

HY-111

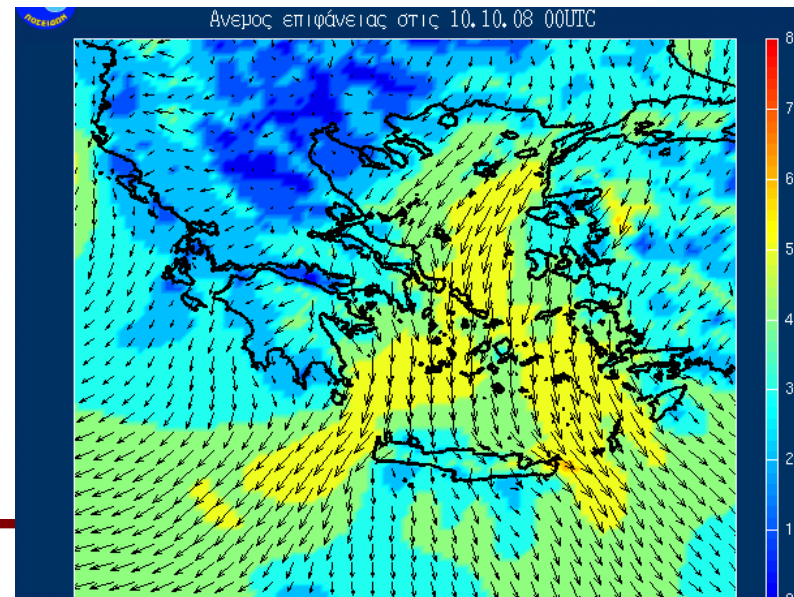
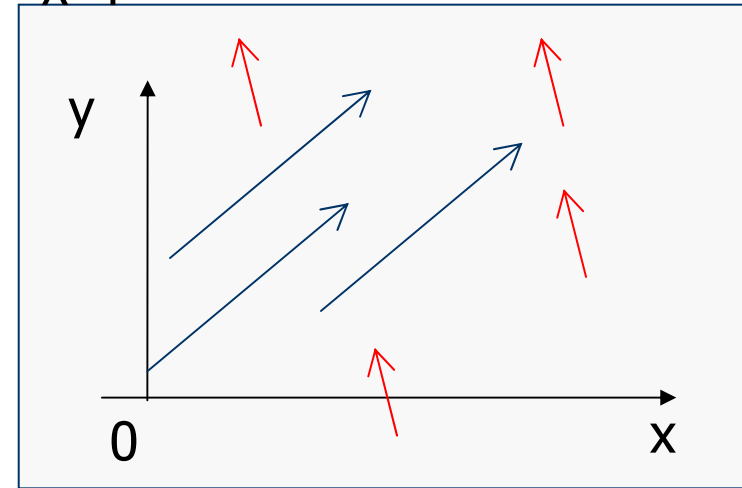
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Διανύσματα



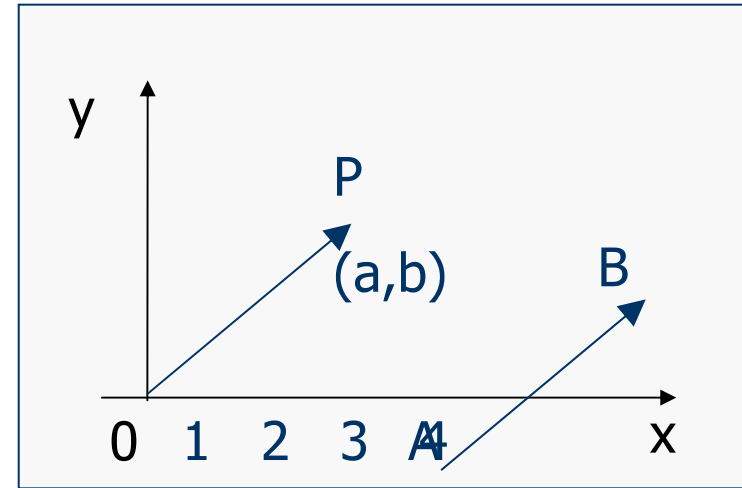
Διανύσματα (vectors)

- Ορισμός: Προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα που έχω την ελευθερία να το μεταφέρω σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου.
- Έχουν τρία στοιχεία:
 - Μήκος
 - Διεύθυνση
 - Φορά
- Παραδείγματα
 - Ταχύτητα
 - Δύναμη
 - Animations
- Δυσδιάστατα (2D) – (2D)
- Τρισδιάστατα (3D) – (3D)
- Πολυδιάστατα



Διανύσματα στο επίπεδο

- Συμβολισμός
 - $\vec{AB} = \vec{OP}$
 - $\vec{v} = \langle a, b \rangle$ (a:τετμημένη, b:τεταγμένη)
 - Διάνυσμα που όταν τοποθετηθεί στην αρχή των αξόνων καταλήγει στο $P = (a, b)$
- Ιδιότητες
 - $\langle a, b \rangle = \langle a', b' \rangle \Leftrightarrow a = a' \text{ και } b = b'$
 - Έστω $\vec{v} = \langle a, b \rangle$ τότε το μήκος του \vec{v} ,
 $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
 - Παράδειγμα:
 - Αν $\vec{v} = \langle 3, 4 \rangle \Rightarrow$
 $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



Διανύσματα στο επίπεδο

- Πλεονεκτήματα χρήσης διανυσμάτων: Αλγεβρικές πράξεις με γεωμετρική ερμηνεία

1. Πολλαπλασιασμός με αριθμό

$$\vec{v} = \langle a, b \rangle, \lambda \in \mathbb{R} :$$

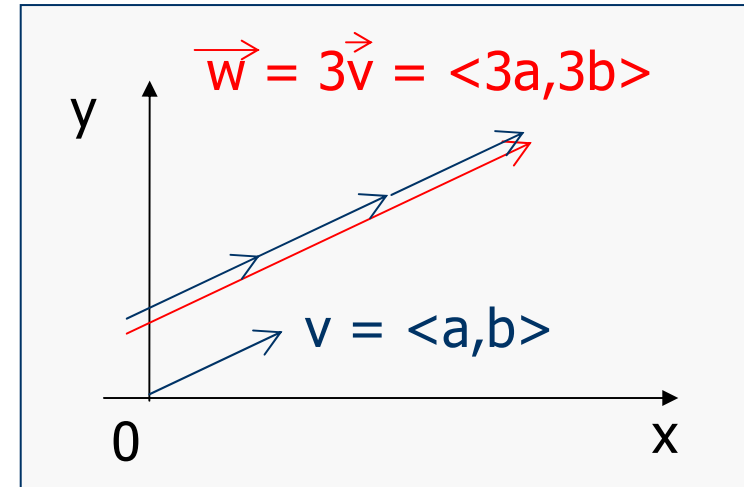
$$\lambda \vec{v} = \langle \lambda \cdot a, \lambda \cdot b \rangle$$

$$|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}|$$

*Αν $\lambda > 0$, το $\lambda \vec{v}$ έχει ίδια φορά, δ/νση, μέτρο με το $|\lambda| |\vec{v}|$

