ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

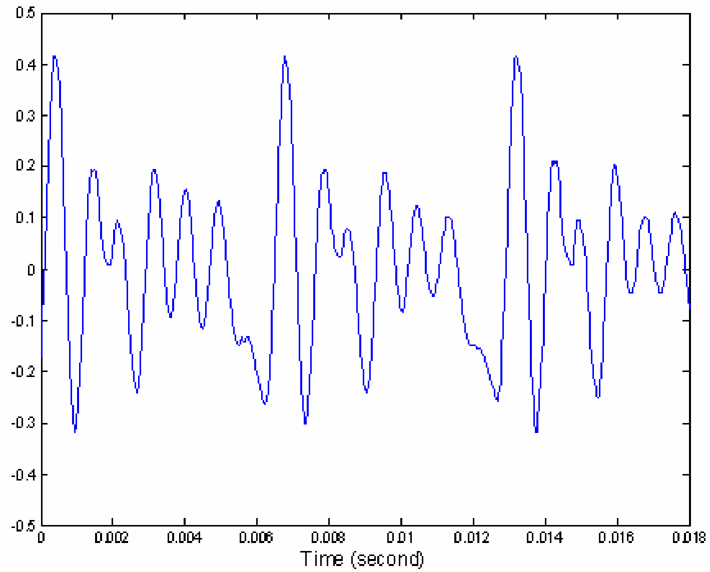
Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

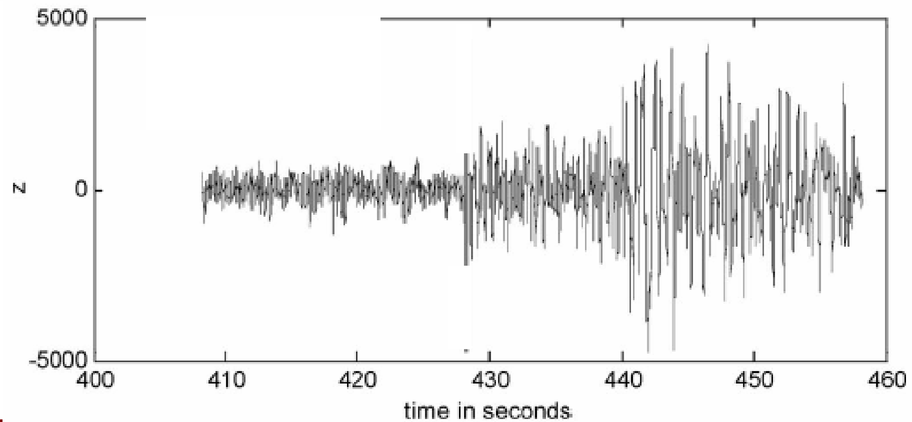
Παραδείγματα (συνεχή/διακριτά)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \to f(t)$$

Καρδιογράφημα

Σήμα φωνής





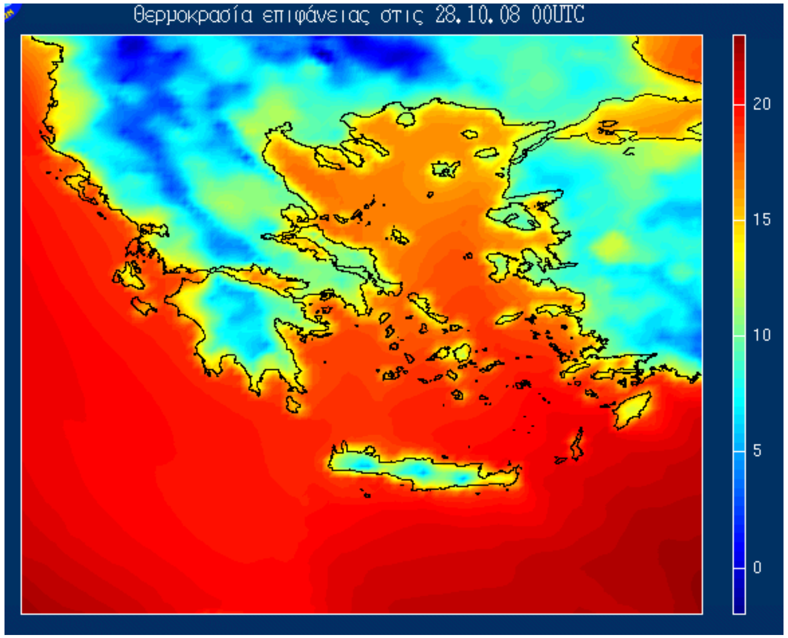
Παραδείγματα

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to f(x, y)$$

Ασπρόμαυρες Εικόνες

Χάρτης Θερμοκρασίας

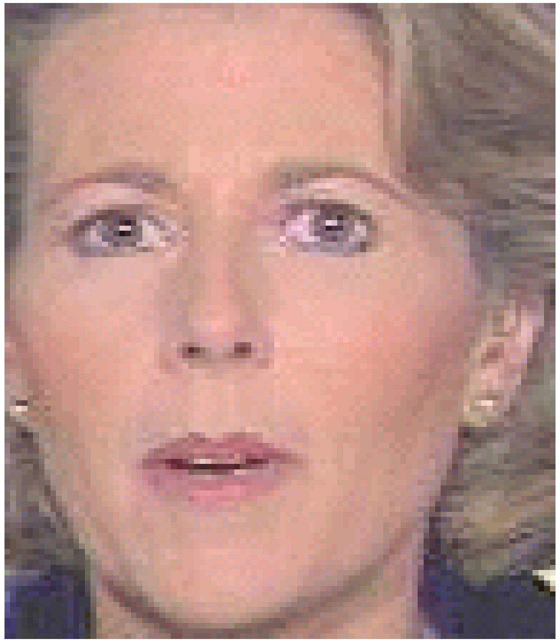


Παραδείγματα

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \to (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$$

Έγχρωμες Εικόνες

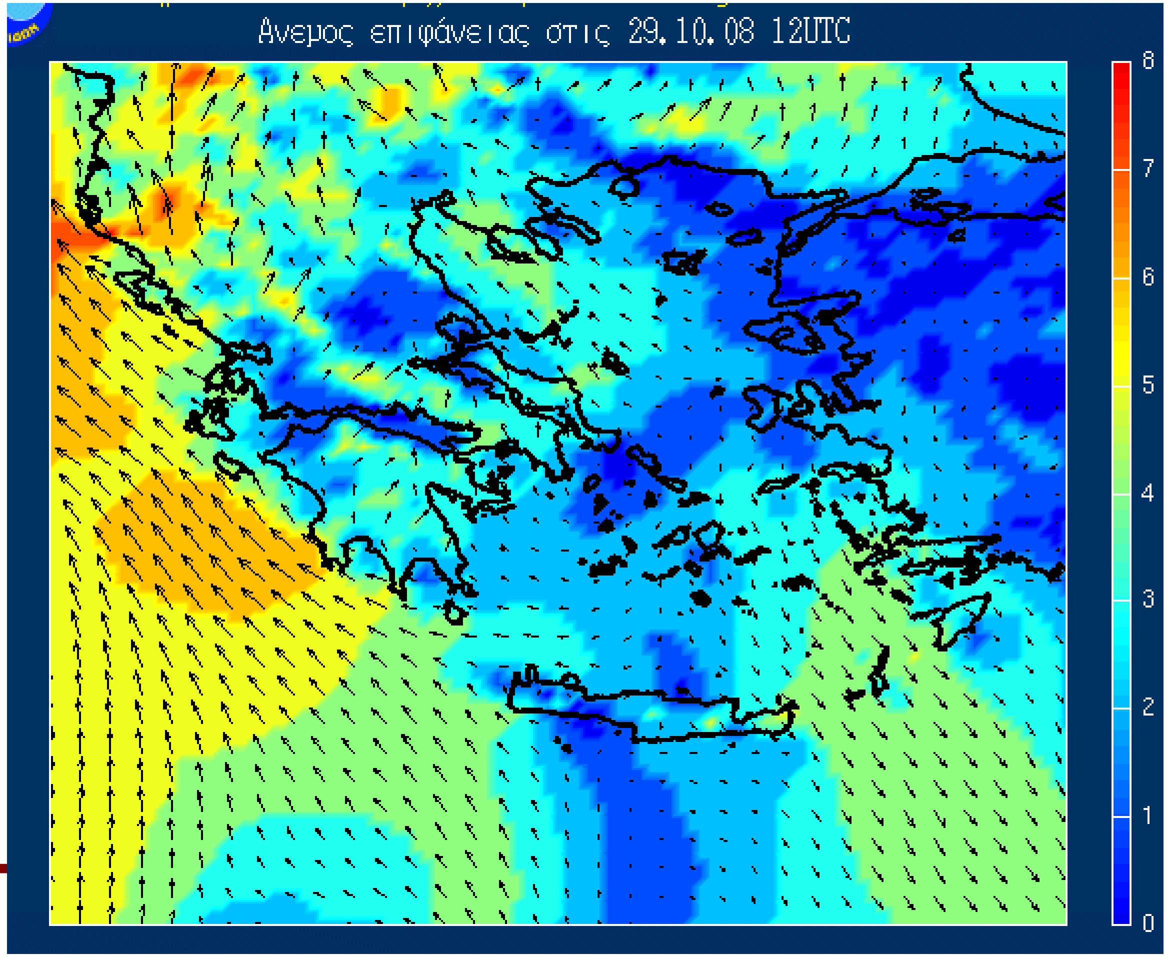


Παραδείγματα

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \to (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

Χάρτης Ανέμου

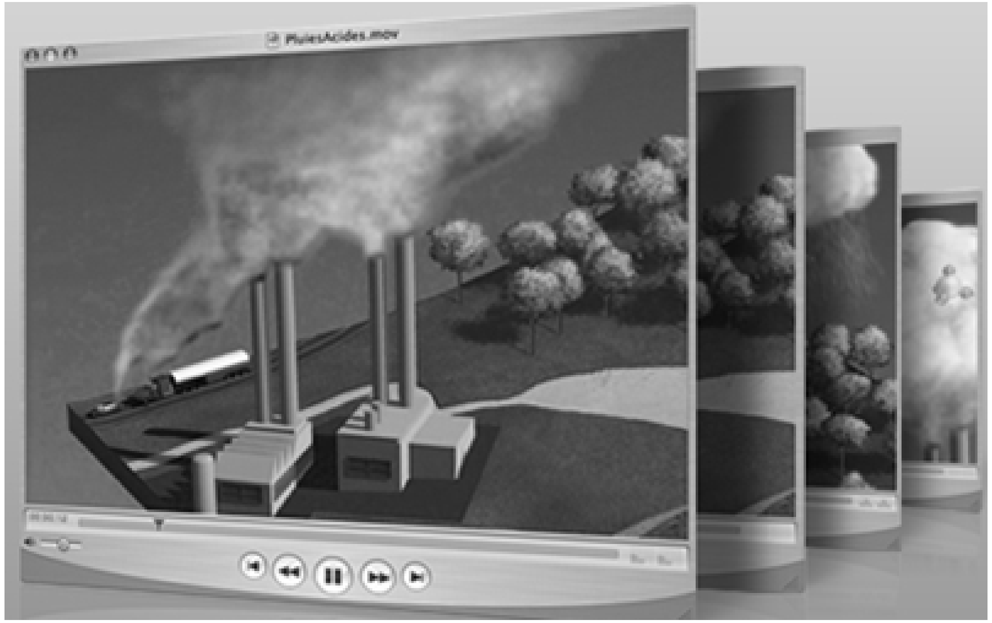


Παραδείγματα

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, t) \rightarrow f(x, y, t)$$

Ασπρόμαυρο Video



Παραδείγματα

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, t) \to (f_r(x, y, t), f_g(x, y, t), f_b(x, y, t))$$

Έγχρωμο Video

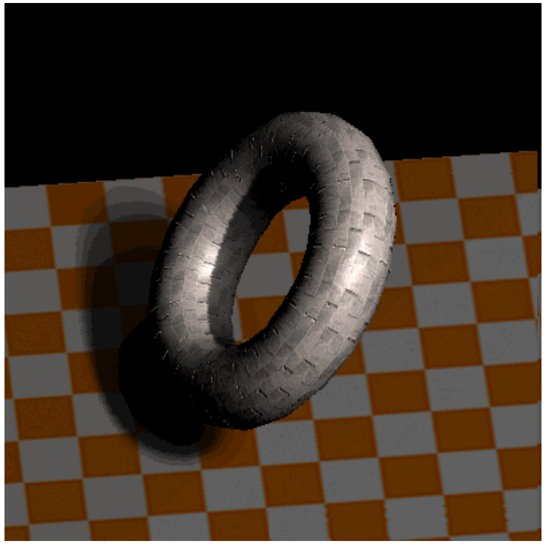
Παραδείγματα

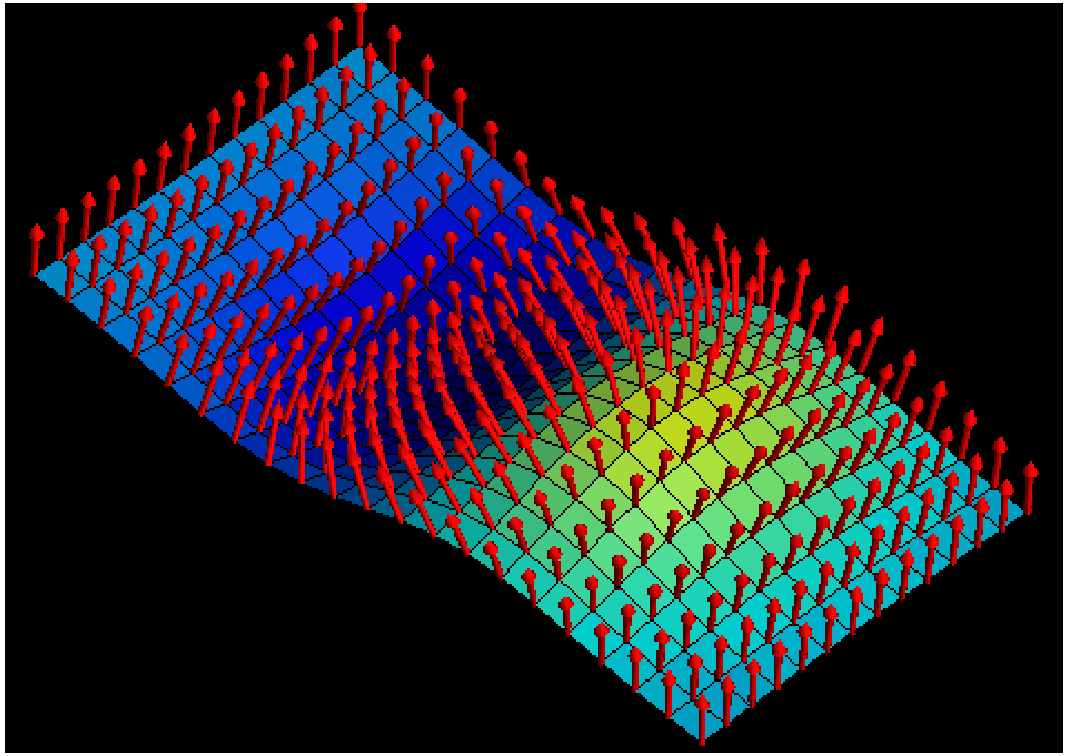
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \to (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

