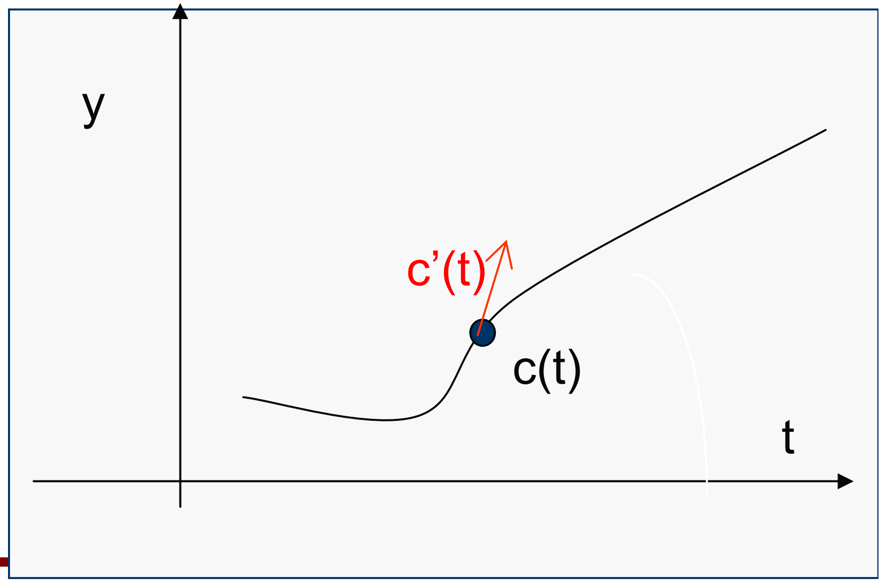
Το $c'(t)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο c(t).

Παραμετρικές εξισώσεις

Το γράφημα της συνάρτησης y=f(t) δίδεται παραμετρικά από την καμπύλη:

$$c(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad c'(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$t \to (t, f(t)) \qquad t \to (1, f'(t))$$

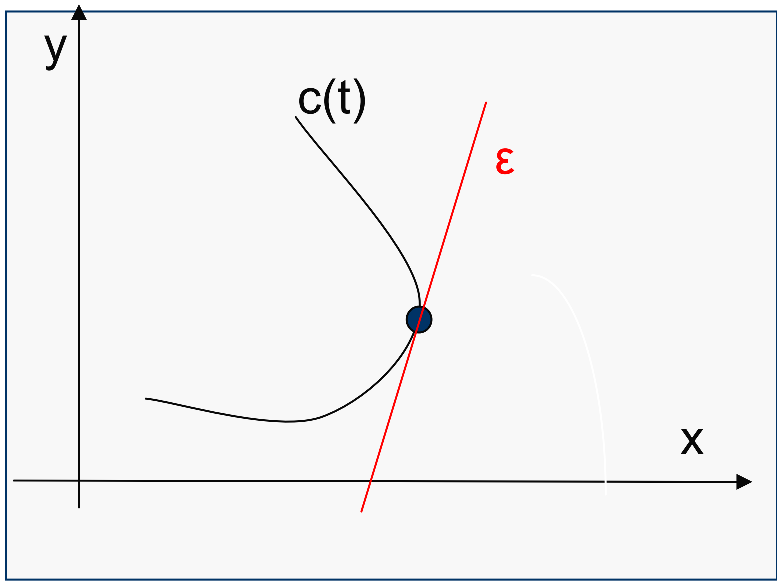


Εφαπτόμενη Ευθεία σε σημείο της καμπύλης

Εξίσωση της ε: $e(\lambda) = c(t_0) + \lambda c'(t_0)$

π.χ.

$$c(t) = (\cos^2(t), 3t)$$
$$c'(t) = (-2\cos(t)\sin(t), 3)$$
$$c(0) = (1, 0)$$
$$c'(0) = <0, 3>$$
$$\text{Εφαπτόμενη ευθεία:}$$
$$<x(\lambda), y(\lambda)> = <1, 0> + \lambda <0, 3>$$