*Αν $\lambda < 0$, το $\lambda \vec{v}$ έχει αντίθετη φορά, ίδια δ/νση, ίδιο μέτρο με το $|\lambda| |\vec{v}|$

*Το $\vec{w} = \lambda \vec{v}$ έχει ίδια δ/νση με το \vec{v} ($\vec{v} // \vec{w}$)

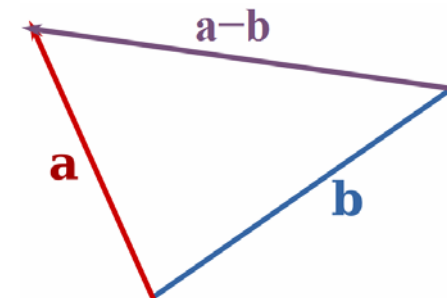
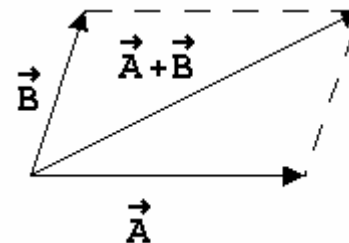


2. Πρόσθεση/Αφαίρεση

$$- \vec{v} = \langle a, b \rangle, \vec{w} = \langle a', b' \rangle$$

$$- \vec{v} \pm \vec{w} = \langle a \pm a', b \pm b' \rangle$$

$$- \vec{v} - \vec{w} = \langle a - a', b - b' \rangle$$



Διανύσματα στο επίπεδο

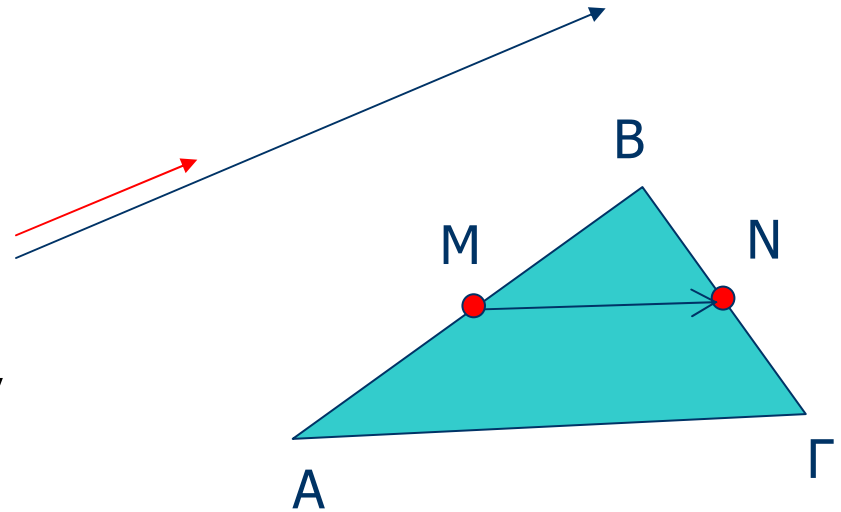
3. Διάνυσμα μοναδιαίου μέτρου

$$\vec{v} = \langle a, b \rangle, \vec{v} \neq 0$$

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Μέτρο 1

ίδια δ/νση και φορά με το v



4. Συνοπτικά

$$\vec{AB} + \vec{BΓ} = \vec{AΓ}$$

$$\vec{AB} - \vec{AΓ} = -\vec{BA} - \vec{AΓ} =$$

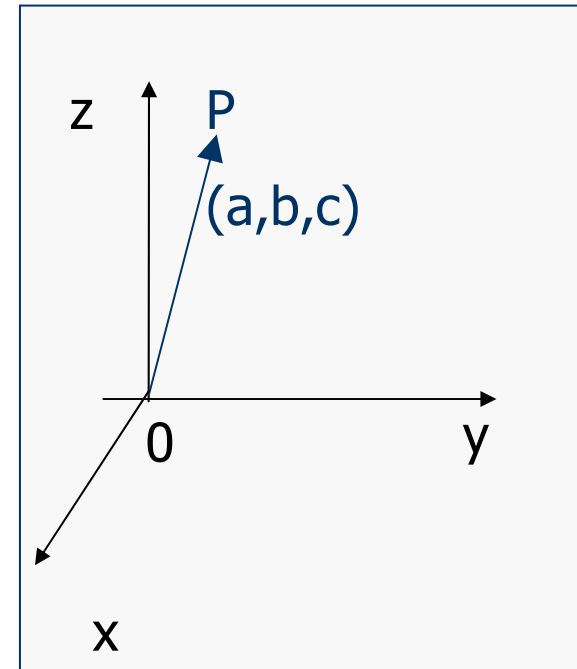
$$-(\vec{BA} + \vec{AΓ}) = -\vec{BΓ}$$

$$\text{N.δ.ο } \vec{MN} \parallel \vec{AΓ}, \text{ όπου } M, N \text{ μέσα πλευρών}$$
$$\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BN} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BΓ}) = \frac{1}{2} \vec{AΓ}$$



Διανύσματα στο χώρο

- Επέκταση του ορισμού στο επίπεδο
 - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$
 - $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$
- Ιδιότητες
 - Έστω $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ τότε το μέτρο του v ,
 $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 - Πράξεις : $w = \langle a', b', c' \rangle$
 $\lambda \vec{v} + \vec{w} = \langle \lambda a + a', \lambda b + b', \lambda c + c' \rangle$
 - Μοναδιαία διανύσματα
(διανύσματα κανονικής βάσης του \mathbb{R}^3)
 - $\vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$
 - $\vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$
 - $\vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$