Normal Vectors Map

- Εφαρμογή στη γραφική για την αντανάκλαση του φωτός





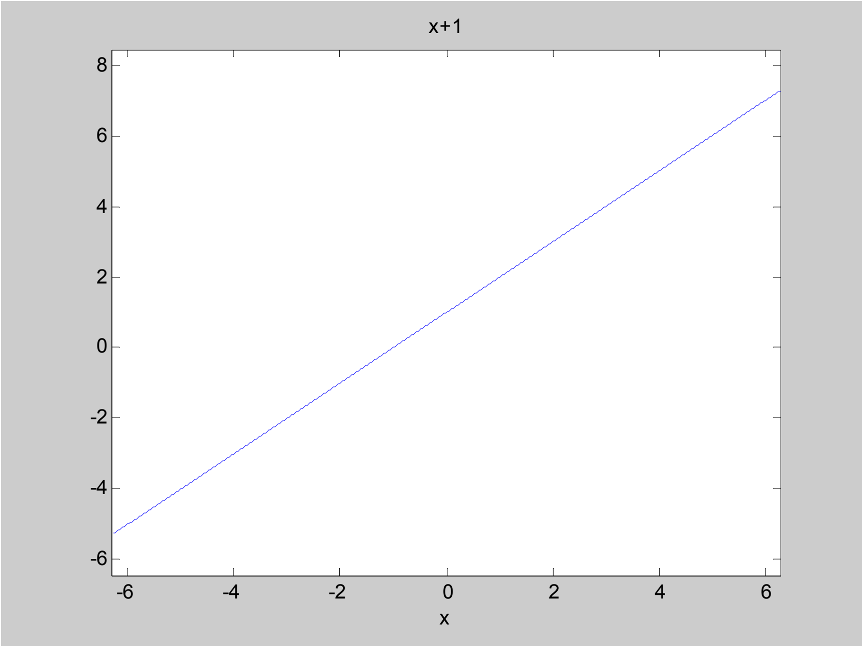
Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

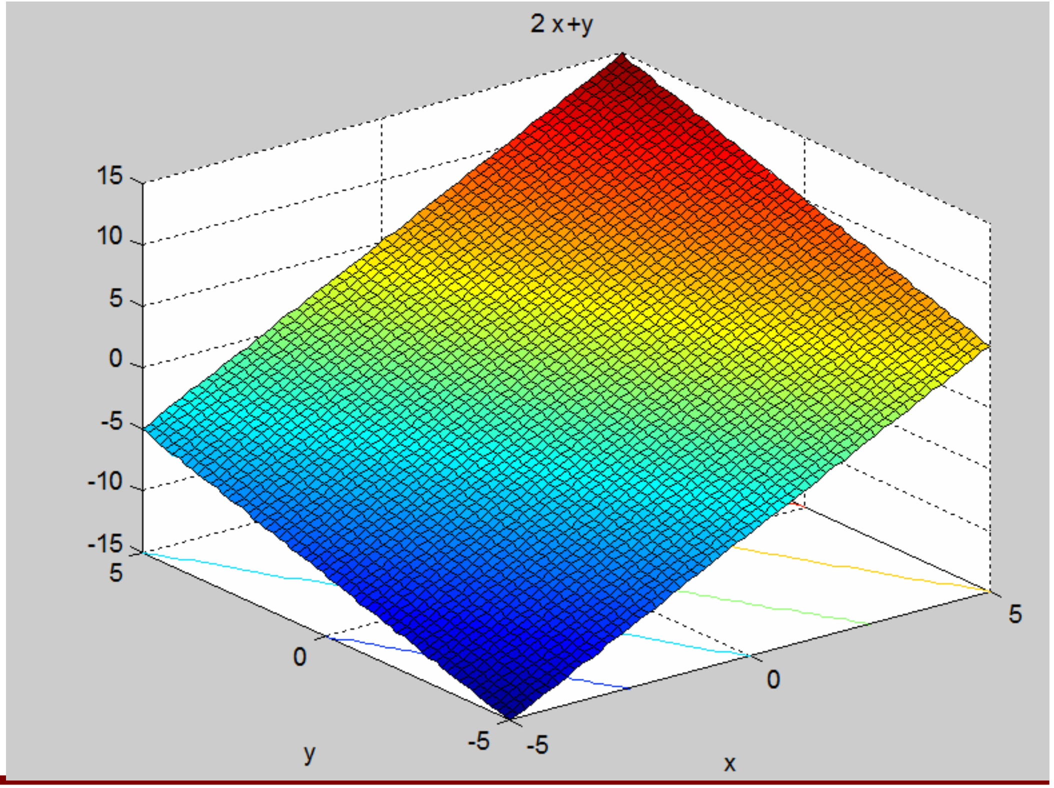
- Σύγκριση 2Δ και 3Δ χώρο

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(x, y) = 2x + y + 1$$

Matlab: ezplot('2*x+1')



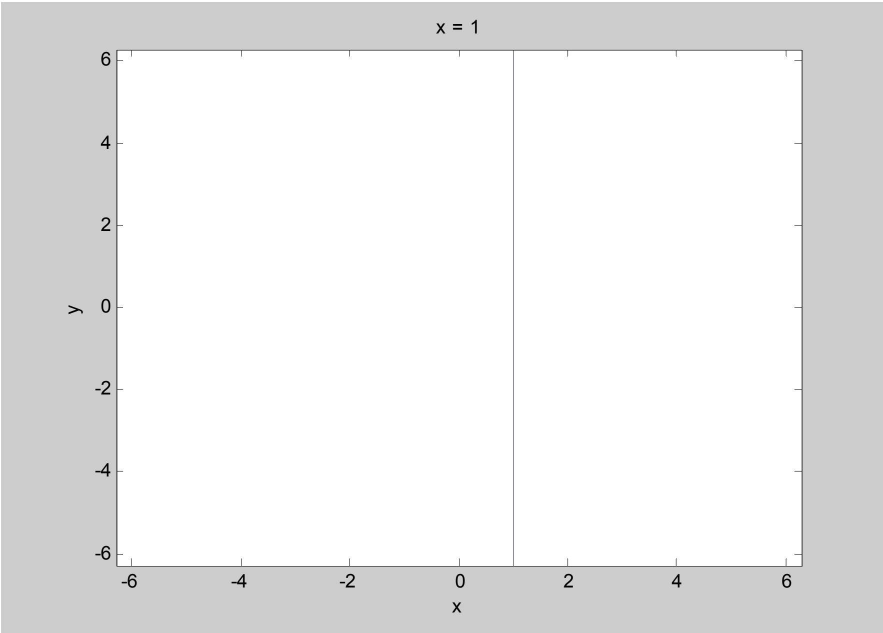


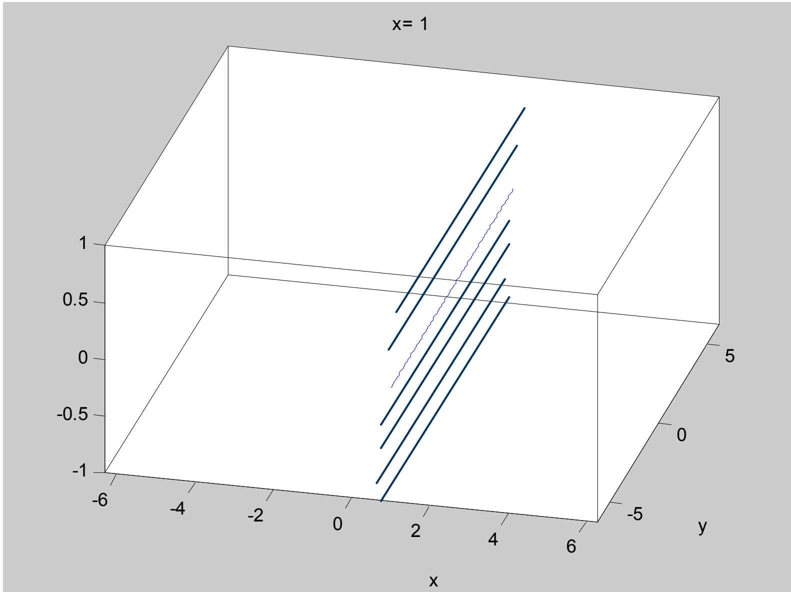
Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

- Σύγκριση 2Δ και 3Δ χώρο

$x = 1$ $x = 1$

ευθεία επίπεδο





Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

- Σύγκριση 2Δ και 3Δ χώρο

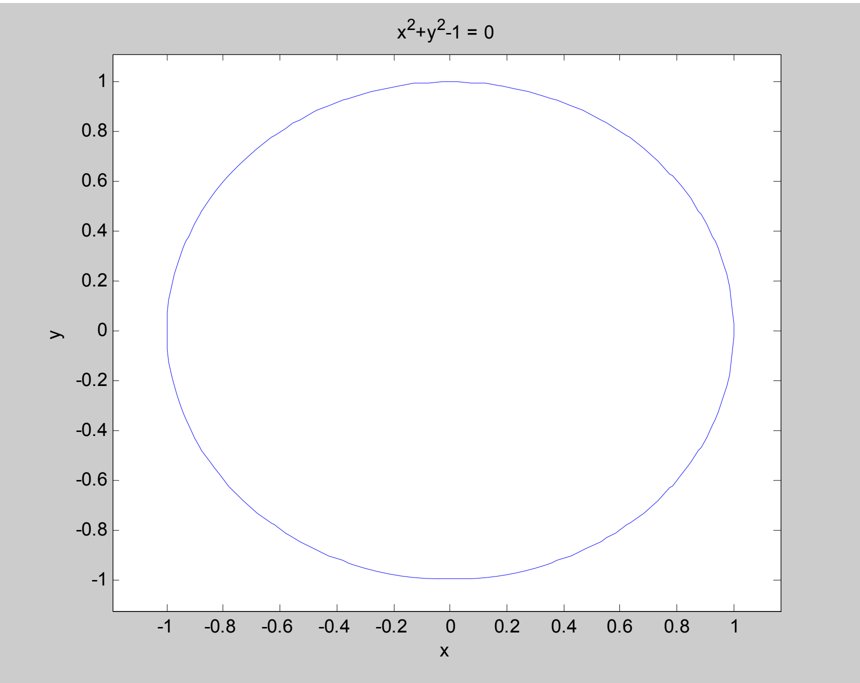
$$x^2 + y^2 = 1$$

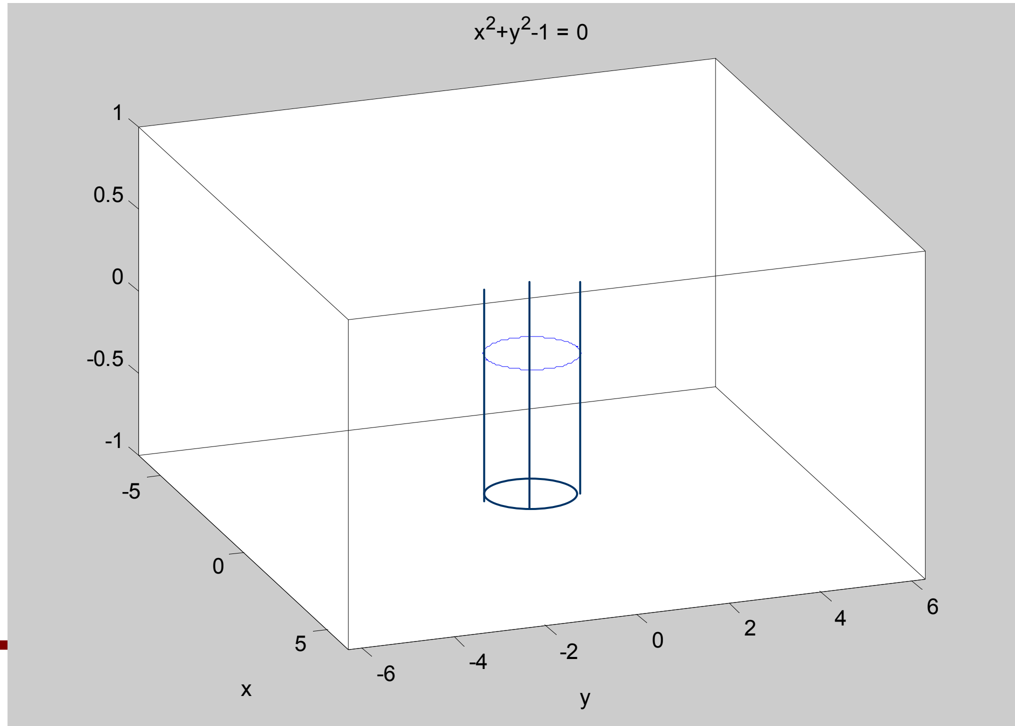
κύκλος

$$x^2 + y^2 = 1$$

κύλινδρος

Matlab: ezplot('x^2+y^2-1')