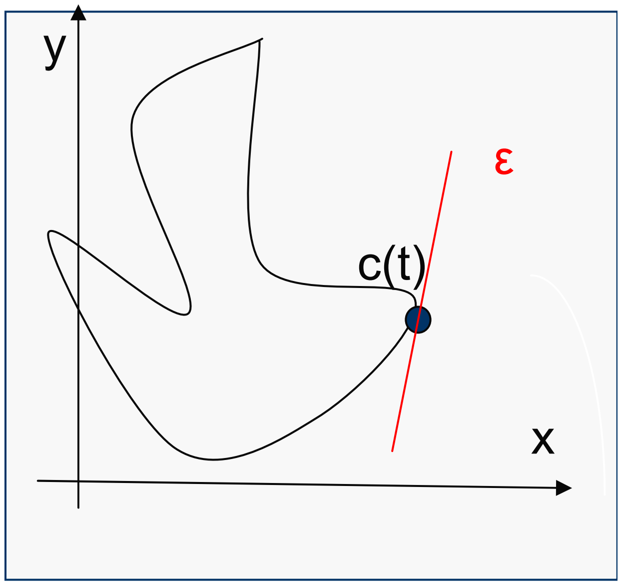


Εφαπτόμενη Ευθεία σε σημείο της καμπύλης

Έστω G η καμπύλη που ορίζεται από την f(x,y) = 0 και P ϵ C.
Υποθέτω πως στο P μπορώ να παραμετροποιήσω την καμπύλη

$$c(t): U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{C}(\mathrm{t}_0)=\mathrm{P}, \mathrm{C}(\mathrm{t}) \in \mathrm{C}$$

$$t \to (x_1(t), x_2(t))$$



Εφαπτόμενο διάνυσμα: $\mathrm{C}'(\mathrm{t}_0) = < x_1'(\mathrm{t}_0), x_2'(\mathrm{t}_0) >$

$$z = f(x,y) = 0 \qquad \mathrm{g}(\mathrm{t}) = \mathrm{f}(x_1(t), x_2(t)) = 0$$

$$0 = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} \Rightarrow \nabla f \bullet \mathrm{C}'(\mathrm{t}_0) = 0 \Rightarrow$$

Το $\mathrm{C}'(\mathrm{t}_0)$ είναι κάθετο στο $\nabla f(P)$

Άρα το $\mathrm{v} = <-\frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial x}(P))$ είναι εφαπτόμενο της G στο $\mathrm{P}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$.

Εξίσωση εφαπτομένης: $\mathrm{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{x}_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(P) \bullet t, \ \mathrm{y}(\mathrm{t}) = \mathrm{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(P) \bullet t,$

Εφαπτόμενη Ευθεία σε σημείο της καμπύλης

Παράδειγμα $f(x,y) = x^3 + 3xy + 2y^5 - 27 = 0 \qquad P(3,0)$

Εξίσωση εφαπτομένης στο P.

Γενικότερα

Αν $f(x,y,z) = 0$ είναι η επιφάνεια S του χώρου

και $P(x_0, y_0, z_0) \in S$.

Τότε $\nabla f(P)$ είναι το κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο στο P.

Απόδειξη: Όμοια με πριν (κανόνας αλυσίδας)

Παράδειγμα $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3xz = 0 \qquad P(1,2,\tfrac{1}{3})$

Εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας στο P.

Εφαπτόμενη Ευθεία σε σημείο της καμπύλης

Το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης που προκύπτει

από τη τομή επιφανειών $f_1(x, y, z) = 0$ και $f_2(x, y, z) = 0$ στο P.

$\vec{v} = \nabla f_1(P) \times \nabla f_2(P)$

Παράδειγμα

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$

$P(1,1,\sqrt{2})$

Υπολογισμός ταχύτητας και επιτάχυνσης

Άσκηση

$c(t):[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$t\to(\cos t,\sin 2t)$

Υπολογισμός εφαπτομένης, ταχύτητας και επιτάχυνσης για t=0.

Άσκηση 8 &3.1

Ζητάμε τις καμπύλες c(t) που περιγράφουν τις τροχιές:

(a) $\{(x,y):\ y=e^x\}$

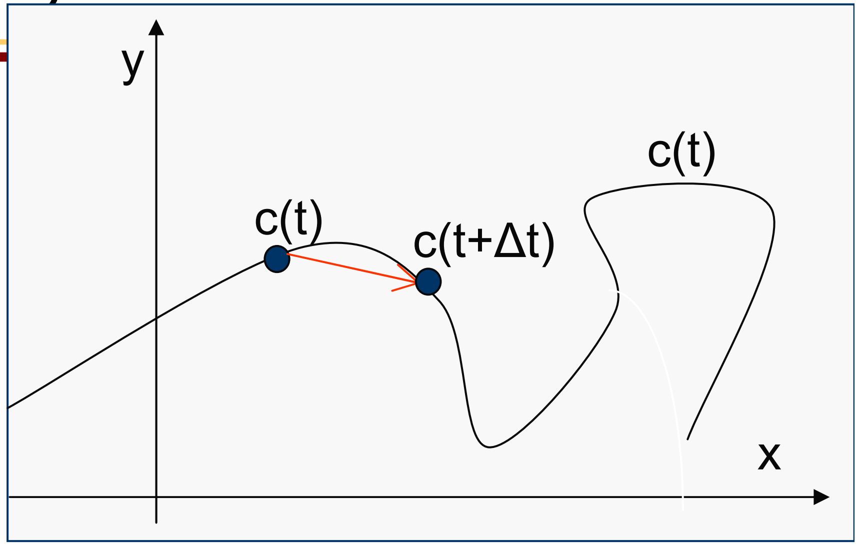
(b) $\{(x,y):\ 4x^2+y^2=1\}$

(c)Ευθεία που περνάει από το (0,0,0) και το (a,b,c)

ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μήκος Καμπύλων σε Παραμετρικές Εξισώσεις

Μήκος σε παραμετρικές εξισώσεις



$$c(t): U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to (x(t), y(t))$$

Το ΔS το προσεγγίζω από το $|\vec{C}(t+\Delta t)-\vec{C}(t)|=$

$$=\sqrt{(x(t+\Delta t)-x(t))^2+(y(t+\Delta t)-y(t))^2}=\sqrt{\Delta X^2+\Delta Y^2}=$$

$$=\left(\sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta Y}{\Delta t}\right)^2}\right)\bullet\Delta t$$

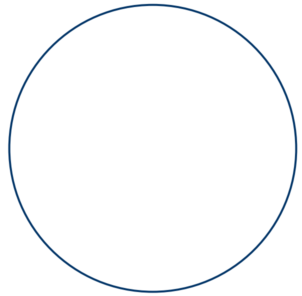
με $\Delta t \to dt$ τότε ds=$\left(\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2}\right)\bullet dt$

Άρα αθροίζοντας τα ds καθώς a ≤ t ≤ b έχουμε S=$\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt$

Παράδειγμα: Μήκος σε παραμετρικές εξισώσεις

$c(t):[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$t \to (r\cos t, r\sin t)$ κύκλος κέντρου (0,0) και ακτίνας r



$\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)=r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)=r^2$

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt=\int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$$

Άσκηση 4 &3.2

$c(t):[0,2\pi]\to\Re^3$

$t \to (t, t\sin t, t\cos t)$

Μήκος τόξου ανάμεσα στα σημεία (0,0,0) και (π,0,-π).

Υπολογισμός ταχύτητας και επιτάχυνσης

Μέτρο Ταχύτητας $\text{v}=\dfrac{dS}{dt}=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}=|c'(t)|$

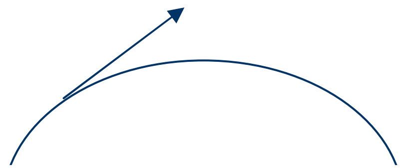
Αν $c(t):U\subseteq\Re\rightarrow\Re^n$ η ταχύτητα $\text{v}=\dfrac{dS}{dt}=\sqrt{\dot{x}_1^2(t)+\ldots+\dot{x}_n^2(t)}=|c'(t)|$

Διάνυσμα ταχύτητας: $c'(t)$

Μέτρο ταχύτητας: $|c'(t)|$

Διάνυσμα επιτάχυνσης: $c''(t)$

Μέτρο Επιτάχυνσης: $|c''(t)|$



Μήκος καμπύλης (διαδρομή) $\text{S}=\int_a^b |c'(t)|dt$

Ασκήσεις

Άσκηση 7 &3.1

$c'(t):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^2$

$t\rightarrow(t,e^t,t^2)$

Υπολογισμός του c(t) αν c(0)=(0,-5,1).

Υπολογισμός ταχύτητας και επιτάχυνσης

Άσκηση 11 &3.1

Ένα σώμα εγκαταλείπει τη τροχιά $s(t)=(t^2, t^3-3t, 0)$ για t=2. Υπολογισμός της θέσης του για t=3.

Άσκηση 6 &3.2

Έστω $\sigma:[a,b]\rightarrow R^3$ με $\sigma'(t)\neq 0\ \forall t$. Εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα της σ(t) : $T(t)=\sigma'(t)/|\sigma'(t)|$

$(a)T(t)\bullet T'(t)=0$

$(b)T'(t)=\ldots$

Άσκηση 2 &3.2

$s(t)=(\cos t, \sin t, t),\ t\geq 0$

Συνάρτηση μήκους=;