Απεικόνιση διανύσματος με Matlab

- **Παράδειγμα στις 2Δ:**

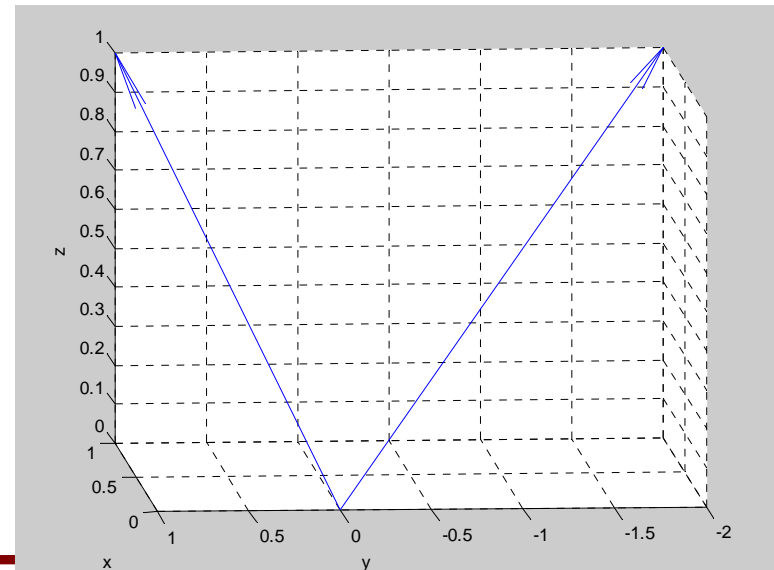
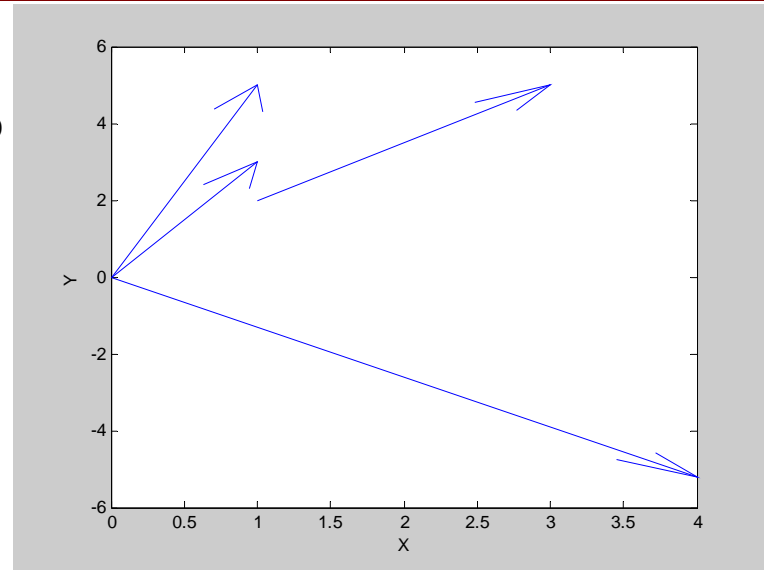
Απεικόνιση στο Matlab των διανυσμάτων, $\langle 1,3 \rangle$,
 $\langle 1,5 \rangle$ $\langle 4, -5.2 \rangle$, $\langle 2,3 \rangle$ στην αρχή των αξόνων, εκτός από
το $\langle 2,3 \rangle$ που θα τοποθετηθεί στο σημείο $\langle 1,2 \rangle$:

```
x = [1 1 4 2];  
y = [3 5 -5.2 3];  
quiver([0 0 0 1],[0 0 0 2],x,y,0);  
xlabel('X');  
ylabel('Y');
```

- **Παράδειγμα στις 3Δ:**

Απεικόνιση στο Matlab των διανυσμάτων, $\langle 1,1,1 \rangle$
, $\langle 1,-2,1 \rangle$ στην αρχή των αξόνων:

```
x = [1 1];  
y = [1 -2];  
z = [1 1];  
quiver3([0 0],[0 0], [0 0],x,y,z,0);  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
zlabel('z');
```



HY-111

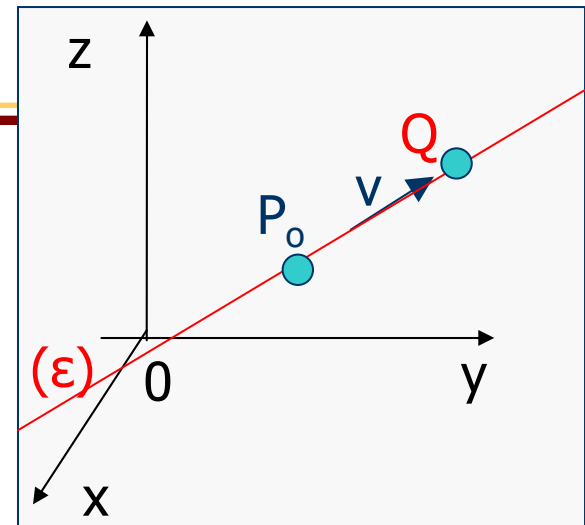
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

**Ευθεία στο χώρο/
Εσωτερικό Γινόμενο**



Ευθεία στο χώρο

- Βρες την εξίσωση της ευθείας (ε) στο χώρο που περνάει από δοσμένο σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και έχει την δ/νση του διανύσματος $v = \langle a, b, c \rangle$:



Λύση

Έστω $Q = (x, y, z) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow$ Τα διανύσματα $\vec{P_0Q}$ και \vec{v} έχουν την ίδια δ/νση:

Υπάρχει $t \in \mathbb{R}$: $\vec{P_0Q} = t \vec{v} \Leftrightarrow \langle x-x_0, y-y_0, z-z_0 \rangle = t \langle a, b, c \rangle \Leftrightarrow$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \langle a, b, c \rangle \quad (1)$$

$$x = x_0 + t a$$

$$y = y_0 + t b \quad (2)$$

$$z = z_0 + t c$$

(1),(2) παραμετρικές εξισώσεις.