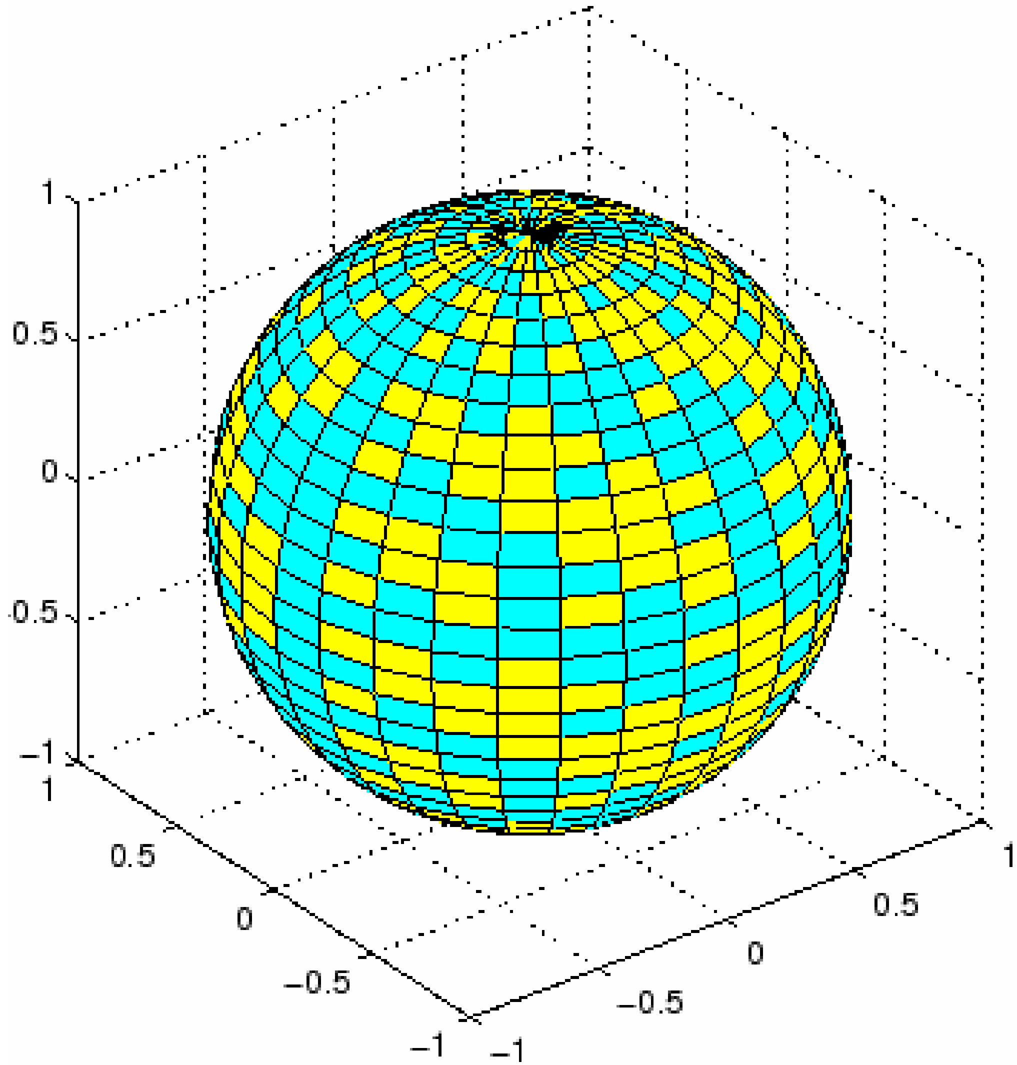




Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Σημεία που απέχουν από το Ο(0,0,0) 1



Συναρτήσεις

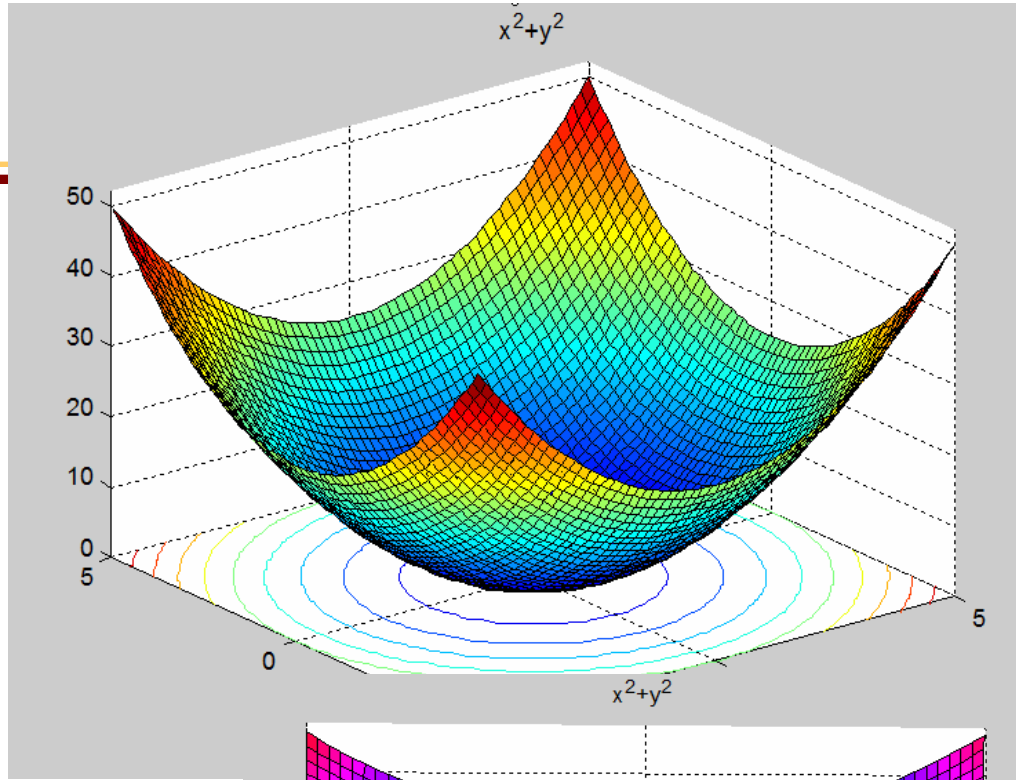
$$z = x^2 + y^2$$

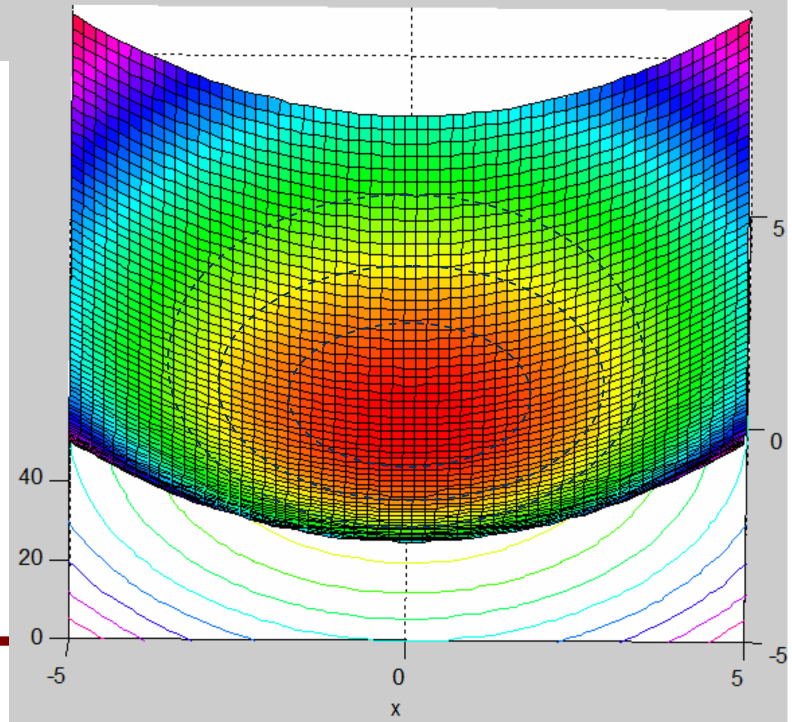
• Για να μελετήσω 3Δ γραφήματα προσπαθώ να κάνω αναγωγή σε 2Δ

•Αν περιοριστώ στο επίπεδο z = c, Βρες τα (x,y) τ.ώ

$$x^2 + y^2 = c$$

•Αν περιοριστώ στο yz επίπεδο (x = 0), Βρες τα (y,z) τ.ώ $z = y^2$





Matlab:
syms x y;
ezsurfc('x^2+y^2',[-5 5],[-5 5]);

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

- Σύγκριση 2Δ και 3Δ χώρο

$$f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x) \longrightarrow f(x)$$

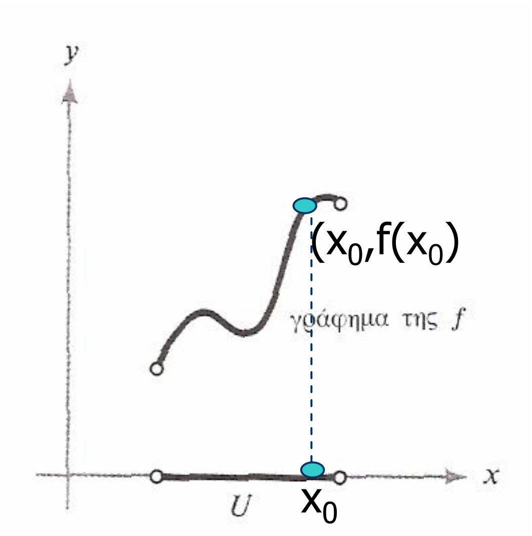
$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

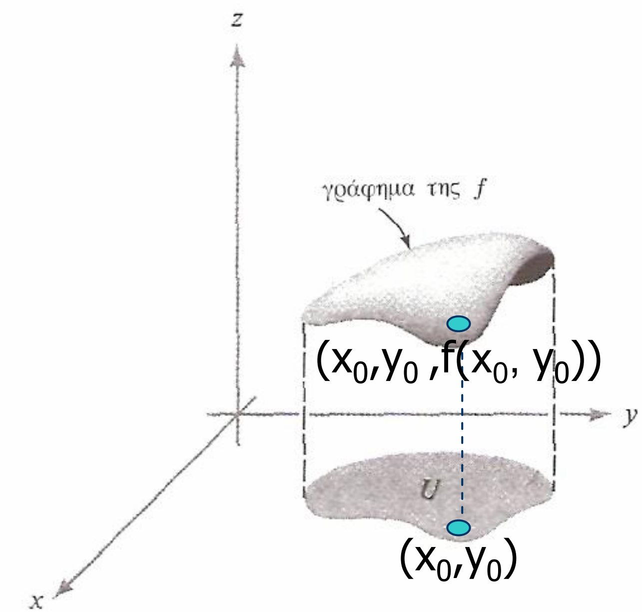
Γράφημα

$$\Gamma = \{(\mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x})) \in \Re^2 \mid \mathrm{x} \in U)\}$$

Γράφημα

$$\Gamma = \{(\mathrm{x,y,f(x,y)}) \in \mathbb{R}^3 | (\mathrm{x,y}) \in U)\}$$

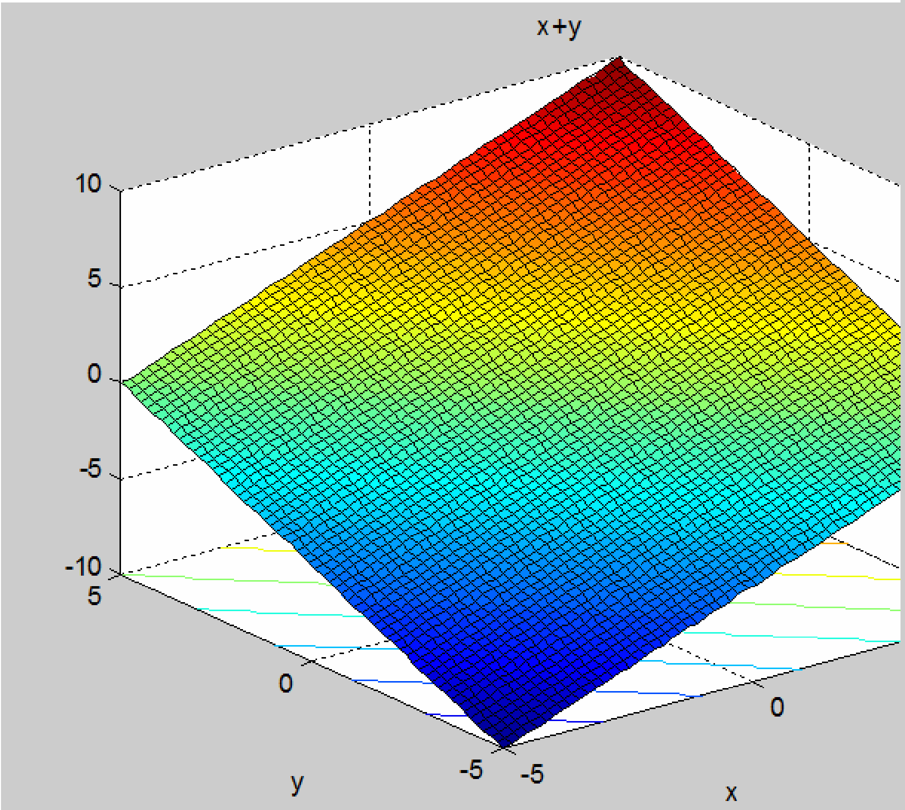


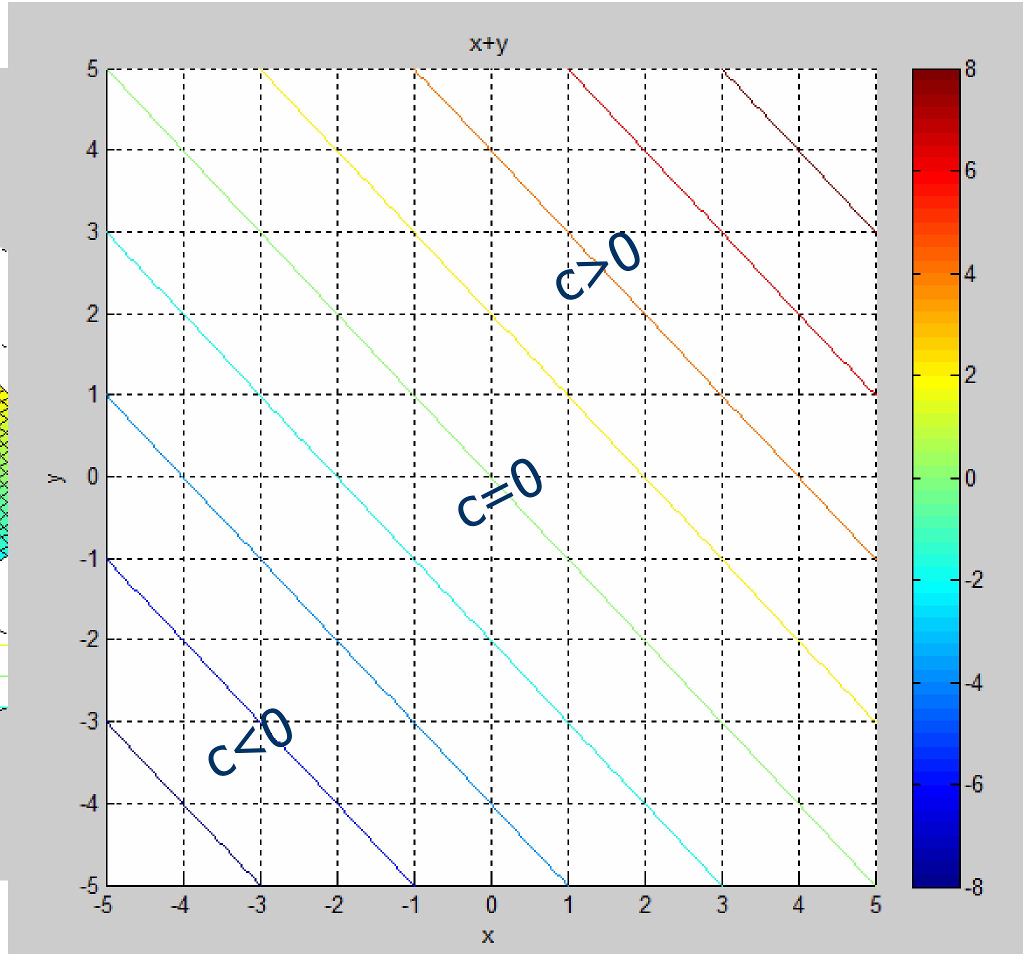


Ισοσταθμικές καμπύλες

- στο xy επίπεδο: Προβολή στο xy επίπεδο της τομής του γραφήματος με τα επίπεδα z = c.