Για $t=0 \Rightarrow Q = P_0$

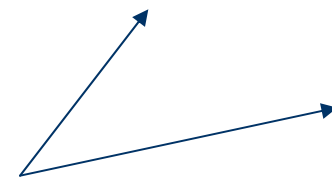
Αν $a \neq 0$ και $b \neq 0$ και $c \neq 0$ μπορούμε να απαλείψουμε το t

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (3)$$



Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Είναι ένας πραγματικός αριθμός που το πρόσημο του σχετίζεται με την γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα και το μέτρο τους (μέτρο ταιριάσματος διανυσμάτων).



- Αλγεβρικός ορισμός

$$\vec{v} = \langle a, b, c \rangle \quad \vec{w} = \langle a', b', c' \rangle$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'$$

Παράδειγμα

$$\vec{v} = \langle 1, 0, 3 \rangle \quad \vec{w} = \langle 2, 4, 0 \rangle, \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \dots$$

- Ιδιότητες

- $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$

- $\vec{v} \cdot (\lambda_1 \vec{w} + \lambda_2 \vec{u}) = \lambda_1 \vec{v} \cdot \vec{w} + \lambda_2 \vec{v} \cdot \vec{u}$

- $\lambda \vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot (\lambda \vec{v})$

Δεν ισχύει $(\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (\vec{w} \cdot \vec{u})$

Απόδειξη...



Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

• Προβολή

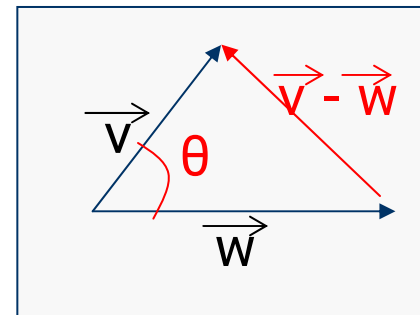
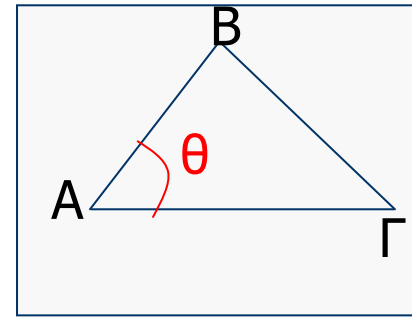
– Νόμος συνημιτόνων:

$$|B\Gamma|^2 = |AB|^2 + |A\Gamma|^2 - 2|AB||A\Gamma|\cos(\theta)$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \rightarrow |B\Gamma|^2 < |AB|^2 + |A\Gamma|^2$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow |B\Gamma|^2 = |AB|^2 + |A\Gamma|^2$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \rightarrow |B\Gamma|^2 > |AB|^2 + |A\Gamma|^2$$



$$(\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = |\vec{v} - \vec{w}|^2 \stackrel{(ν.συνημιτόνων)}{=} |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}|\cos(\theta)$$

$$(\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2 \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos(\theta)$$

Πόρισμα

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} > 0$$

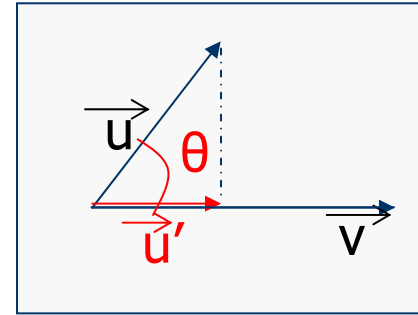
$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} < 0$$



Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Προβολή για $\theta < \pi/2$

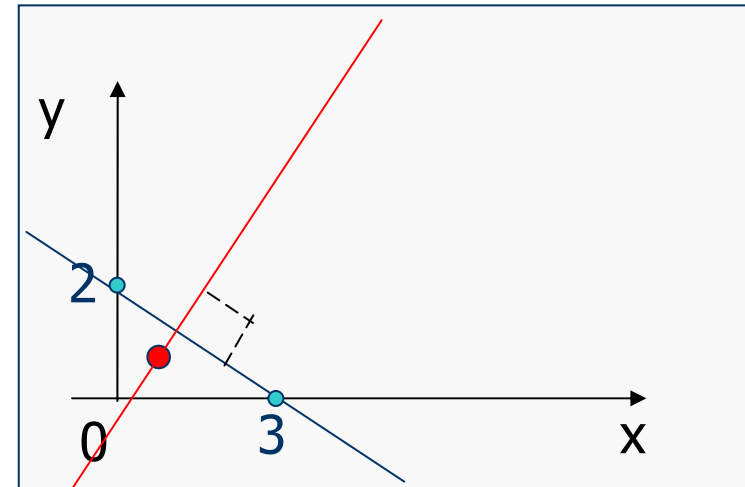
$$\vec{u}' = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} |\vec{u}'| = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} |\vec{u}| \cos(\theta) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} |\vec{u}| \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}|^2} \right) \cdot \vec{v}$$



- Αριθμητικό παράδειγμα ...

- Άσκηση

- Ποια ευθεία του επιπέδου περνάει από το σημείο (1,1) και είναι κάθετη στην ευθεία $2x+3y=6$.



Απόσταση σημείου από ευθεία

- Ποια είναι η απόσταση του $P(x_1, y_1)$ από ευθεία $ax + by = c$

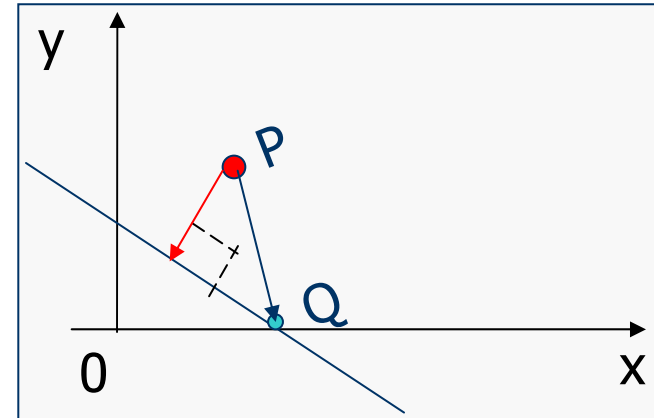
Λύση

Το σημείο $Q(c/a, 0)$ ανήκει στην (ε)

και το διάνυσμα $v = \langle a, b \rangle$ είναι κάθετο στην (ε) .