$$z = x + y$$



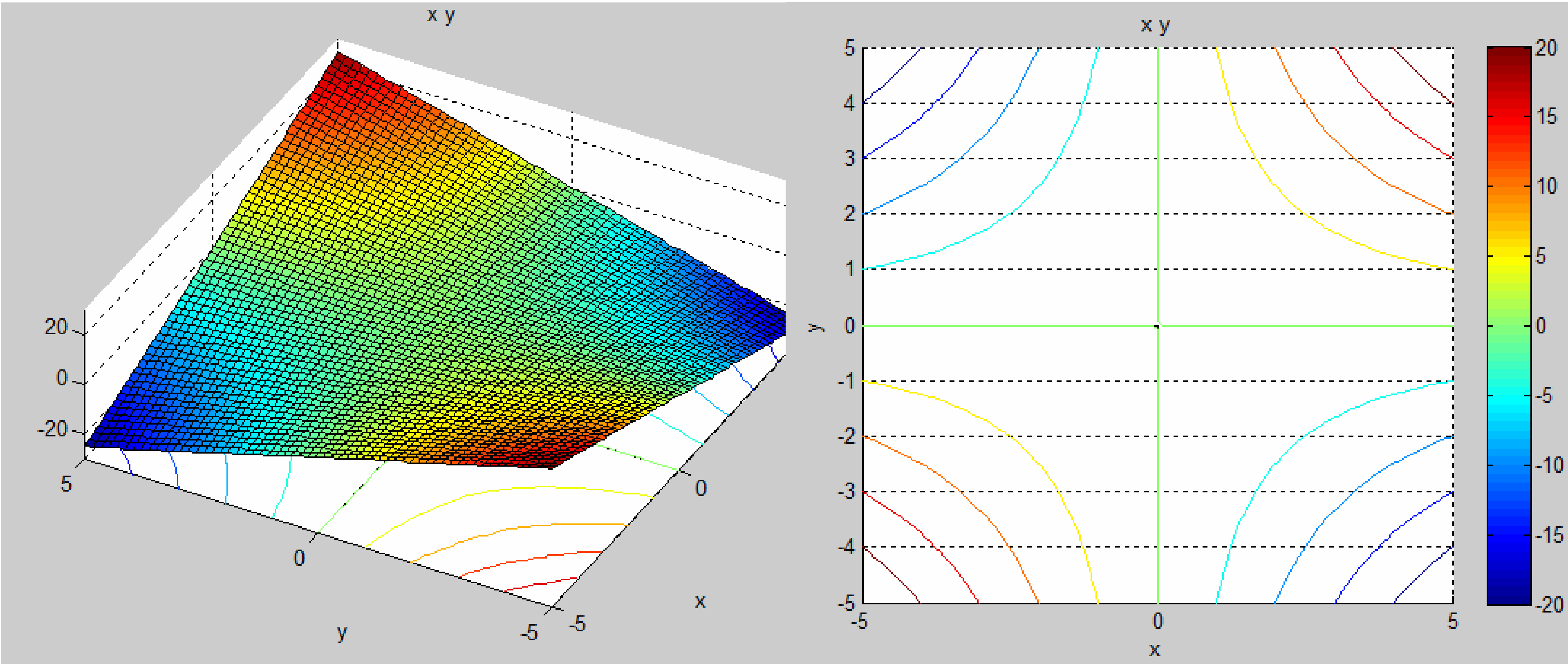


Ισοσταθμικές καμπύλες

- στο xy επίπεδο: Προβολή στο xy επίπεδο της τομής του γραφήματος με τα επίπεδα z = c.

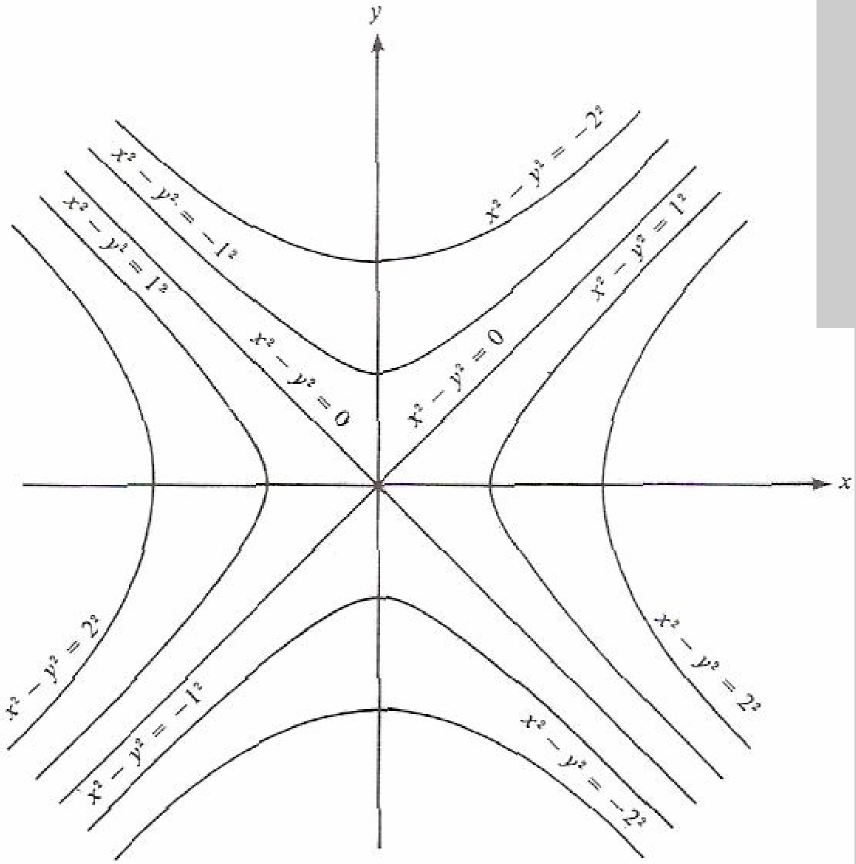
$$z = x \bullet y$$

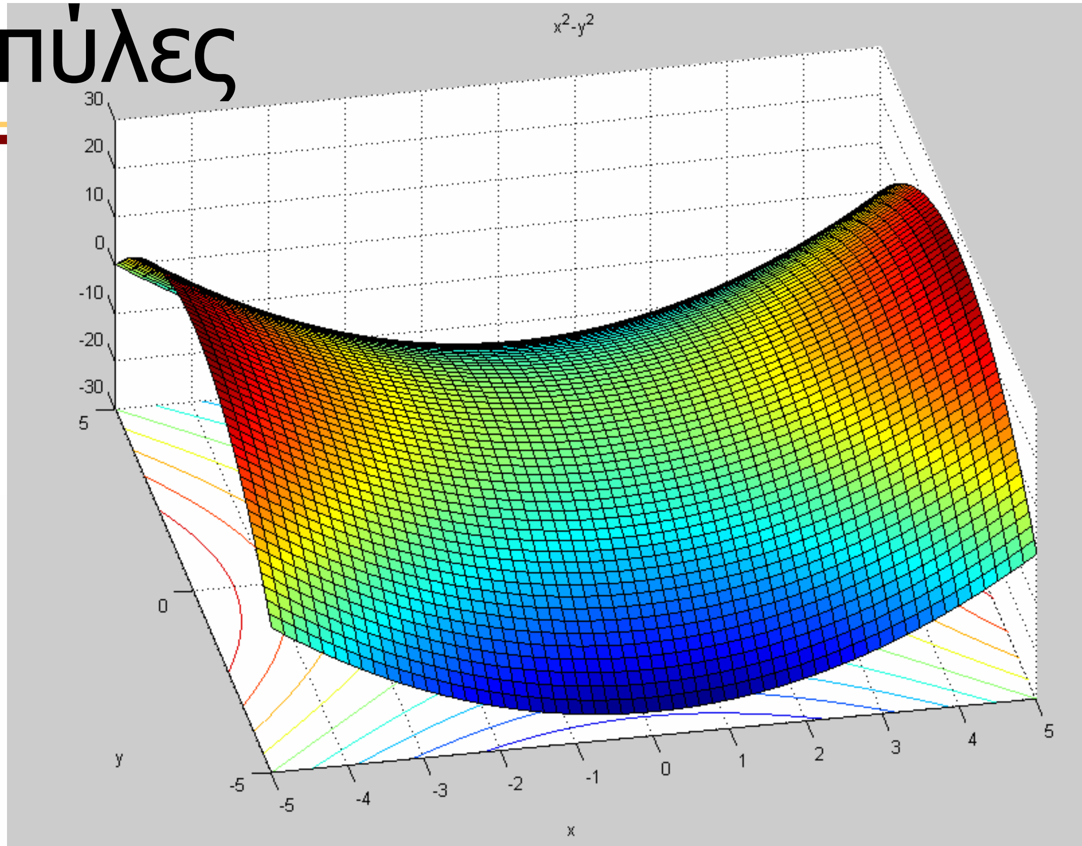
Matlab:ezsurfc('x*y',[-5 5],[-5 5]);