Αρκεί να υπολογίσουμε τη προβολή του \vec{PQ} στο διάνυσμα \vec{v}

...

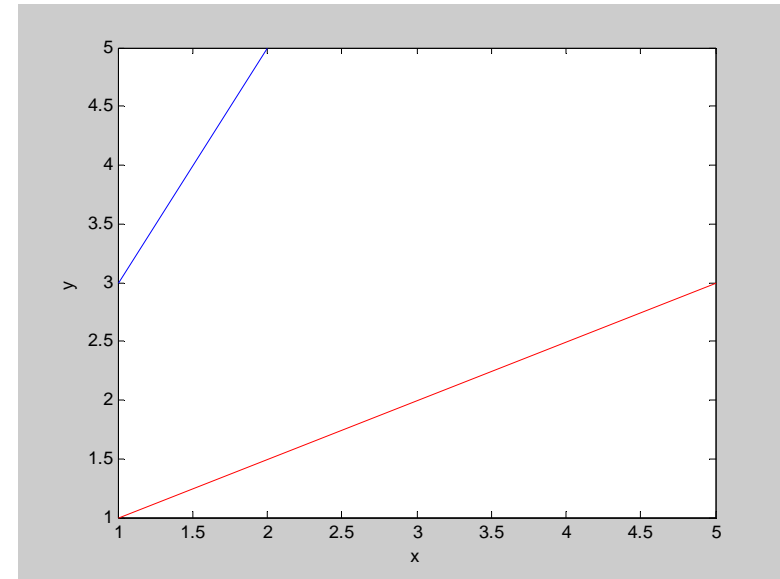


Απεικόνιση ευθείας με Matlab

- **Παράδειγμα στις 2Δ:**

Απεικόνιση στο Matlab της ευθείας που περνάει από τα σημεία $(1,3)$, $(2,5)$ και της ευθείας $(1,1)$ και $(5,3)$

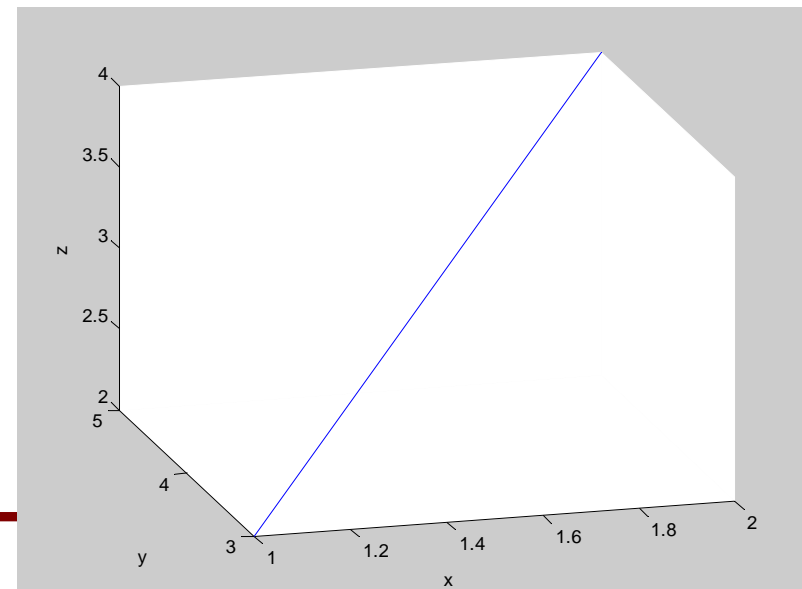
```
x = [1 2];  
y = [3 5];  
plot(x,y);  
hold on;  
x = [1 5];  
y = [1 3];  
plot(x,y,'r');  
xlabel('x'); ylabel('y');
```



- **Παράδειγμα στις 3Δ:**

Απεικόνιση στο Matlab της ευθείας που περνάει από τα σημεία $(1,3,2)$, $(2,5,4)$

```
x = [1 2];  
y = [3 5];  
z = [2 4];  
plot3(x,y,z);  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
zlabel('z');
```



HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

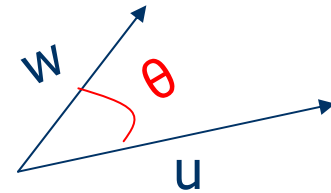
**Εξωτερικό Γινόμενο/
Εξίσωση Επιπέδου**



Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στο χώρο

$$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\vec{w} = \langle a', b', c' \rangle = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$$



Το εξωτερικό γινόμενο $u \times w$ είναι το **διάνυσμα**

1. Δ/νση: Κάθετο διάνυσμα στα u, w

2. Έχει φορά προς τα έξω αν $0 < \theta < \pi$ αλλιώς έχει φορά προς τα μέσα

3. Μέτρο $|\vec{u} \times \vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{w}| \sin(\theta)$

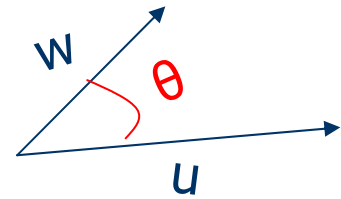
4. Αν θ είναι 0 ή π τότε το εξωτερικό γινόμενο είναι 0



Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στο χώρο

Ορισμός

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$



Ιδιότητες

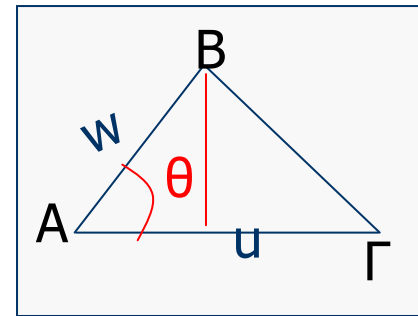
1. $\vec{u} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{u}$

2. $\vec{u} \times \vec{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{w} // \vec{u}$

3. $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$

4. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

5. $|\vec{u} \times \vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{w}| \sin(\theta) = \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{w}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{w})^2} = 2(\triangle \text{AB}\Gamma)$



Τριπλό γινόμενο διανυσμάτων

Ορισμός

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$|\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})| = |\vec{u} \times \vec{w}| |\vec{v}| \cos(\theta)$$

Όγκος παρ/δου με πλευρές τα διανύσματα του γινομένου

$|\vec{u} \times \vec{w}|$: Εμβαδόν παραλληλογράμμου



Απόσταση σημείου $P(x,y,z)$ από επίπεδο

Έστω P_i σημεία του επιπέδου

Τότε $\vec{u} = P_0P_1$ και $\vec{w} = P_0P_2$ διανύσματα του επιπέδου και $\vec{v} = P_0P$

$$| \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) |$$

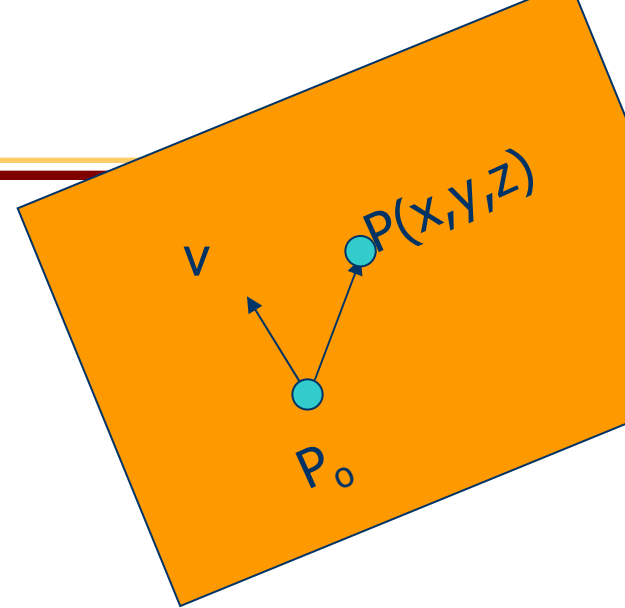
Ύψος = Όγκος παρ/δου με πλευρές τα διανύσματα του γινομένου /
Εμβαδόν της βάσης

$$| \vec{u} \times \vec{w} | : \text{Εμβαδόν βάσης}$$



Εξισώσεις Επιπέδου

- Βρες την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από δοσμένο σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$:



Έστω $\vec{w} = \vec{P_0P}$, τότε \vec{w} είναι κάθετο στο \vec{v}

Άρα για κάθε σημείο του επιπέδου $P(x, y, z)$ ισχύει

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle \cdot \langle a, b, c \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

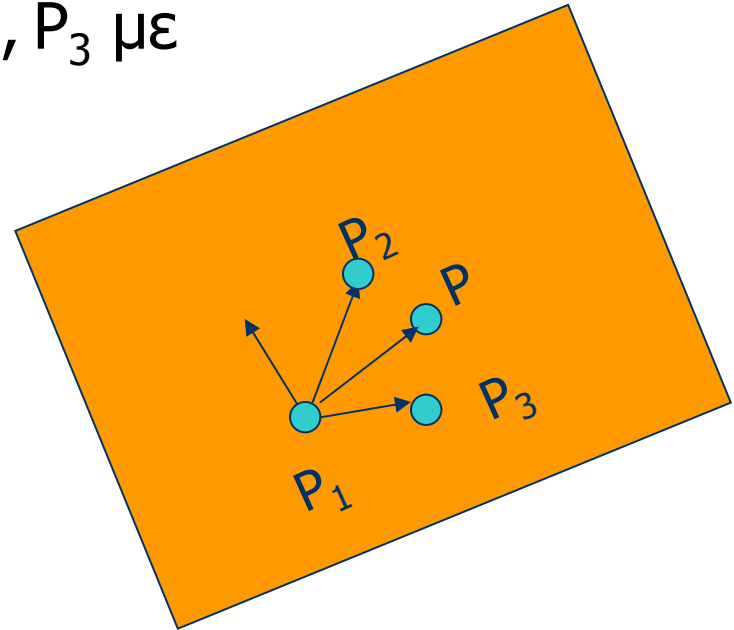
- Αντίστροφα από την εξίσωση του επιπέδου γνωρίζουμε ένα κάθετο διάνυσμα $\langle a, b, c \rangle$ στο επίπεδο
- Όμοια, με την ευθεία $ax + by = c$ και το διάνυσμα $\langle a, b \rangle$



Εξισώσεις Επιπέδου

- Βρες την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία P_1, P_2, P_3 με $P_i(a_i, b_i, c_i)$

$$\vec{P_1P} \cdot (\vec{P_1P_2} \times \vec{P_3P_2}) = 0$$



$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - b_1 & z - c_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0$$