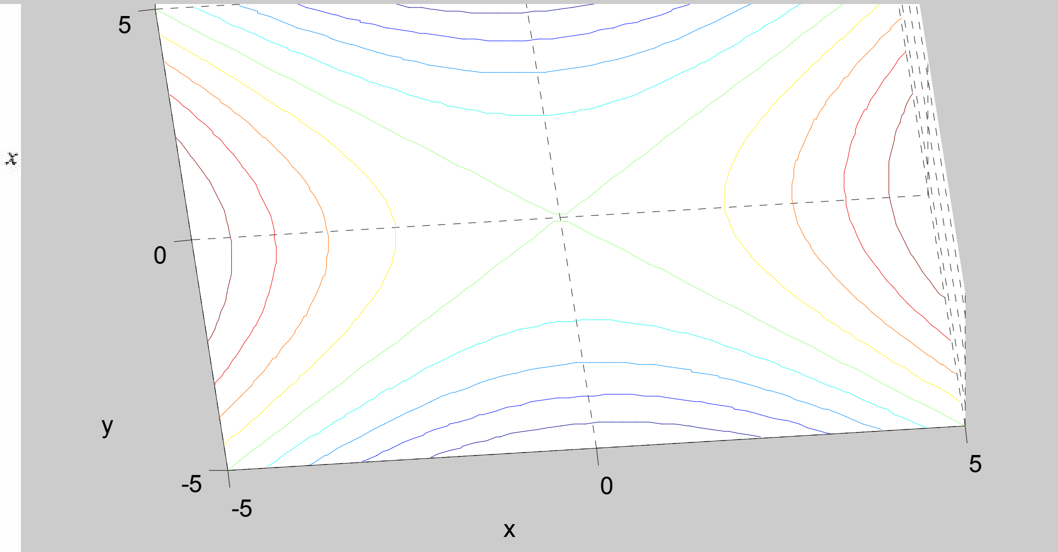


Ισοσταθμικές καμπύλες

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



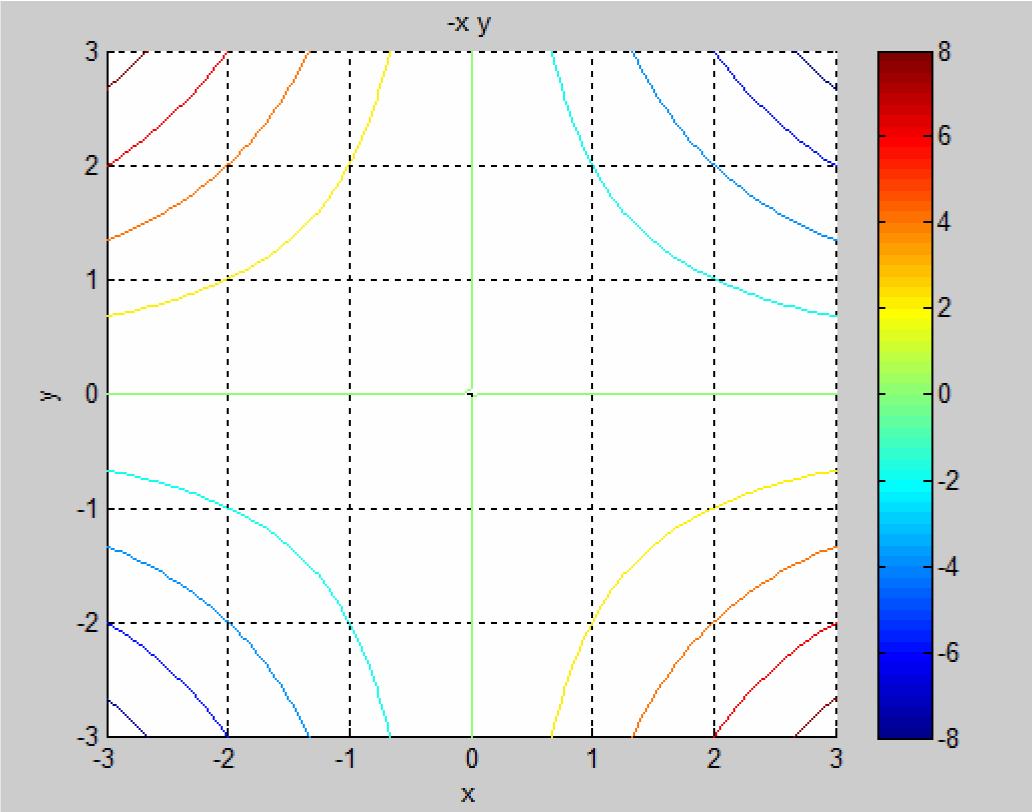




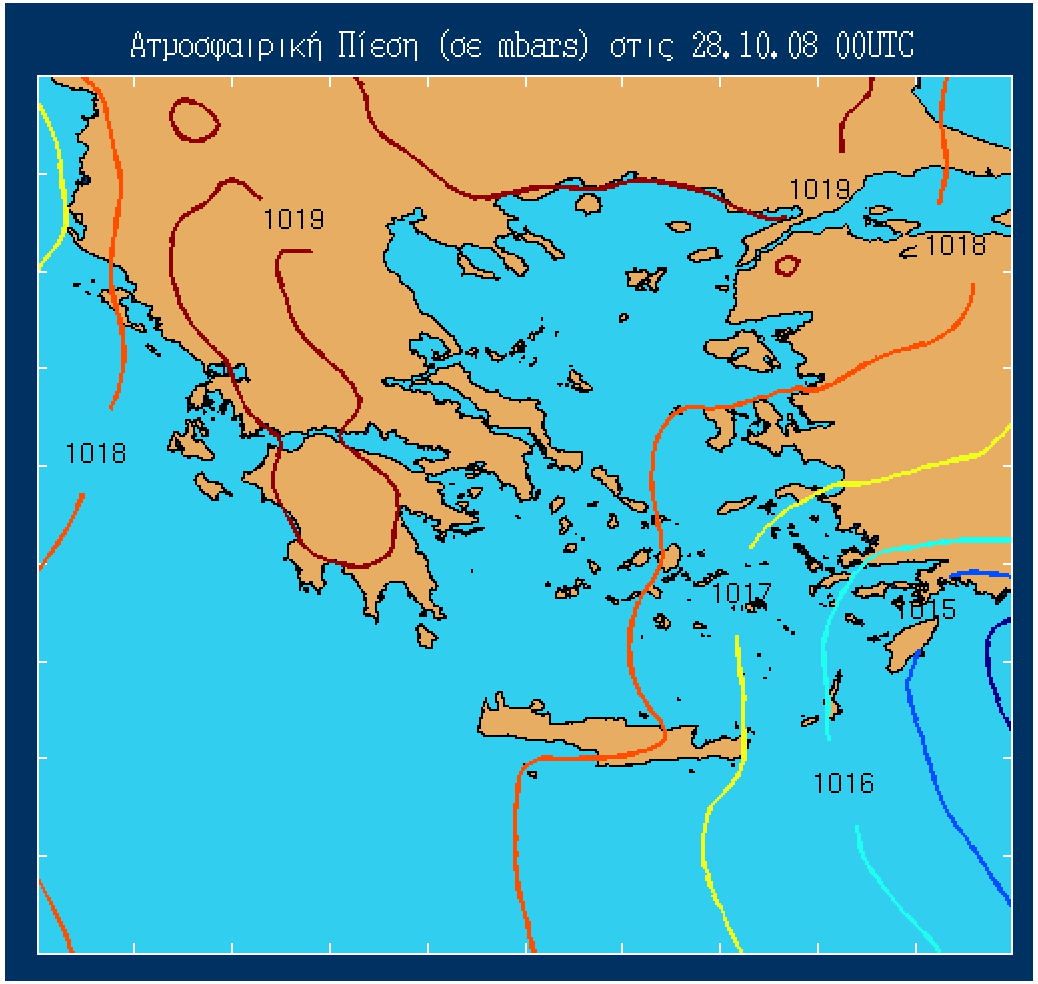
Ισοσταθμικές καμπύλες

$$f(x, y) = -xy$$

$$z = 1 => y = -1/x$$



Ισοσταθμικές καμπύλες - Παράδειγμα



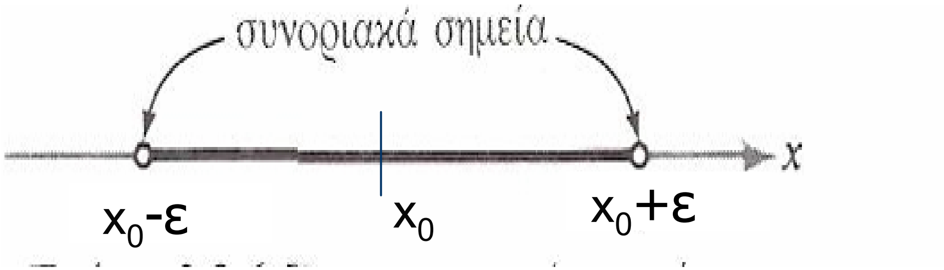
ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Όρια

Γειτονιά στο IR

- Βασική γειτονιά του x_0: Συμμετρικό διάστημα (ανοικτό ως προς x_0) ακτίνας $\varepsilon > 0$.

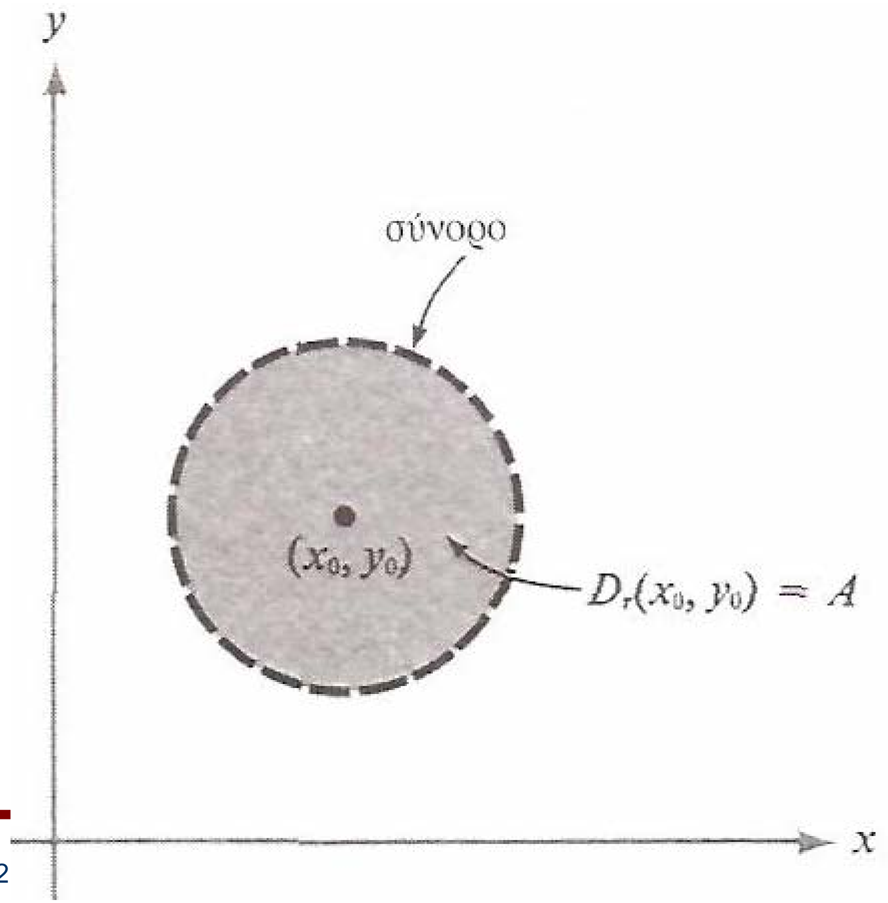
$$\Delta(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$



Γειτονιά στο IR^2

- Βασική γειτονιά του (x_0,y_0) : Ανοικτός Δίσκος με κέντρο (x_0,y_0) και ακτίνα $\varepsilon > 0$.

$$\Delta((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$



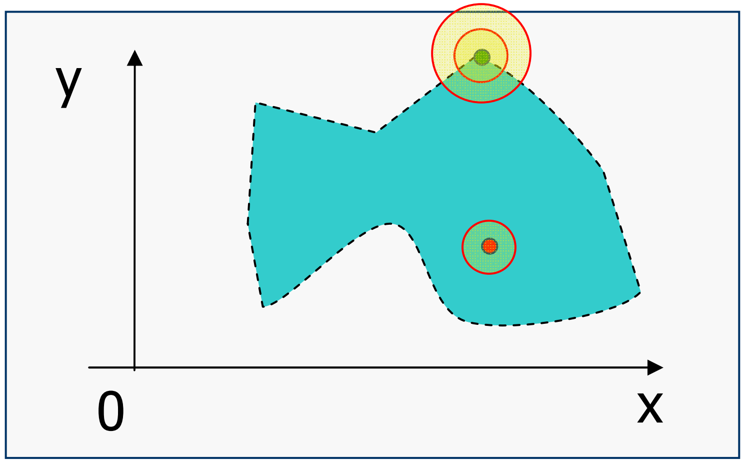
Σύνορο

- Στο IR^2 το $(x_0,y_0)\epsilon U$ θα λέγεται εσωτερικό σημείο αν υπάρχει βασική γειτονιά $\Delta((x_0,y_0), \varepsilon)$ υποσύνολο του U

$$\Delta((x_0, y_0), \varepsilon) \cap U = \Delta((x_0, y_0), \varepsilon)$$

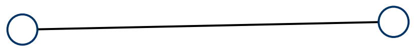
- Στο IR^2 το $(x_0,y_0)\epsilon U$ θα λέγεται συνοριακό του U για οποιαδήποτε γειτονιά $\Delta((x_0,y_0), \varepsilon)$ θα έχουμε

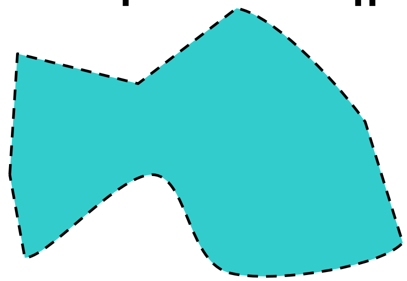
$$\Delta((x_0, y_0), \varepsilon) \cap U \neq \varnothing \quad \text{και} \quad \Delta((x_0, y_0), \varepsilon) \cap U^c \neq \varnothing$$



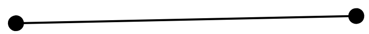
Γειτονιά στο IR^2

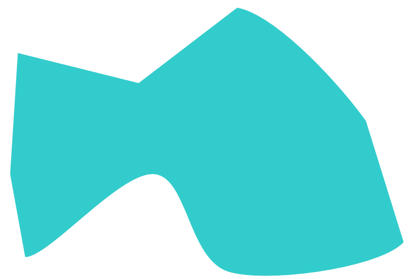
- Σύνορο του U είναι το σύνολο των συνοριακών σημείων του U
- Ένα σύνορο θα το λέμε ανοικτό αν κάθε σημείο του είναι ανοικτό ⇔ το σύνορο δε τέμνει το U ⇔ τα συνοριακά σημεία του δεν ανήκουν στο U.





- Ο ορισμός του κλειστού είναι αντίστοιχος





- $IR^n = \{(a_1,\ldots,a_n) \mid a_i \in IR\}$

Βασική γειτονιά του $(a_1,\ldots,a_n) \in IR^n$, $a_i \in IR$

$$\Delta((a_1,\ldots,a_n),\varepsilon) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \Re^n \mid (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < \varepsilon^2\}$$

Όρια Συναρτήσεων με μία μεταβλητή

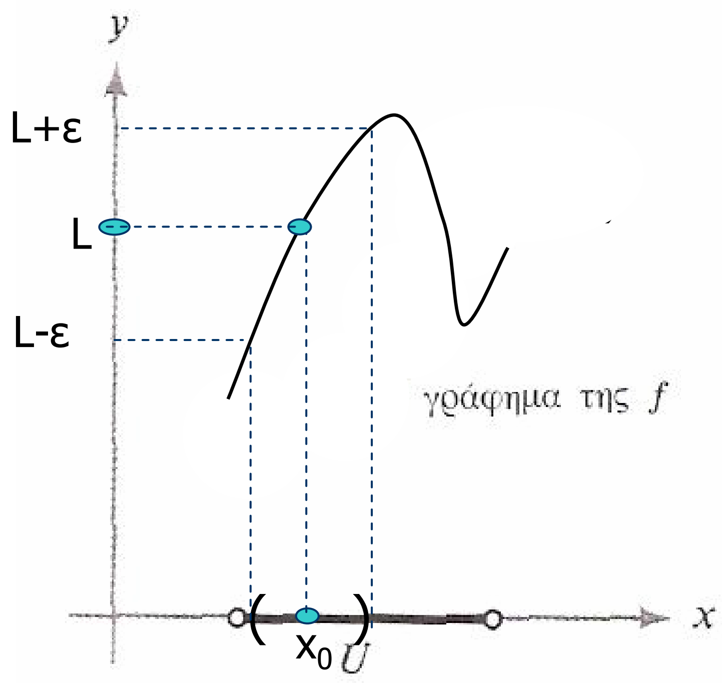
$$f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x) \longrightarrow f(x)$$

$$\lim_{x->x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$$

- Για κάθε ε >0 (δοσμένο), υπάρχει δ> 0 τ.ώ. για κάθε x, $|x-x_0| < \delta$ και $x \neq x_0$ το $|f(x)-L| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow$$

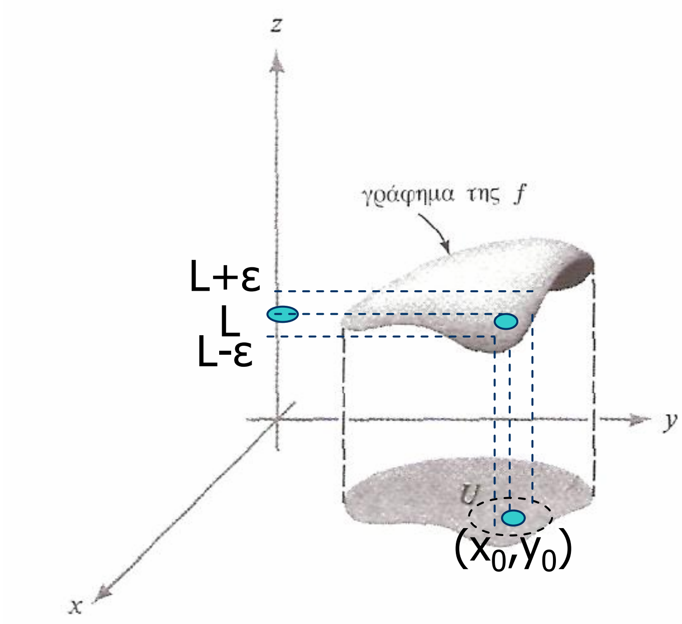
- Για κάθε Δ(L,ε) υπάρχει δ>0 τ.ώ. για κάθε x ϵ $\Delta(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$ το f(x) ϵ Δ(L,ε)



Όρια Συναρτήσεων δύο μεταβλητών

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow$$



- Για κάθε ε >0 (δοσμένο), υπάρχει δ> 0 τ.ώ. για κάθε (x,y), $|x-x_0|^2+ |y-y_0|^2 < \delta^2$ και $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ το $|f(x,y)-L| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow$$

- Για κάθε Δ(L,ε) υπάρχει δ > 0 τ.ώ. για κάθε (x,y) ∈ $\Delta((x_0, y_0),\delta)\setminus\{(x_0, y_0)\}$ το f(x,y) ∈ Δ(L,ε)

Ιδιότητες Ορίων

$$\lim_{(x,y)->(x_0,y_0)} f(x,y)+g(x,y)=\lim_{(x,y)->(x_0,y_0)} f(x,y)+\lim_{(x,y)->(x_0,y_0)} g(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)->(x_0,y_0)} f(x,y)\bullet g(x,y)=\lim_{(x,y)->(x_0,y_0)} f(x,y)\bullet\lim_{(x,y)->(x_0,y_0)} g(x,y)$$