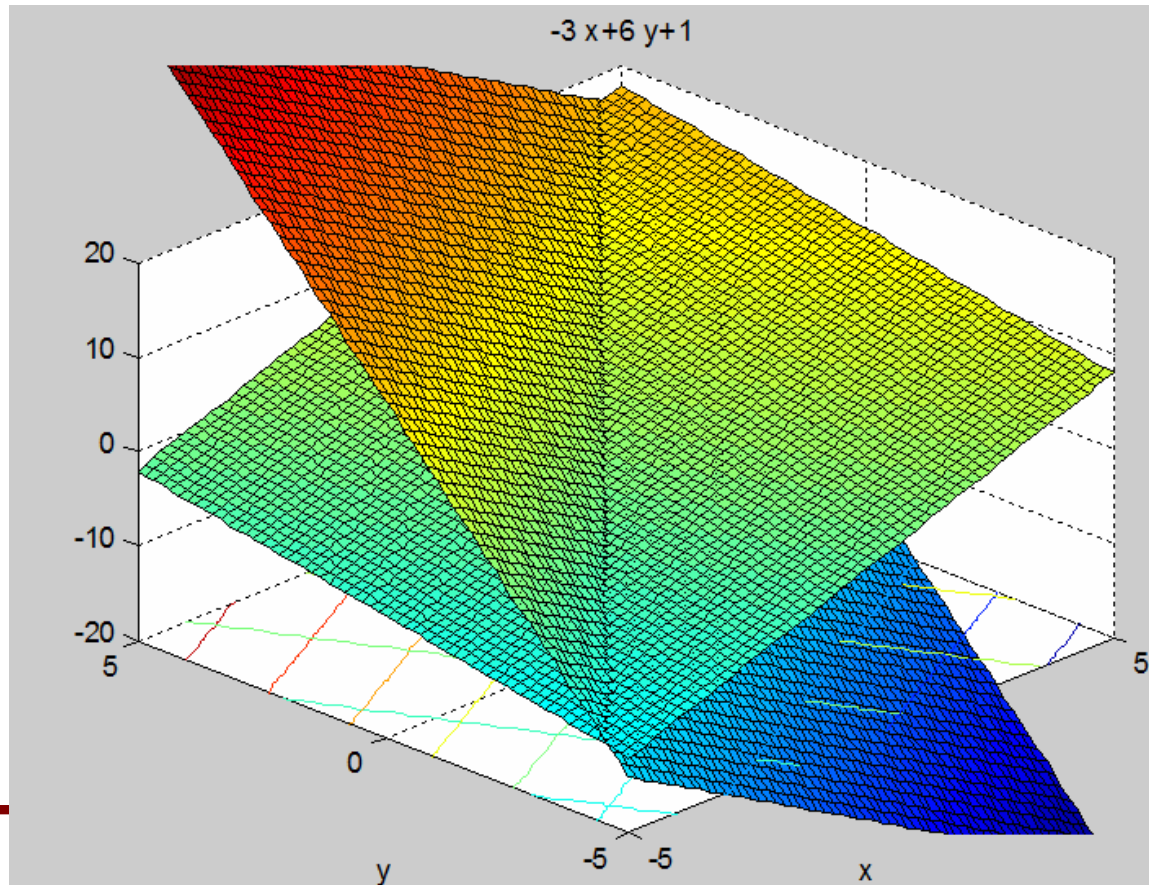


Απεικόνιση επιπέδου με Matlab

Απεικόνιση στο Matlab του επιπέδου με εξίσωση $Z=2X+Y+3$ και του επιπέδου $Z=-3X+6Y+1$

```
syms x y  
ezsurf(2*x+y+3,[-5,5,-5,5]);  
hold on;  
ezsurf(-3*x+6*y+1,[-5,5,-5,5]);
```

Είναι τα επίπεδα κάθετα;
Εξίσωση τομής;



HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

**Επαναληπτικές Ασκήσεις στα
διανύσματα**

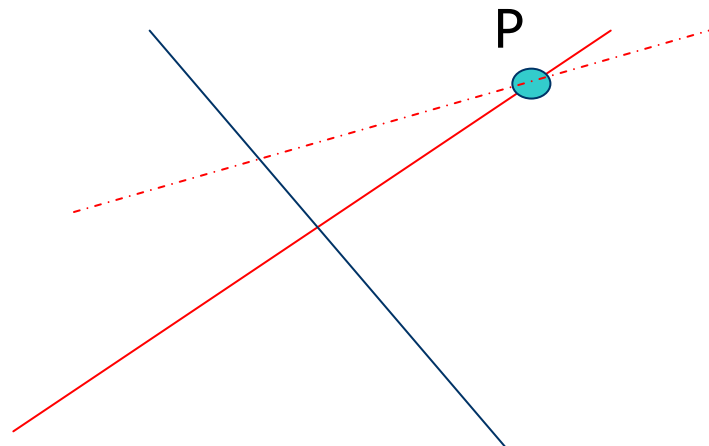


Καθετότητα

- Για ποιες τιμές του b το $\langle 2, b, 0 \rangle$ είναι κάθετο στο $\langle 3, 2, 1 \rangle$.

$$\langle 2, b, 0 \rangle \cdot \langle 3, 2, 1 \rangle = 0 \Leftrightarrow 6 + 2b = 0 \Leftrightarrow b = -3$$

- Βρείτε την ευθεία που περνάει από το $P(3, 1, -1)$ και τέμνει κάθετα την ευθεία $\langle x, y, z \rangle = t\langle 1, 1, 1 \rangle - \langle 1, 2, 1 \rangle$.



Εσωτερικό γινόμενο

- Ν.δ.ο

$$2(|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2) = |\vec{x} + \vec{y}|^2 + |\vec{x} - \vec{y}|^2$$

$$4 \cdot \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x} + \vec{y}|^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2$$



Εσωτερικό γινόμενο

- Να βρεθεί διάνυσμα που έχει μήκος 1, είναι κάθετο με το $\langle 1,1,1 \rangle$ και σχηματίζει ίδια γωνία με το \vec{j} και το \vec{k} .

Έστω $v = \langle a,b,c \rangle$ το ζητούμενο διάνυσμα.

$$(1) |v|=1$$

$$(2) \langle a,b,c \rangle \cdot \langle 1,1,1 \rangle = 0$$

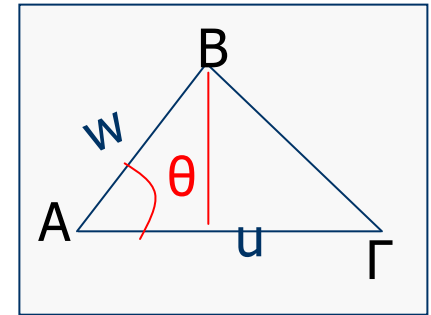
$$(3) \frac{\langle a,b,c \rangle \cdot \vec{j}}{|\langle a,b,c \rangle| \cdot |\vec{j}|} = \frac{\langle a,b,c \rangle \cdot \vec{k}}{|\langle a,b,c \rangle| \cdot |\vec{k}|}$$



Εσωτερικό γινόμενο

- Να βρεθεί το εμβαδόν τριγώνου με κορυφές $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(0,-2,3)$.

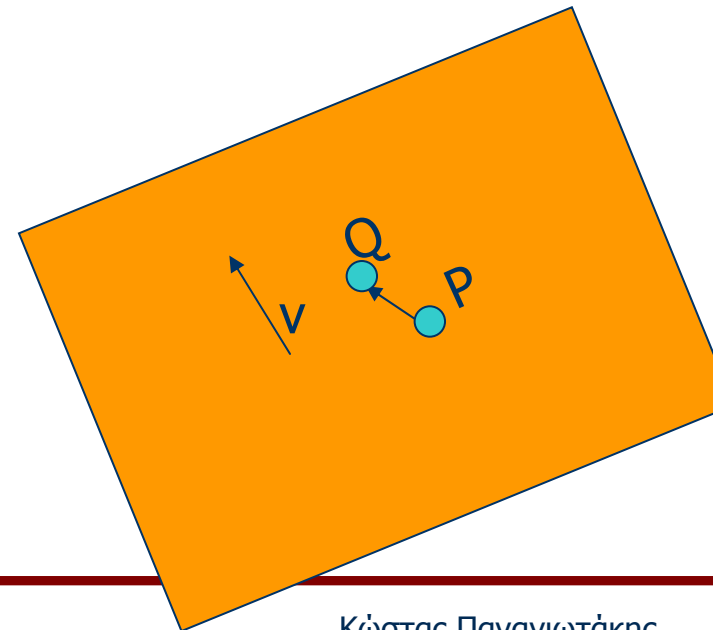
$$(\triangle AB\Gamma) = 0.5 \cdot |\vec{u} \times \vec{w}|$$



- Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου κάθετο στο $\vec{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ και περνά από το $P(1, 0, 0)$

Έστω $Q(x, y, z)$ σημείο του επιπέδου

$$\vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0$$



Εσωτερικό γινόμενο

- Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου κάθετο στην ευθεία $\langle 5,0,2 \rangle t + (3,-1,1)$ και περνά από το $P(1,0,0)$

Έστω $Q(x,y,z)$ σημείο του επιπέδου

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \langle 5,0,2 \rangle = 0$$

- Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $(1,-2,-3)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $3x-y+2z+4=0$.
 - Το διάνυσμα $\langle 3,-1,2 \rangle$ είναι κάθετο στο επίπεδο άρα παράλληλο στην ευθεία.
 - Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $\langle x-1,y+2,z+3 \rangle = \langle 3,-1,2 \rangle t$



Εξωτερικό γινόμενο

- Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τις ευθείες $(0,1,-2)+\langle 2,3,-1\rangle t$ και $(2,-1,0)+\langle 2,3,-1\rangle t$

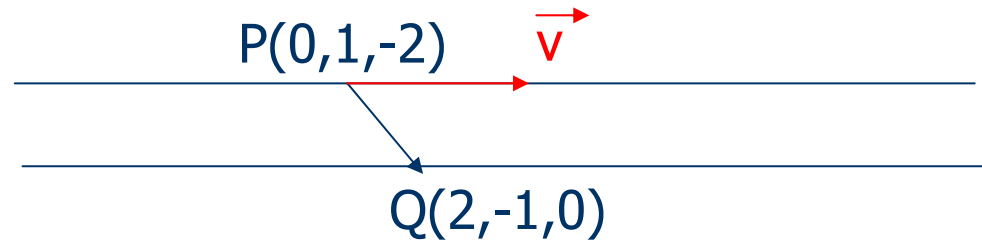
Οι ευθείες είναι // με το $\vec{v} = \langle 2,3,-1\rangle$.

Ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο

Είναι το $\vec{PQ} \times \vec{v}$.

Ένα σημείο του επιπέδου

Είναι το P.



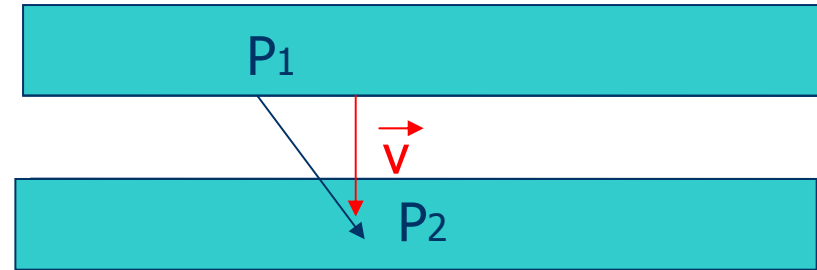
Εσωτερικό γινόμενο

- Να βρεθεί η απόσταση των επιπέδων

$$\Pi_1: ax+by+cz=f$$

$$\Pi_2: ax+by+cz=g$$

Κάθετα επίπεδα με το $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$.
Έστω P_1, P_2 σημεία των επιπέδων.



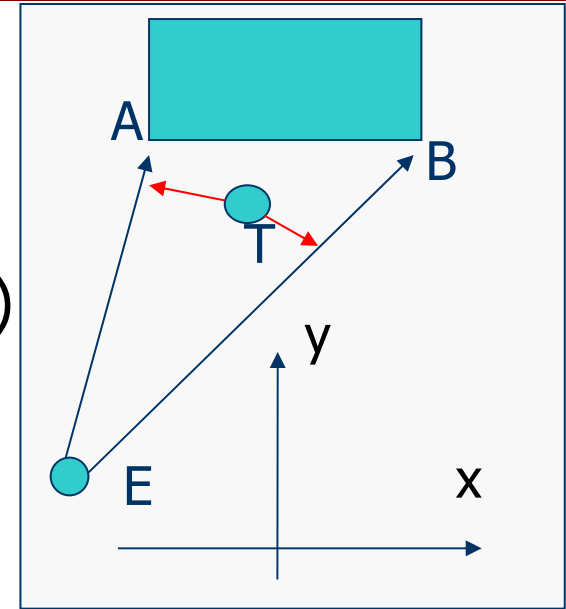
Μας ενδιαφέρει το μήκος της
προβολής του $\overrightarrow{P_1P_2}$ στο \vec{v} .

$$|\vec{h}| = \left| \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v} \right| = \dots = \frac{|f - g|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Εφαρμογή

- Εφαρμογή στο robocup...
Θεωρείστε πως το επίπεδο του γηπέδου είναι το $z = 0$.
Το τέρμα βρίσκεται από το σημείο $A(-3,100)$ $B(3,100)$. Ο επιθετικός βρίσκεται στη θέση $E(-10,70)$ και ο τερματοφύλακας $T(-1,95)$.



Για να αποφασίσει ο επιθετικός σε ποια γωνία θα εκτελέσει θα πρέπει να μπορεί να απαντήσει στο παρακάτω ερώτημα...
Θεωρώντας πως η μπάλα εκτελεί Ε.Κ. ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του τερματοφύλακα για από τις τροχιές EA και EB .