- Παράδειγμα

$$\lim_{(x,y)->(1,2)}(x^2+3y^2)=1^2+3\cdot 2^2=13$$

$$\lim_{(x,y)->(1,1)}\frac{x^2-y^2}{x-y}=\lim_{(x,y)->(1,1)}(x+y)=1+1=2$$

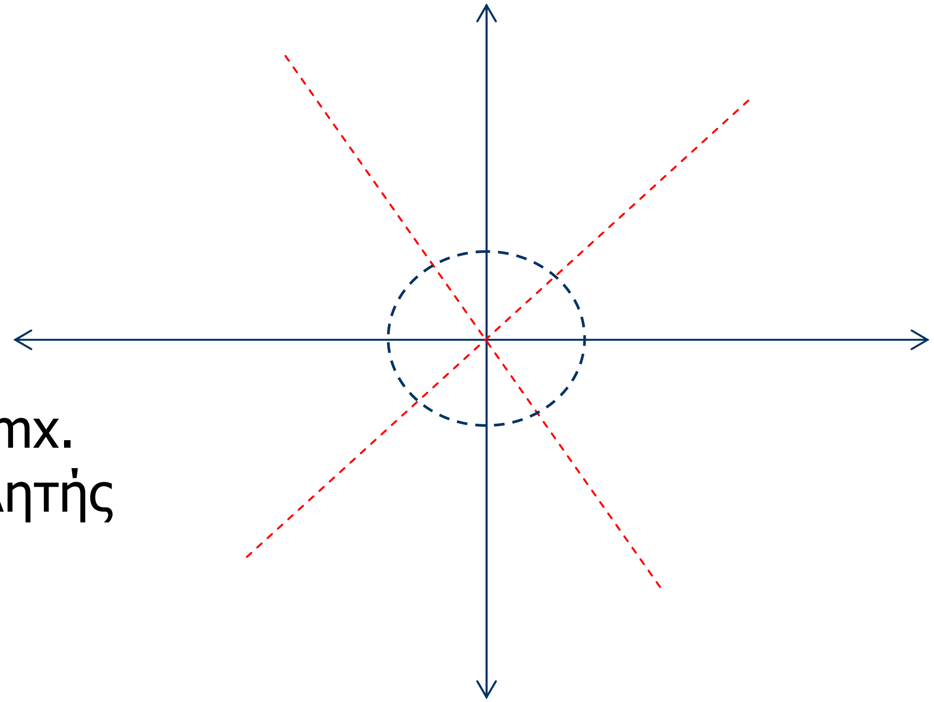
$$\lim_{(x,y)->(0,0)} e^y\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1$$

$$\lim_{(x,y)->(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2+2}=\frac{0}{2}=0$$

Παραδείγματα Ορίων

$$f(x,y) = y/x, x \neq 0$$

$$\lim_{(x,y)->(0,0)} f(x,y)$$



Περιορίζω τη συνάρτηση στις ευθείες y=mx.
Οπότε η f γίνεται συνάρτηση μίας μεταβλητής

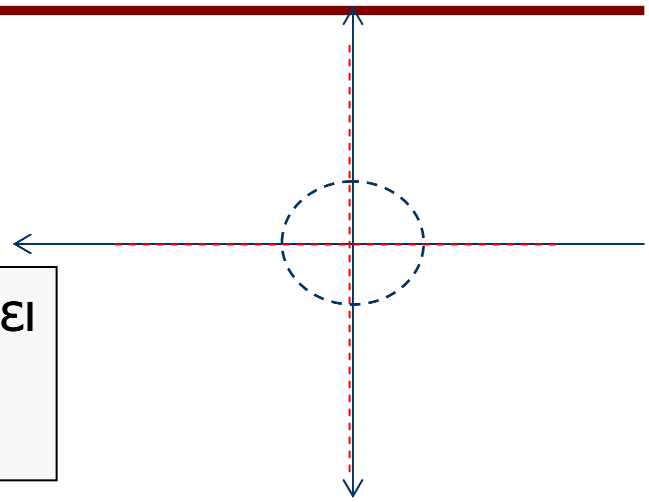
$$f_m(x) = f(x,mx) = \frac{mx}{x} = m$$

$$\lim_{(x,y)->(0,0)} f(x,y) = L;$$

Δεν ισχύει. Πάρε m≠ L. Τότε σε οποιοδήποτε δίσκο Δ((0,0),δ) η συνάρτηση παίρνει τιμή m.

Παραδείγματα Ορίων

$$f(x,y)=\frac{\cos x-1-x^2/2}{x^4+y^4} \qquad \lim_{(x,y)->(0,0)} f(x,y)$$



Μεθοδολογία: Για να δείξω πως ένα όριο δεν υπάρχει πλησιάζω με 2 διαφ. τρόπους και βρίσκω 2 διαφ. αποτελέσματα.

Για y = 0 και x ≠ 0

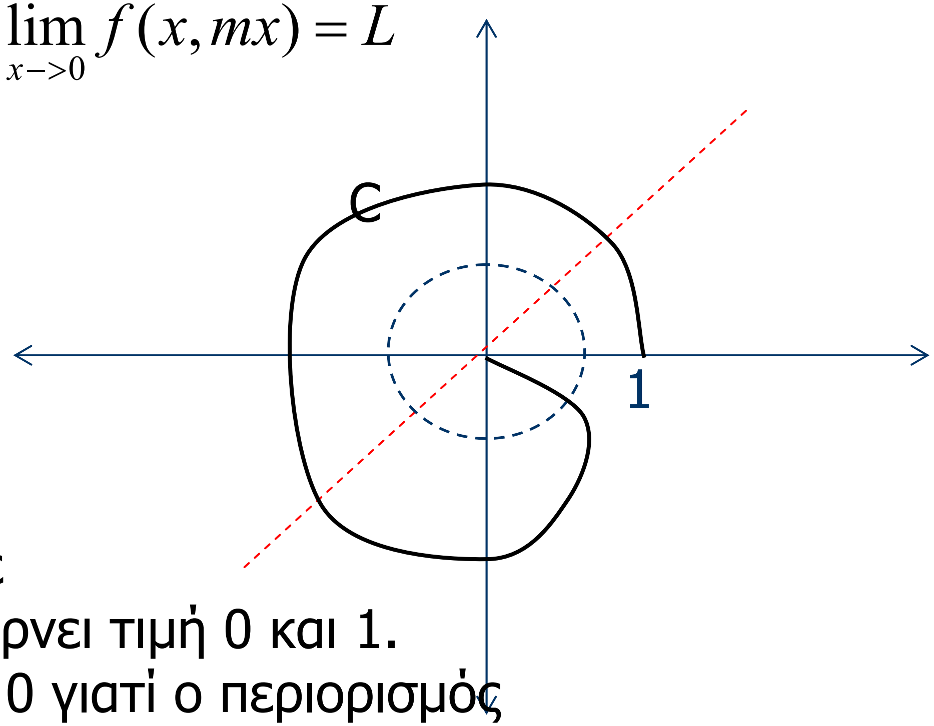
$$\lim_{x->0} f_1(x)=\lim_{x->0}\frac{\cos x-1-x^2/2}{x^4} \overset{0/0(L'Hospital)}{=} \lim_{x->0}\frac{-\sin x-x}{4x^3} \overset{0/0(L'Hospital)}{=} \lim_{x->0}\frac{-\cos x-1}{12x^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

Για x = 0 και y ≠ 0

$$\lim_{y->0} f_2(y)=\lim_{y->0}\frac{0}{y^4}=0$$

Παραδείγματα Ορίων

Πρόταση: Αν $\lim_{(x,y)->(0,0)} f(x,y) = L \Rightarrow \lim_{x->0} f(x,mx) = L$



Αντίστροφο ισχύει;; ΟΧΙ

Αντιπαράδειγμα

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, (x,y) \in C \\ 0, (x,y) \notin C \end{cases}$$

Το όριο δεν υπάρχει γιατί σε οποιαδήποτε
μικρή γειτονιά του (0,0) η συνάρτηση παίρνει τιμή 0 και 1.
Ο περιορισμός της f στην y=mx έχει όριο 0 γιατί ο περιορισμός
της f στη γειτονιά του 0 είναι 0.

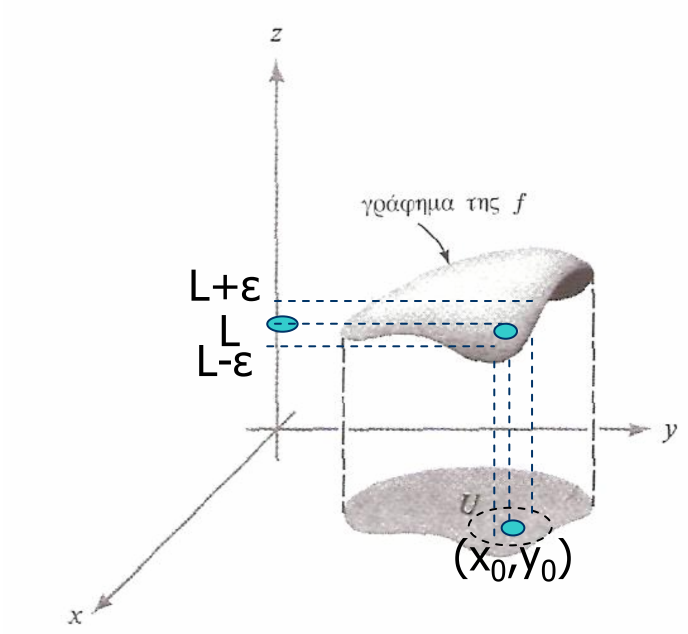
Συνέχεια

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

Ορισμός: Η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0) αν

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Το γράφημα είναι συνεχές.



ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μερικές Παράγωγοι

Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

- Γεωμετρικός ορισμός: Η κλίση της εφαπτόμενης στο σημείο $(x_0,f(x_0))$.
- Εξίσωση εφαπτόμενης

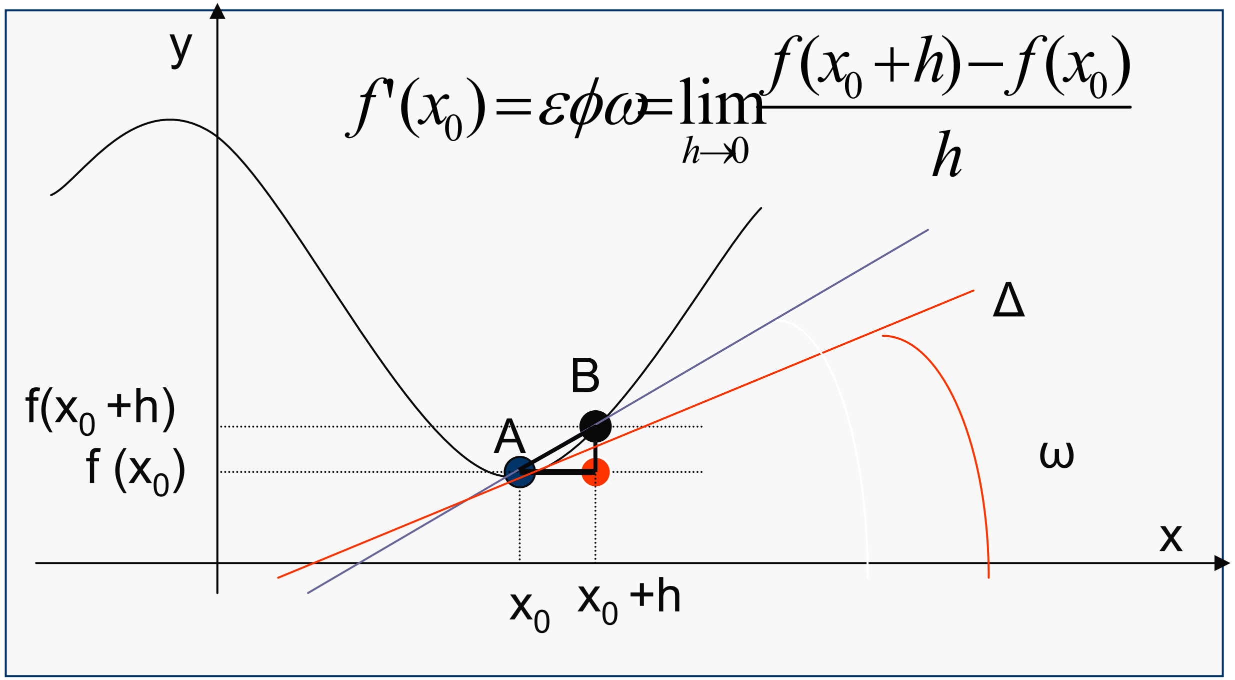
$$y - f(x_0) = f'(x_0) \bullet (x - x_0)$$

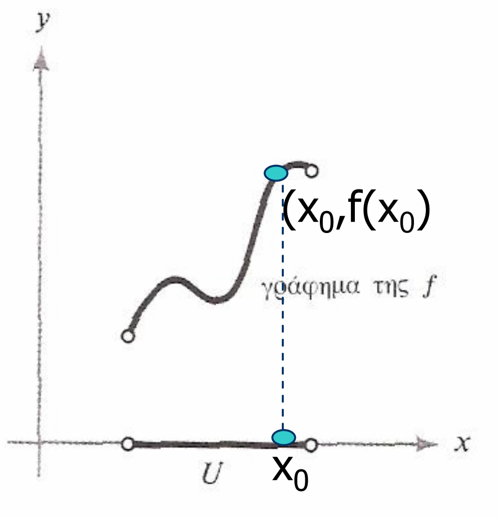
$$f: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x) \longrightarrow f(x)$$

$$f': \overline{U} \subseteq U \to \mathbb{R}$$
$$(x) \longrightarrow f'(x)$$

Όσο το Β πλησιάζει το Α δηλαδή το h μικραίνει ($h \to 0$) η ΑΒ τείνει να συμπέσει με την ΑΔ. Η οριακή θέση που παίρνει η ΑΒ είναι η εφαπτομένη της F στο x_0, και έχει συντελεστή διεύθυνσης :

$$f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$





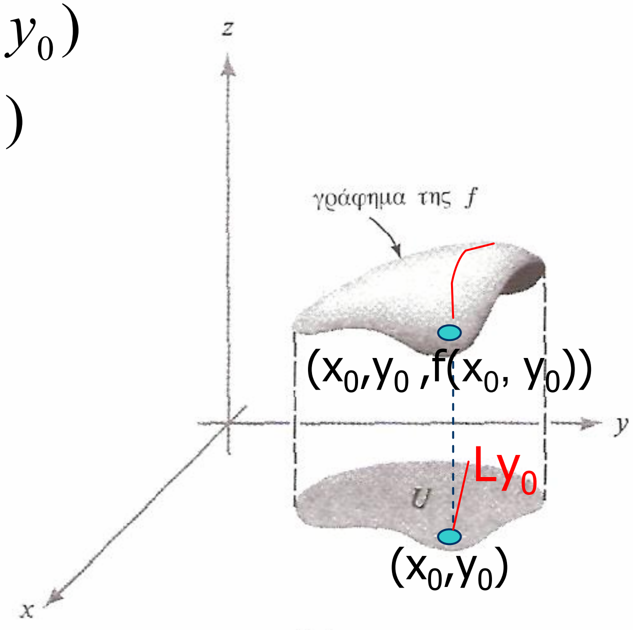
Η οποία υποδηλώνει και τον ρυθμό (το πόσο αργά η γρήγορα) , με τον οποίο μεταβάλλονται οι τιμές της f όταν το $x \to x_0$.

Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

$$P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$
$$P = (x, y_0, f(x, y_0))$$

$$f : \bar{U} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y_0) \longrightarrow f(x, y_0)$$



- Στην Ly_0 υπολογίζω την $f'(x,y_0)$.Αυτό μπορώ να το κάνω για κάθε $y=y_0$.
- Συμβολίζω $\frac{\partial f}{\partial x}$ ή f_x τη μερική παράγωγο της ως προς x.
- Θεωρώ την f ως συνάρτηση του x μόνο (δηλ. θεωρώ το y σταθερά) και παραγωγίζω ως προς x.

Παραδείγματα

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$$

$$f(x,y) = xy + y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 0 = y$$

$$f(x,y) = e^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = (xy)' e^{xy} = y e^{xy}$$

Μερικές Παράγωγοι

Γενικά οι $\frac{\partial f}{\partial x}, f_x$ θα είναι συναρτήσεις των x,y.

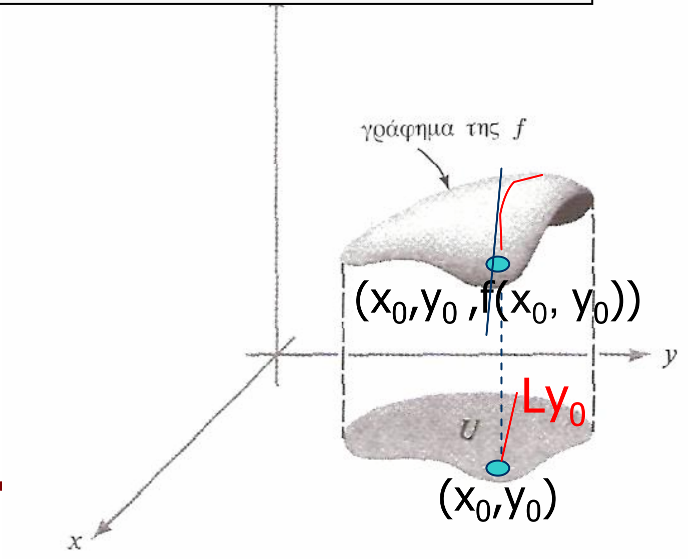
Η τιμή $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), f_x(x_0, y_0)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης f(x,y_0) στο σημείο $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Τα ίδια ακριβώς αντίστοιχα ισχύουν και για τις συναρτήσεις 2 μεταβλητών $\frac{\partial f}{\partial y}, f_y$

$$f(x,y) = e^{xy}$$

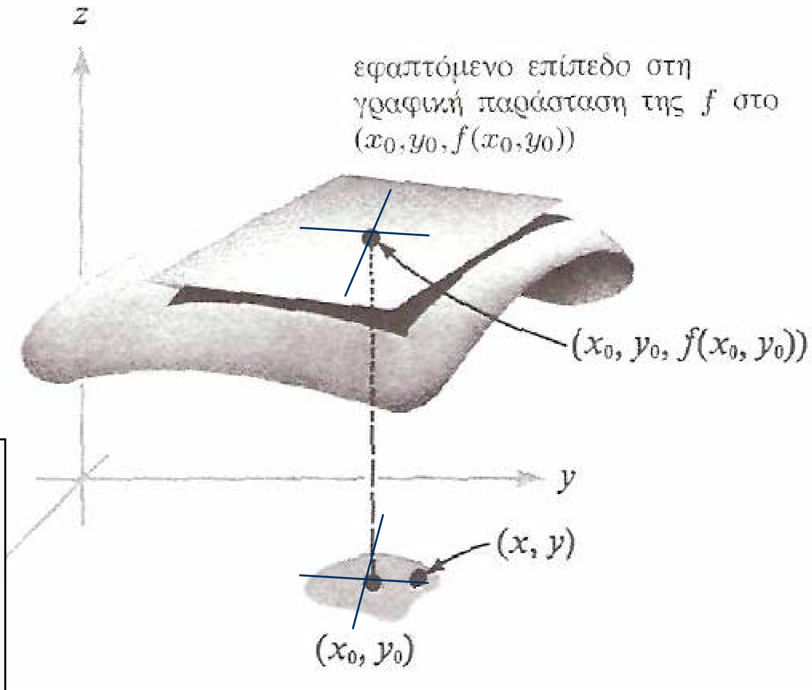
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = e$$



Εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f(x,y) στο P_0

Το επίπεδο που ορίζεται από τις 2 εφαπτόμενες ευθείες ε_x, ε_y στις $f(x,y_0)$, $f(x_0,y)$ στο P_0. Περνάει από το σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.



Διάνυσμα // στην ε_x : $< 1,0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) >$

Διάνυσμα // στην ε_y : $< 0,1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) >$

Διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο: $\vec{n} =< 1,0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) > \times < 0,1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) >=$

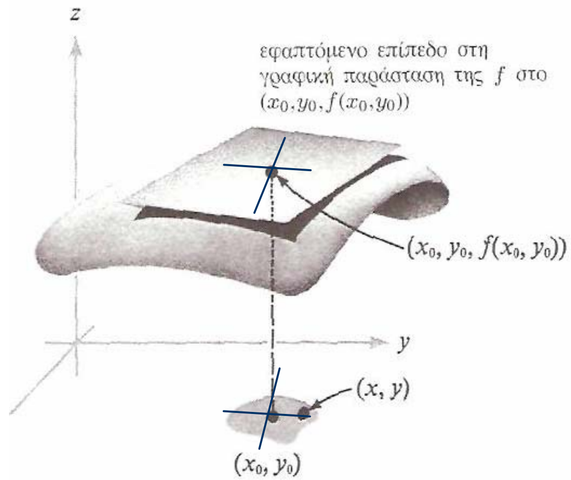
$$= \ldots =< -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 >$$

Εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f(x,y) στο P_0

Εξίσωση επιπέδου

$$< x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0) > \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow$$

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$



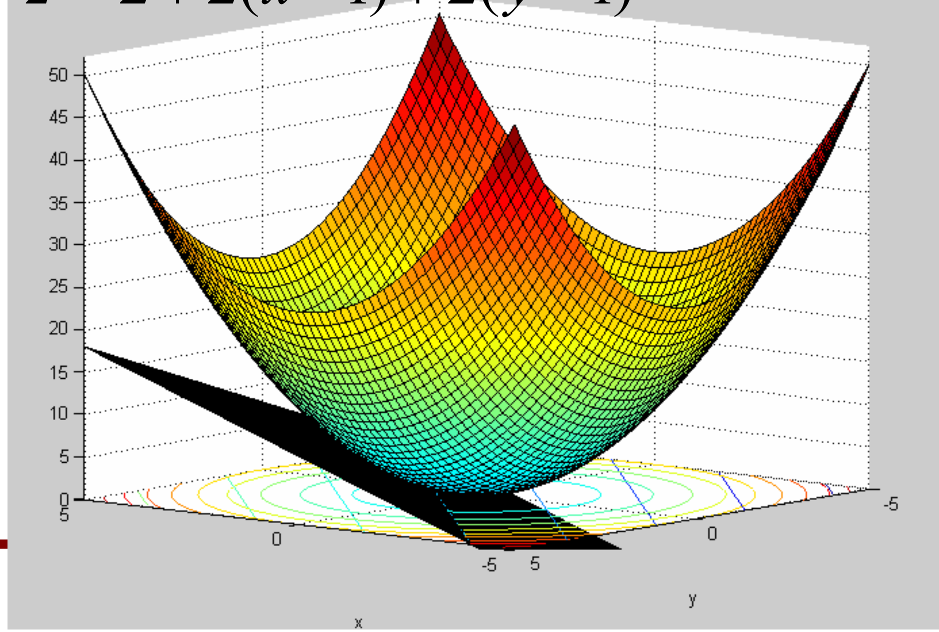
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$$

Παράδειγμα: Εφαπτόμενο επίπεδο στο (1,1,2)

$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

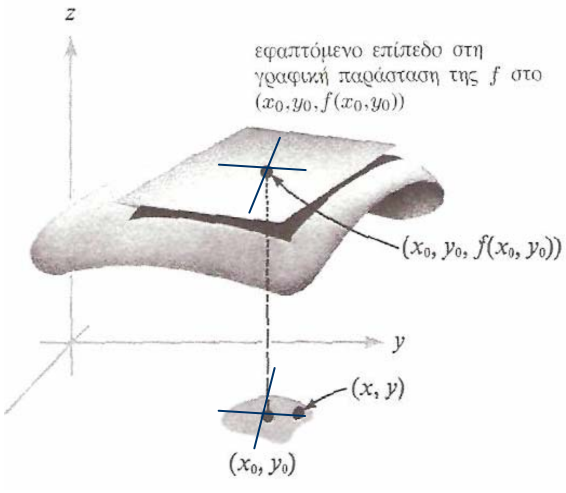


Εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f(x,y) στο P_0

Ορισμός

$$Df(x_0, y_0) = < \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} >$$

Εφαπτόμενο επίπεδο : $z - f(x_0, y_0) = Df(x_0, y_0) \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$



$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$$

Παράδειγμα: Εφαπτόμενο επίπεδο στο (3,1,10)

$$z - 10 = < 6,2 > \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Παραγωγισιμότητα Συνάρτησης

Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

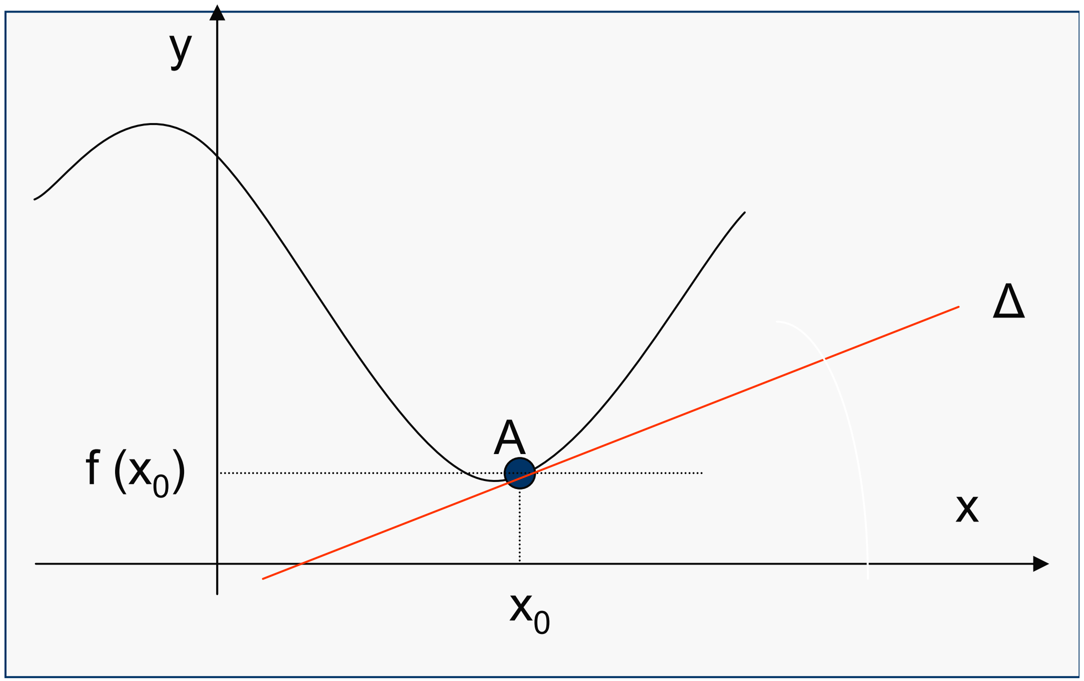
- Γεωμετρικός ορισμός: Η κλίση της εφαπτόμενης στο σημείο (x_0,f(x_0)).

$$f: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x) \longrightarrow f(x)$$

$$f': \overline{U} \subseteq U \to \mathbb{R}$$
$$(x) \longrightarrow f'(x)$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$



$$y - f(x_0) = f'(x_0) \bullet (x - x_0)$$

Κανόνες Παραγώγισης

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} c = 0$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \log_c x = \frac{\log_c e}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} c^x = c^x \ln c$$

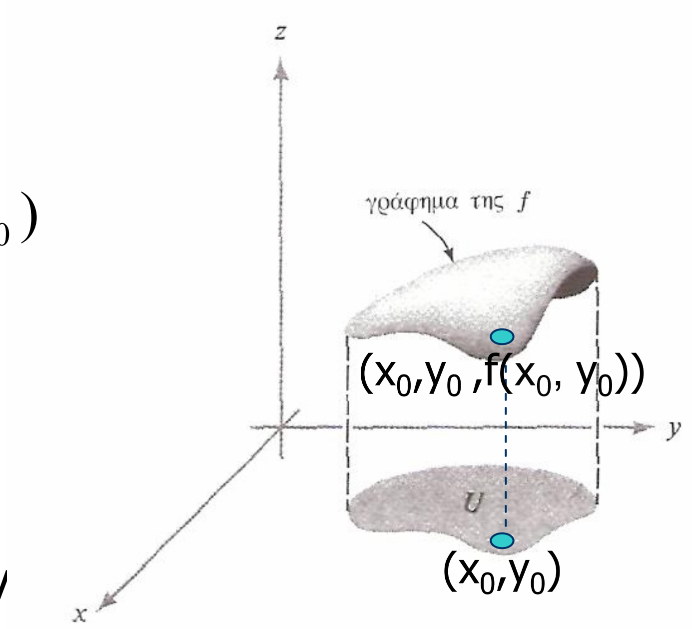
$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$



- Έστω $(x_0,y_0)\epsilon U$ με τις $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ να υπάρχουν.

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

- Τότε η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη αν

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-\left(f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}=0$$

- **Γεωμετρικά:** το όριο υπάρχει⇔ το γράφημα είναι ομαλό στο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

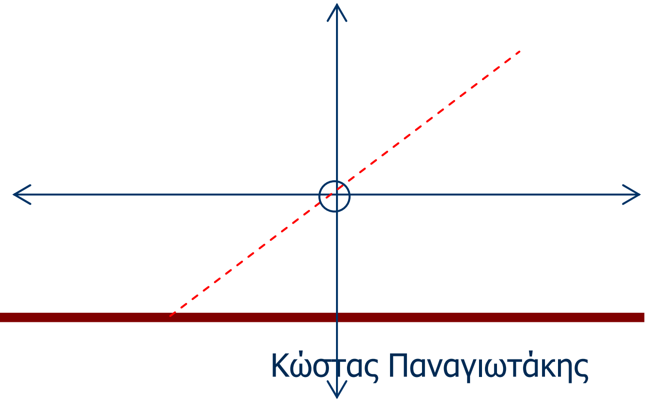
- Ενδέχεται οι $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ να υπάρχουν όμως f όχι παρ. στο (x_0,y_0)

- Παράδειγμα $f(x,y)=\begin{cases}0, x=0 \text{ ή } y=0\\ 1, -\end{cases}$ στο (0,0)

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0 \qquad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{1-1}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\left(f(0,0)+\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}(x-0)+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}(y-0)\right)}{\|(x,y)-(0,0)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-(0+0(x-0)+0(y-0))}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Το όριο δεν υπάρχει, περιορίσου στην (ε) f(x,y) = 1, μας δίνει +∞… δεν υπάρχει.



Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Θεώρημα: Έστω f, $\underset{(x,y)\to f(x,y)}{f:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}$ και $(x_0,y_0)\in U$. Αν οι $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε γειτονιά του (x_0,y_0).
Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0).

Στο προηγούμενο π.χ. παρόλο που υπήρχαν οι μερικές παράγωγοι δεν υπήρχε συνέχεια των μερικών παραγώγων στο (0,0).

Δεύτερες Παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\text{για καλές συναρτήσεις})$$

$$f(x,y)=x^2y^5+y\cos(x)+\sin(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(2xy^5-y\sin(x)+0)=2y^5-y\cos(x)$$

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Η συνάρτηση n μεταβλητών γενικεύονται οι μερικές παράγωγοι, θεωρώντας ως συνάρτηση του x_i και τα υπόλοιπα σταθερά

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{\,2} x_2^{\,5} + \sin(x_3 + x_4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 x_2^{\,5} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 5x_1^{\,2} x_2^{\,4}$$

$$\nabla f = < \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} > \quad : \text{Ανάδελτα της } f$$

Απεικονίσεις πολλών μεταβλητών

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

$$D(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, m \times n \text{ πίνακας μερικών παραγώγων της } f$$

Αν $x_0 \in IR^n$ τότε $Df(x_0)$ είναι πίνακας αριθμών.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \to (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$$

$$Df = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix} \quad Df(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται παραγωγίσιμη αν $Df(x_0)$ υπάρχει και $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - (f(x_0) + Df(x_0) \bullet (x - x_0)) \|}{\| x - x_0 \|} = 0$

ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Κανόνας Αλυσίδας

Κανόνας Αλυσίδας – 1 μεταβλητή

Έστω y=y(x) και έστω x=x(t) άρα τελικά y=y(t)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$t \to g(t) \to f(g(t))$$

$$\frac{dfog}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Παράδειγμα

$$f(x) = \cos(x)$$

$$x(t) = t^2 + 1$$

$$\frac{dfog}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = -\sin(x)(2t) = -2t\sin(t^2+1)$$

Κανόνας Αλυσίδας – 2 μεταβλητές

Έστω z=z(x,y) και έστω x=x(t) άρα τελικά y=y(t)

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Παράδειγμα

$$z(x,y)=x\cos(y) \qquad x(t)=t^2+1 \qquad y(t)=t^3+t$$

$$z(t)=(t^2+1)\cos(t^3+t)$$

$$\frac{dz}{dt}=2t\cos(t^3+t)-(t^2+1)(3t^2+1)\sin(t^3+t)$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\dots$$

Κανόνας Αλυσίδας – 2 μεταβλητές

Έστω z=z(x,y) και έστω x=x(s,t) άρα τελικά y=y(s,t)

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Παράδειγμα

$$z(x,y) = x\cos(y) \qquad x(t) = t^2 + s \qquad y(t) = s^3 + t$$

$$z(s,t) = (t^2 + s\ )\cos(s^3 + t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2t\cos(s^3 + t) - (t^2 + s\ )(1)\sin(s^3 + t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \ldots$$

Κανόνας Αλυσίδας σε απεικονίσεις

Έστω $z=z(x_1,..,x_n)$ και έστω $x_i=x(s_1,..,s_m)$ άρα τελικά $z=z(s_1,..,s_m)$

$$\frac{\partial z}{\partial s_i}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s_i}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial s_i}=\nabla Z \bullet <\frac{\partial x_1}{\partial s_i},\ldots,\frac{\partial x_n}{\partial s_i}>$$

$f: z(x_1,..,x_n)$

$fog: z=z(s_1,..,s_m)$

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$(s_1,..,s_m) \to (g_1(s_1,..,s_m),\ldots,g_n(s_1,..,s_m)) \to f((g_1(s_1,..,s_m),\ldots,g_n(s_1,..,s_m)))$$

$$\frac{\partial fog}{\partial s_i}=\nabla f \bullet \frac{\partial g}{\partial s_i}$$

$$\nabla fog=\nabla f \bullet Dg$$

$$1\times m \qquad 1\times n \quad n\times m$$

Κανόνας Αλυσίδας για απεικονίσεις

$$D(fog)=Df \bullet Dg$$

$$s\times m \qquad s\times n \quad n\times m$$

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^s$$

Κανόνας Αλυσίδας - Παραδείγματα

$$f(x,y,z) = (e^{x-z}, \cos(x+y))$$

$$g(u,v) = (e^{u}, \cos(v+u), e^{-v})$$

$$Df = \begin{pmatrix} e^{x-z} & 0 & -e^{x-z} \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \end{pmatrix}$$

$2x3$

$$Dg = \begin{pmatrix} e^{u} & 0 \\ -\sin(v+u) & -\sin(v+u) \\ 0 & -e^{-v} \end{pmatrix}$$

$3x2$

$$\boxed{\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2}$$

$$Dfog = Df \bullet Dg = \ldots$$

$2x2 \quad 2\text{x}3 \; 3\text{x}2$

$$Dfog(0,0) = Df(1,1,1) \bullet Dg(0,0) = \ldots$$

Κανόνας Αλυσίδας - Παραδείγματα

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to (e^{x+y}, e^{x-y})$$

$$c:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to (c_1(t), c_2(t))$$

c(0)=(0,0) c'(0)=(1,1)

Ποιο είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της εικόνας της c μέσω της f για t=0;

$$\boxed{\mathbb{R} \xrightarrow{c} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2}$$

$$Df = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$$

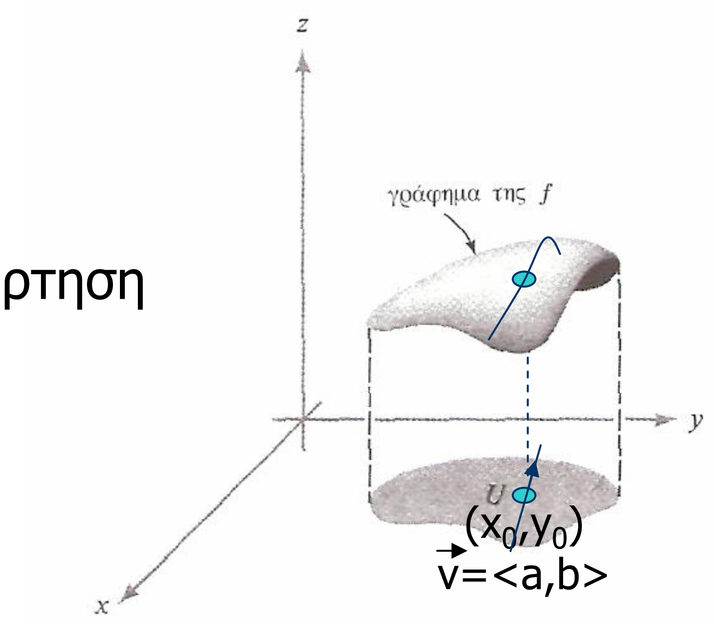
$2x2$

$$Dfoc(0) = Df(0,0) \bullet Dc(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

$$\mathbb{R} \to (\varepsilon)$$

$$t \to (x_0 + t \bullet a, y_0 + t \bullet b)$$



Περιορίζω τη f στην (ε) και την θεωρώ ως συνάρτηση μίας μεταβλητής

$$z = f(x,y)$$

$$x = x_0 + t \bullet a$$

$$y = y_0 + t \bullet b$$

$$z = f(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b = \nabla f \bullet < a,b > = \nabla f \bullet \vec{v}$$

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

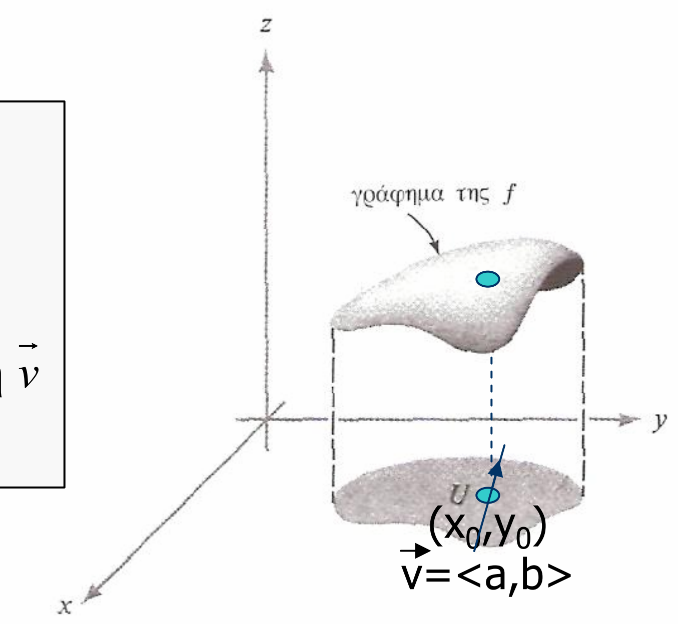
$$z = f(x, y)$$

Ορισμός $\nabla f(P) \bullet \vec{v}$ παράγωγος κατά κατεύθυνση

της f στο P ως προς την κατεύθυνση $\vec{v}$.

Γεωμετρικά $\nabla f(P) \bullet \vec{v} > 0$ συνάρτηση $\nearrow$ κατά την κατεύθυνση $\vec{v}$

$\nabla f(P) \bullet \vec{v} < 0$ συνάρτηση $\searrow$ κατά την κατεύθυνση $\vec{v}$



Παράδειγμα

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla f = < 2x, 2y >$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,1 >$$

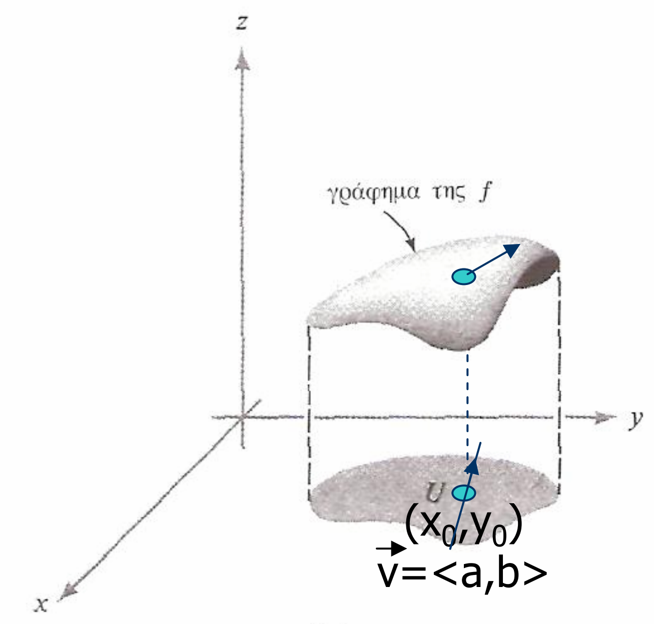
$$P(1,0)$$

$$\nabla f(P) \bullet \vec{v} = < 2,0 > \bullet \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,1 > = \sqrt{2}$$

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Προς ποια κατεύθυνση αυξάνεται πιο γρήγορα η f;

$$\nabla f(P) \bullet \vec{v} = |\nabla f(P)| \bullet |\vec{v}| \bullet \cos(\theta)$$



Αν θεωρήσουμε $|\vec{v}|=1$

Το $\nabla f(P) \bullet \vec{v}$ μεγιστοποιείται για θ=0 άρα για $\vec{v}=\dfrac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$

Η κατεύθυνση της μεγαλύτερης αύξησης είναι του $\nabla f(P)$

Η κατεύθυνση της μεγαλύτερης μείωσης είναι του $-\nabla f(P)$

Η συνάρτηση παραμένει σταθερή ως προς τη κατεύθυνση που είναι κάθετη στο $\nabla f(P), \nabla f(P) \bullet \vec{v} = 0$

Παράδειγμα $\quad f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad P(1,1,1)$

Ζητάμε τη κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης στο P.

Παραδείγματα

Η y(x) ορίζεται πεπλεγμένα από τη G(x,y(x))=0.

Αν η G,y είναι παραγ. και $\dfrac{\partial G}{\partial y} \neq 0$ τότε ν.δ.ο $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}$

Λύση

$$\boxed{\Re \xrightarrow{F} \Re^2 \xrightarrow{G} \Re}$$

Έστω F(x)=$\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$ οπότε η G(x,y(x))=0 $\Leftrightarrow$ GoF(x)=0 $\Rightarrow$

$$D(\mathrm{GoF})(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow DG \bullet DF = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial G}{\partial x} \quad \frac{\partial G}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dy}{dx} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}$$

Παραδείγματα

Εφαπτόμενο επίπεδο και κάθετο διάνυσμα της $x^2+y^2-z^2=18$ στο P(3,5,-4).

Λύση 1ος τρόπος

Το υπερβολοειδές είναι η γραφική παράσταση των $z=\sqrt{x^2+y^2-18}$ και $z=-\sqrt{x^2+y^2-18}$.

Επειδή το P έχει z<0 μας ενδιαφέρει ο $z=f(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2-18}$.

Εφαπτόμενο επίπεδο: $z - f(3,5) = Df(3,5)\bullet\begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \end{pmatrix}$

....

Λύση 2ος τρόπος

$f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-18=0$

Εξίσωση εφ. επιπέδου $\nabla f(3,5,-4)\bullet\begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \\ z+4 \end{pmatrix} = 0.$

Κάθετο διάνυσμα $\dfrac{\nabla f(3,5,-4)}{\|\nabla f(3,5,-4)\|}$